بسم الله الرحمن الرحیم

کاربرد ریاضیات در مهندسی شیمی

دکتر مستوفی

دانشگاه تهران

فصل اول

مدل سازي رياضي

تعريف مدل سازي رياضي

- مدل سازي رياضي عبارت است از بيان رياضي رفتار فيزيکي و شيميايي تغييرات و تحولات انجام يافته در يک يا چند سيستم مرتبط با يکديگر.
- مدل سازي رياضي شامل سه مرحله اساسي فرمول بندی مسئله، حل معادله هاي حاصل و تحليل نتايج است.

کاربرد مدل سازي رياضي

- **درتحقيق و توسعه (Research and development):**

براي تعيين سينتيک واکنش ها و پارامترهاي آن با استفاده از واحد آزمايشگاهي يا واحد پيشتاز (Pilot plant)، بررسي اثر شرايط عملياتي، تعيين شرايط بهينه فرايند (Optimization) و نيز به منظور افزايش مقياس(Scale up).

- **درطراحي (Design):**

به منظور تعيين اندازه و آرايش فرآيند (Process arrangement)، بررسي اثر بخش هاي مختلف فرايندي بر يکديگر، تعيين راهبرد کنترل فرايند، شبيه سازي فرايند در هنگام راه اندازي و توقف و شبيه سازي در شرايط گذرا.

- **درعمليات واحد (Unit operation):**

به منظور عيب يابي و رفع معضلات کنترل فرايند، کاهش گلوگاه ها، بهينه سازي شرايط عملياتي و آموزش هاي راه اندازي و عملياتي.

روش هاي مدل سازي

الف- مدل سازي تجربي (Experimental modeling):

- انجام آزمايشهاي متعدد
- رسم متغيرها
- بدست آوردن رابطه ميان متغيرها
- تعيين پارامترهاي مدل

ب- مدل سازي نظري (Theorytical modeling):

- استفاده از قانون هاي اساسي و قانون هاي ويژه
- فرمول بندي مسئله
- يافتن معادله هاي حاکم بر متغيرهاي سيستم
- حل معادله ها

اهداف مدل سازي رياضي

- پيش بيني رفتار فرايند به ازاي تغيير در ورودي ها يا تغيير شرايط عملياتي
- تعيين اندازه و مشخصات فرايند براي طراحي
- تعيين يا اصلاح مقادير عددي پارامترهاي مدل با تطبيق نتايج حاصل از مدل و آزمايش
- تعيين وابستگي و اثر متقابل پارامترها و متغيرهاي مدل

مراحل مدل سازي رياضي

- **فرمول بندي مسئله**
- **حل معادله ها**
- **تحليل نتايج**

(Formulation)فرمول بندي

- اساس فرمول بندي عبارتست از به کارگيري قانون هاي عمومي شيميايي و
فيزيکي ازجمله قانون بقاي جرم، قانون بقاي انرژي و قانون بقاي اندازه حرکت.
- در فرمول بندي يک مدل، بايد نکات زير مورد توجه قرار گيرند:

- فرض هاي مدل

- نوع فرمول بندي

الف- فرمول بندي کلي يا توده اي (Lumped formulation)

ب - فرمول بندي ديفرانسيلي(Differential formulation)

پ - فرمول بندي انتگرالي (Integral formulation)

- سازگاری رياضی مدل

حل معادله هاي مدل

- **روش هاي تحليلي (Analytical methods)**
- **روش هاي عددي (Numerical methods)**
- **روش هاي ترسيمي (Graphical methods)**

تحليل نتايج

- **بررسي صحت نتايج**
- **تفسير نتايج**
- **بررسي اعتبار مدل**

مراحل فرمول بندي

- **جمع آوري اطلاعات**
- **تعيين متغيرها و پارامترهاي مدل**
  - متغيرهاي وابسته (دما، غلظت و ...)
  - متغيرهاي مستقل (زمان، مكان و ...)
- **فرض هاي مدل**

- **تعيين نوع سيستم مورد مطالعه**

الف- سيستم منفرد (Isolated system): سيستمي است كه ورودي و خروجي جرم و انرژي ندارد.

ب- سيستم بسته (Closed system): سيستمي است كه ورودي و خروجي جرم ندارد.

پ- حجم كنترل (Control volume): سيستمي است كه ورودي و (يا) خروجي جرم دارد. چنانچه ورودي و خروجي به حجم كنترل قطع شود، تبديل به سيستم بسته مي شود.

ت- جزء حجم (Element): بخش كوچكي از حجم كنترل است كه ورودي و خروجي جرم دارد.

- **انتخاب نوع فرمول بندي**

Lumped formulation -

Differential formulation -

Integral formulation -

• **فرمول بندي قانون هاي عمومي (general laws)**

الف - قانون بقاي جرم که به معادله هاي پيوستگي منجر مي شود.

ب - قانون بقاي انرژي يا قانون اول ترموديناميک که به معادله هاي انرژي منجر مي شود.

پ - قانون بقاي اندازه حرکت يا قانون دوم نيوتن که به معادله هاي حرکت منجر مي شود.

شايان ذکر است که قانون هاي عمومي، همگي در سيستم بسته بيان شده اند و بايد براي انجام مدل سازي رياضي به حجم کنترل تعميم داده شوند.

• **کاربرد قانون هاي ويژه (Particular laws):**

الف - قانون فيک (Fick's law): در نفوذ جرم (وابستگي شار (نرخ فلاکس) انتقال جرم جزئي به گراديان غلظت) [redacted]

ب - قانون فوريه (Fourier's law): در هدايت گرمايي (وابستگي شار انتقال حرارت هدايتي به گراديان دما) [redacted]

پ - قانون ويسکوزيته نيوتن (Newton's viscosity law): در نفوذ مومنتوم (وابستگي تنش (شار ممنتوم) به گراديان سرعت) [redacted]

ت - قانون نیوتن: در انتقال حرارت جابجايي (وابستگي نرخ شار انتقال حرارت جابجايي به اختلاف دما)

[redacted]

ث - قانون گازها (Gas law): در گازها (وابستگي فشار، دما و چگالي گاز)

[redacted]

ج - قانون استفان بولتزمن (Stephan Boltzmann law): در تشعشع حرارتي (وابستگي شار انتقال حرارت تشعشعي به تفاضل توان چهارم دماها)

[redacted]

- **مرتب کردن معادله ها :**

- در معادله هاي حاصل، اگر کميت هاي مورد مطالعه تابع زمان و مکان نباشد، معادله هاي جبري و اگر فقط تابع زمان يا فقط تابع يک بعدي مکان باشد، معادله هاي ديفرانسيل معمولي (ODE) حاصل مي شود.

- چنانچه کميت مورد مطالعه تابع بيش از يک متغير باشد، معادله هاي ديفرانسيل جزئي (PDE) حاصل مي شود که نحوه حل آنها، چه به صورت تحليلي و چه به صورت عددي، روش خاص خود را دارد.

در پایان باید اشاره کرد که معادله هاي دیفرانسیلي که از فرمول بندي توده اي به دست مي آیند، از نوع مسائل شرط اولیه یا مسائل (Initial value problem) بوده، تابعیت زماني دارند. معادله هایي که از فرمول بندي دیفرانسیلي حاصل مي شوند داراي تابعیت مکاني بوده، در صورت وجود عبارت نفوذ، از نوع مسائل شرط مرزي (Boundary value problem) هستند.

فصل دوم

فرمول بندي توده اي

مقدمه

- **بيان يک قانون عمومي:**

- مرحله اول: انتخاب سيستم مورد مطالعه است.

قانون هاي عمومي همواره براي بيان يک سيستم بسته نوشته شده اند. درصورتيکه سيستم باز باشد، به سختي مي توان در مدت زمان معين، مرزهاي آن را مشخص نمود. بنابراين در چنين شرايطي بايد به جاي سيستم از حجم کنترل استفاده کرد.

- مرحله دوم: انتخاب اين قانون

الف: فرمول بندي کلي يا توده اي

ب: فرمول بندي ديفرانسيلي

ج: فرمول بندي انتگرالي

قضيه تبديل رينولدز (Reynolds transport theorem)

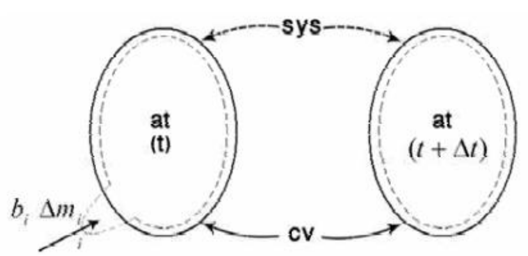
- با بيان قضيه تبديل رينولدز، فرمولي بدست مي آيد كه به كمک آن انتقال قانون هاي عمومي از سيستم به حجم كنترل ممكن مي شود. در اين قضيه، كميت مورد مطالعه كميت كلي B و مقدار مخصوص آن b ناميده مي شود.

يعني:

$$b = \frac{B}{m}$$

با توجه به فرمول بندي توده اي و يكنواخت بودن كميت B در آن، اين متغير فقط تابع زمان درنظر گرفته مي شود. جدول زير نمونه هايي از كميت هاي كلي و مخصوص را معرفي مي كند.

كميت	B	b
جرم	m	1
حجم	V	υ
انرژي كل	E	e
اندازه حركت	$m\vec{u}$	$\vec{u}$
آنتالپي	H	h
انرژي داخلي	U	u



- B_1= مقدار اوليه كميت B در سيستم
- B_2 = مقدار نهايي كميت B در سيستم
- B' = مقدار اوليه كميت B در حجم كنترل
- B''= مقدار نهايي كميت B در حجم كنترل

- طي تحول تغيير كميت B در مدت زمان Δt در سيستم مطابق رابطه زير است:

$$(\Delta B)_{SYS} = B_2 - B_1 \qquad (1\text{-}2)$$

- رابطه مقدار كميت B درسيستم با مقدار آن در حجم كنترل دردو زمان مختلف به صورت زيراست:

$$B_1 = B' + b_i \Delta m_i \qquad (2\text{-}2)$$

$$B_2 = B' \qquad (3\text{-}2)$$

- پس از جاي گذاري معادله هاي (2) و (3) در معادله (1)، رابطه زير بدست مي آيد:

$$(\Delta B)_{SYS} = (B_1 - B_2) - b_i \Delta m_i \qquad (4\text{-}2)$$

- همچنين تغيير كميت B در حجم كنترل، طي اين تحول، با را شود:

$$(\Delta B)_{c.v} = B'' - B' \qquad (5\text{-}2)$$

- در صورتي كه ورودي به حجم كنترل از چند مكار تغييرات B از مجموع ورودي ها استفاده مي شود. زير نوشته مي شود:

$$(\Delta B)_{sys} = (\Delta B)_{c.v} - \sum_{i=1}^{N} b_i \Delta m_i \qquad (6\text{-}2)$$

- در معادله بالا، N تعداد مسيرهاي ورودي به حجم كنترل است. Δm_i با علامت مثبت نشان دهنده ورودي جرم و Δm_i با علامت منفي نشان دهنده خروجي جرم است و چنانچه مساوي با صفر باشد، ورودي و خروجي جرم وجود ندارد.

- با توجه به اينكه در مدل سازي، بررسي نرخ (rate) كميت، مورد نظراست، با تقسيم رابطه (6) به مدت زماني كه اين تحول رخ داده (Δt) و ميل Δt به سمت صفر، نرخ كميت B به دست مي آيد:

$$(\Delta B)_{sys} = (\Delta B)_{c.v} - \sum_{i=1}^{N} b_i \Delta m_i \qquad (7\text{-}2)$$

به طوريكه :

$$w_i = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta m_i}{\Delta t}\right)$$

- W_i نرخ جرم ورودي به حجم كنترل در مكان i ام است. در صورت وجود خروجي ها در معادله، W_e با علامت مخالف افزوده مي شود. بنابراين معادله (7) همراه ورودي ها و خروجي ها به صورت زير نوشته مي شود:

$$(\Delta B)_{sys} = (\Delta B)_{c.v} - \sum_{i=1}^{N} b_i \Delta m_i + \sum_{e=1}^{M} b_e w_e \qquad (8\text{-}2)$$

در اين رابطه M تعداد مسير هاي خروجي است. اين معادله، فرمول تبديل رينولدز در فرمل بندي توده اي است.

فرمول بندي توده اي قانون عمومي

- فرمول بندي قانون بقاي جرم

- فرمول بندي جزء جرمي

- فرمول بندي قانون بقاي انرژي

- فرمول بندي قانون بقاي اندازه حركت

فرمول بندي قانون بقاي جرم

- بنابراين قانون، جرم كلي درسيستم همواره ثابت است. در نتيجه مي توان نوشت:

$$(\frac{dm}{dt})_{sys} = 0 \qquad (9\text{-}2)$$

- براي انتقال اين قانون از سيستم به حجم كنترل از معادله (8) استفاده مي شود. در اين فرمول ابتدا بايد كميت هاي B و b مشخص شوند. با توجه به جدول (1):

$\mathrm{B = m\,, b = 1}$

بنابراين :

$$(\frac{dm}{dt})_{sys} = (\frac{dm}{dt})_{c.v} - \sum_{i=1}^{N} w_i + \sum_{e=1}^{M} w_e$$

- با توجه به ثابت بودن مقدار جرم كلي سيستم:

$$(\frac{dm}{dt})_{c.v} = \sum_{i=1}^{N} w_i + \sum_{e=1}^{M} w_e \qquad (11\text{-}2)$$

- با توجه به اينکه بهتر است درحل مسائل، کميت هاي مورد مطالعه در يک تحول را به ويژگي هاي فيزيکي مواد مرتبط کرد، مي توان در رابطه (11) از جرم حجمي به عنوان يک ويژگي فيزيکي و نيز يک کميت شدتي به جاي توده جرم استفاده نمود.

$(m)_{c.\upsilon} = (\rho V)$ $\quad$ $w_i = \rho_i \upsilon_i$ $\quad$ $w_e = \rho_e \upsilon_e$

- بنابراين :

$$\frac{d(\rho V)}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \rho_i \upsilon_i - \sum_{e=1}^{M} \rho_e \upsilon_e \qquad (12\text{-}2)$$

- در يک فرمول بندي توده اي، فرض بر اين است که کميت مورد مطالعه و ويژگي هاي فيزيکي در حجم کنترل يکنواخت اند.

يعني: $\rho = \rho_e$

- معادله فوق، معادله پيوستگي در حجم کنترل است. معمولا از اين معادله براي تعيين تغييرات حجم يا تغييرات جرم حجمي نسبت به زمان استفاده مي شود.

سيال تراکم ناپذير

- درسيال هاي تراکم پذير مانند گازها، برحسب شرايط مسئله، امکان تغيير حجم و جرم حجمي به طور همزمان وجود دارد، ولي در سيال هاي تراکم ناپذير مانند مايعات جرم حجمي تقريبا ثابت مي ماند.
- چنانچه حجم کنترل، يک سيال تراکم ناپذير باشد، در اين صورت جرم حجمي ثابت فرض مي شود و فرمول زير بدست مي آيد:

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{e=1}^{N} \upsilon_i - \sum_{e=1}^{M} \upsilon_e \qquad (13\text{-}2)$$

به کمک اين معادله مي توان تغييرات حجم يک مايع را بدست آورد.

فرمول بندي جزء جرمي

- براي فرمول بندي يک جزء از توده کل، قانون عمومي وجود ندارد. اگر غلظت ماده مورد نظر در يک واکنش يا در يک پديده انتقال جرم تغيير کند، بايد تغييراتش را در سيستم بر اساس معادله هاي ديگر (قانون هاي ويژه) جاي گذاري کرد.
- براي فرمول بندي غلظت ماده A از يک محلول، به جاي کميت B، مي توان جز جرمي يا جز مولي را قرارداد. در صورتي که از جزء مولي استن

$$w = C_A v \qquad B = n_A \qquad b = \frac{B}{n_A} = 1$$

- n_A و C_A به ترتيب مول و غلظت مولي ماده A است و به اين ترتيب فرمول معادله (8) به صورت زير نوشته مي شود.

$$(\frac{dn_A}{dt})_{sys} = (\frac{dn_A}{dt})_{c.\upsilon} - \sum_{i=1}^{N} C_{Ai}\upsilon_i + \sum_{e=1}^{M} C_{Ae}\upsilon_e \qquad (14\text{-}2)$$

- براي استفاده از معادله بالا بايد $(\frac{dn_A}{dt})_{sys}$ را با توجه به شرايط تحول جايگزين کرد، بنابراين حالت هاي مختلفي امکان دارد.

الف: جريان ساده (Simple flow)

- دراين حالت ماده A مصرف يا توليد نمي شود. بنابراين: $(\frac{dn_A}{dt})_{sys} = 0$

$$n_A = C_A V$$

- باتوجه به اينکه است، معادله (14) به صورت زير تغيير مي کند: $\frac{d(C_A V)_{C.\upsilon}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} C_{Ai}\upsilon_i - \sum_{e=1}^{M} C_{Ae}\upsilon_e$ (15-2)
- از معادله بالا مي توان تغييرا $C_A = C_{Ae}$ ماده A را به دست آورد. شايان ذکر است که است.

ب: جريان + واكنش (Flow + Reaction)

- در اين حالت مصرف يا توليد ماده A در سيستم به كمک رابطه سرعت واكنش(R_A) محاسبه مي شود. رابطه سرعت واكنش دريک سيستم بسته براي مصرف يا توليد ماده A به صورت زير است :

$$(R_A) = \frac{1}{V}\frac{dn_A}{dt} \qquad (16\text{-}2)$$

- بنابراين

$$(\frac{dn_A}{dt})_{sys} = V(R_A) \qquad (17\text{-}2)$$

- R_A براي مصرف A، مقدار منفي و براي توليد A، مقداري مثبت خواهد بود. با جاي گذاري در معادله اصلي نتيجه مي شود:

$$\frac{d(C_A V)}{dt} = V(R_A) + \sum_{i=1}^{N} C_{Ai}\upsilon_i - \sum_{e=1}^{M} C_{Ae}\upsilon_e \qquad (18\text{-}2)$$

- بر اساس قانون سرعت واكنش، معادله سرعت، معادله اي جبري است و تابعي از غلظت و دما و فشار (در گازها) مي باشد. اين معادله بايد از قبل، از راه مدل سينتيک واكنش تعيين شود:

$$-R_A = f(C_A, P, T) \qquad (19\text{-}2)$$

- با جاي گذاري معادله سرعت در معادله اصلي، فرمول بندي غلظت كامل مي شود.

ج: جريان + انتقال جرم (FLOW + Mass transfer)

- در صورتي كه در يک تحول، غلظت ماده مورد نظر (A) در اثر انتقال جرم، مانند جذب يا دفع، تغيير كند، بايد تغييرات آن را در فرمول بندي غلظت در نظر گرفت. در فرايندهاي انتقال جرم، از قانون هاي ويژه انتقال جرم با اعمال ضريب انتقال جرم استفاده مي شود.

$$(\frac{dn_A}{dt})_{sys} = k_c.S.\Delta C_A \qquad (20\text{-}2)$$

- **K_C=ضريب انتقال جرم**
- **S= سطح انتقال جرم**
- **ΔC_A=اختلاف غلظت يا نيروي محركه انتقال جرم**

- ΔC_A بر حسب جهت تغيير،مقداري مثبت يا منفي خواهد بود.

فرمول بندي قانون بقاي انرژي

- قانون بقاي انرژي يا قانون اول ترموديناميک بيان مي کند که وقتي دريک سيستم تحولي رخ مي دهد، تفاضل حرارت دريافت شده از کار توليد شده عبارت است از تغيير انرژي کل سيستم، به صورت زير:

$$\Delta E = \delta Q - \delta W \qquad (43\text{-}2)$$

- معادله (43) قانون بقاي انرژي در سيستم بسته است. بيان اين قانون بر اساس نرخ انرژي عبارت است از:

$$\frac{dE}{dt} = Q^0 - W^0 \qquad (44\text{-}2)$$

- به طوري که :

$$Q^0 = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\delta Q}{\Delta t} \qquad W^0 = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\delta W}{\Delta t}$$

- در اين حالت کميتي که بايد فرمول بندي شود انرژي است.

- انرژي سيستم شامل شکل هاي مختلفي از انرژي دروني، جنبشي و پتانسيل است.
- بنابراين:

$$E = E_u + E_k + E_p \qquad (45\text{-}2)$$

- يا:

$$E = mu + \frac{1}{2g_c} m\upsilon^2 + \frac{mg}{g_c} z \qquad (46\text{-}2)$$

- انرژي مخصوص سيستم عبارت است از:

$$e = e_u + e_k + e_p \qquad (47\text{-}2)$$

- با استفاده از فرمول تبديل رينولدز کميت B و b بر اساس انرژي جايگزين مي شود. به طوري که:

$$B = E, b = e \qquad (48\text{-}2)$$

و با جاي گذاري معادله هاي فوق در معادله اصلي خواهيم داشت:

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{c.\upsilon} = Q^0 - W^0 + \sum_i e_i w_i \qquad (49\text{-}2)$$

- به طوري كه W^0 توان خروجي و Q^0 نرخ حرارت دريافتي بـه وسـيله سيستم است.Q^0 بـا حـرارت دريـافتي از راه حجـم كنترل برابر است.
- بنابراين : $Q^0 = Q^0{}_{c.\upsilon}$
- به طور معمول W^0 شامل موارد زيراست:

$$W^0 = W_d{}^0 + W_s{}^0 + W_{el}{}^0$$

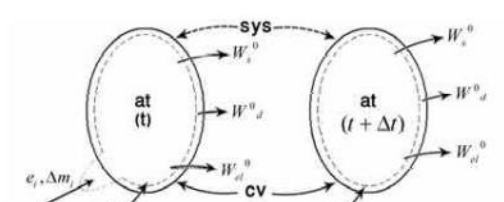
$$W_{el}{}^0 = (W_{el}{}^0)_{c.\upsilon} \qquad W_s{}^0 = (W_s{}^0)_{c.\upsilon} \qquad W^0{}_d = (W_d{}^0 + W_i^0)_{c.\upsilon}$$

- $(W_{el}{}^0)_{c.\upsilon}$,$(W_s{}^0)_{c.\upsilon}$ و$(W_d{}^0)_{c.\upsilon}$ مربوط بـه تـوان هـاي جابجـايي، شـفت و الكتريكـي درحجـم كنتـرل و $(W_i{}^0)_{c.\upsilon}$ تـوان مربوط به جريان جرم ورودي به حجم كنترل مـي باشد كـه در اثـر جابجـايي سيال در ورود بـه حجـم كنتـرل انجـام مـي شود.

- همـانطور كـه در شـكل نـشان داده شـده اسـت، جريـان ورودي كـار انقباضـي روي حجم كنتـرل انجـام مـي دهد، كـه مقدار آن برابـر بـا حاصل ضرب فشار در حجم جريان ورودي است.

$$(W_i{}^0)_{c.\upsilon} = -\sum_i^N P_i \upsilon_i \qquad (51\text{-}2)$$

- P_i فشار سيال ورودي، υ_i شـدت جريـان حجمـي ورودي و علامـت منفي به دليل انجام كار روي حجم كنترل است.



$$\frac{d(E)_{c.\upsilon}}{dt} = Q^0{}_{c.\upsilon} - (W^0{}_s + W^0{}_d + W_{el}{}^0)_{c.\upsilon} + \sum_i^N P_i \upsilon_i + \sum_i^N e_i w_i \qquad (52\text{-}2)$$

- با جاي گذاري روابط فوق در معادله حاصل خواهيم داشت:

$$w_i = \rho_i \upsilon_i$$

$$(E)_{c.\upsilon} = (\rho V e)_{c.\upsilon}$$

$$e = e_u + e_k + e_p$$

$$e_i = e_{ui} + e_{ki} + e_{pi}$$

$$W^0{}_{c.\upsilon} = (W_s{}^0 + W_d{}^0 + W_{el}{}^0)_{c.\upsilon}$$

$$\frac{d}{dt}[\rho V(e_u + e_k + e_p)]_{c.\upsilon} = Q^0{}_{c.\upsilon} + W^0{}_{c.\upsilon} + \sum_i^N \rho_i \upsilon_i \left(\frac{P_i}{\rho_i} + e_{ui} + e_{ki} + e_{pi}\right) \qquad (53\text{-}2)$$

- در معادله فوق با توجه به تعريف آنتالپي $(h = \frac{P}{\rho} + e_u)$ مي توان در عبارت ورودي به جاي مجموع انرژي دروني و انرژي فشاري، آنتالپي را جايگزين كرد.
- از معادله انرژي مي توان با توجه به فرض هاي سيستم

معادله حرارت

- چنانچه در يک تحول، انرژي حرارتي موثرتر از انرژي هاي پتانسيل و جنبشي باشد، تغييرات دما اهميت پيدا مي كند. به اين ترتيب از فرمول بندي انرژي، معادله حرارت نتيجه مي شود. در اين شرايط عبارت هاي مربوط به انرژي جنبشي و پتانسيل ناچيز است و از آنها صرف نظر مي شود. از سوي ديگر توان حجم كنترل از نظر گرمايي قا

$$\frac{d}{dt}(\rho V e_u) = Q^0{}_{c.\upsilon} + \sum_i^N \rho_i \upsilon_i h_i - \sum_i^M \rho_e \upsilon_e h_e \qquad (54\text{-}2)$$

- از طرفي رابطه آنتالپي و انرژي دروني به صورت زير است:

$$dh = \bar{c}_P T \qquad de_u = \bar{c}_\upsilon dt \qquad (55\text{-}2)$$

- به طوريكه $\bar{c}_\upsilon = \bar{c}_p$ به ترتيب گرماي ويژه در فشار ثابت و حجم ثابت هستند.
- با اندكي خطا:

$$h = \bar{c}_P T \qquad e_u = \bar{c}_\upsilon T \qquad (56\text{-}2)$$

- بنابراين:

$$\frac{d}{dt}(\rho V \bar{c}_\upsilon T) = Q^0{}_{c.\upsilon} + \sum_i^N \rho_i \upsilon_i \bar{c}_{P_i} T_i - \sum_i^M \rho_e \upsilon_e \bar{c}_{P_i} T_e \qquad (57\text{-}2)$$

- با توجه به توده اي بودن كميت ها در هر لحظه خصوصيات خروجي و داخلي برابرند. $\rho = \rho_e, T = T_e$
- يعني: $\bar{c}_{pi} = \bar{c}_{pe} = \bar{c}_\upsilon = \bar{c}, \rho_i = \rho_e = \rho$
- اگر سيال تراكم ناپذير باشد :
- در اين صورت دما و حجم تابعي وابسته به زمان اند، در صورتي كه چگالي و

معادله حرارت همراه با واکنش

- چنانچه در حجم کنترل واکنشي رخ دهد، با توجه به اينکه در فرايندها با انجام واکنش مقداري حرارت مبادله و سبب تغيير دماي حجم کنترل مي شود، بايد آنتالپي واکنش را در معادله حرارت دخالت داد.
- اين حرارت در صورت گرمازا بودن واکنش به طرف دوم معادله اضافه، و در صورت گرماگير بودن از آن کم مي شود.
- اگر ΔH_{R_A} آنتالپي واکنش به ازاي مصرف يک مول A باشد، چون براي واکنش ΔH_{R_A} منفي و براي واکنش گرماگير مثبت است، بنابراين رابطه زير بايد به سمت راست معادله (57) اضافه شود.

$$Q_R{}^0 = (-\Delta H_{R_A})(-R_A V) \qquad (58\text{-}2)$$

- R_A- سرعت مصرف ماده واکنش دهنده A است که به صورت يک تابع جبري دما و غلظت مواد واکنشگر معرفي مي شود. V نيز حجم سيال واکنش (حجم کنترل) می باشد.

معادله برنولي

- معادله زير را در نظر بگيريد:

$$\frac{d}{dt}[\rho V(e_u + e_k + e_p)]_{c.\upsilon} = Q^0{}_{c.\upsilon} + W^0{}_{c.\upsilon} + \sum_i^N \rho_i \upsilon_i \left(\frac{P_i}{\rho_i} + e_{ui} + e_{ki} + e_{pi}\right)$$

- براي جريان يک سيال در لوله شرايط زير حاکم است:

- ورودي و خروجي جرم وجود دارد، ولي تجمع جرمي وجود ندارد. بنابراين: $\rho_i \upsilon_i = \rho_e \rho_e$
- کار و گرما مبادله نمي شود. بنابراين: $W^0{}_{c.\upsilon} = 0, Q^0{}_{c.\upsilon} = 0$
- اصطکاک وجود ندارد، بنابراين تجمع انرژي وجود ندارد. در نتيجه $\frac{dE}{dt} = 0$ دماي ورودي و خروجي يکسان است. بنابر $e_{u_i} = e_{u_e}$

- بنابر اين معادله (53) به معادله زير يعني معادله برنولي تبديل مي شود.

$$\frac{P_i}{\rho_i} + \frac{V_i{}^2}{2g_c} + \frac{z_i g}{g_c} = \frac{P_e}{\rho_e} + \frac{V_e{}^2}{2g_c} + \frac{z_e g}{g_c} \qquad (59\text{-}2)$$

فرمول بندي قانون بقاي اندازه حركت

- قانون بقاي اندازه حركت (مومنتوم)، قانون دوم نيوتن است كه بيانگر برابري تغييرات اندازه حركت يک سيستم با جمع جبري نيروهاي اعمال شده است. يعني:

$$\frac{d(m\vec{u})}{dt} = \sum_i \vec{F}_i$$

(69-2)

- دراين قانون كميتي كه بايد فرمول بندي شود، اندازه حركت است كه كميتي برداري است و در هنگام فرمول بندي علاوه بر مقدار بايد جهت و امتداد آن را نيز درنظر گرفت. با توجه به كميت هاي B و b براي ا $\dot{B} = m\dot{\vec{u}}, b = \vec{u}$ تبديل رينولدز:

(70-2)

- و با جاي گذاري معادله هاي (69) و (70)

$$\left[\frac{d(m\vec{u})}{dt}\right]_{c.v} = \sum_i \vec{F}_i + \sum_i^N \vec{u}_i w_i$$

(71-2)

- نيروهاي وارد بر يک سيستم شامل نيروهاي اصطكاك(body force) وفشاري(ressure force

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{g} + \vec{B}f + \sum_i^N \overline{P_i A_i}$$

(72-2)

- از آنجا كه سيال ورودي داراي فشار هيدروستاتيک است، هنگام ورود به حجم كنترل نيروي فشاري وارد مي كند. از طرف ديگر، نيروهاي اصطكاك نيز در خلاف جهت حركت اعمال مي شوند، كه در هنگام جاي گذاري با علامت منفي در معادله به كار مي روند.
- با توجه به اينكه: $m = \rho V, w = \rho u A$
- و با جاي گذاري معادله (72) در معادله (71) و مرتب كردن آن، معادله حركت به صورت زير حاد

$$\frac{d(\rho V\vec{u})_{c.v}}{dt} = \rho V\vec{g} + \vec{B}f + \sum_i^N \overrightarrow{P_i A_i} + \sum_i (\rho_i u_i A_i)\vec{u}_i$$

(73-2)

- چنانچه جريان خروجي وجود داشته باشد، دو عبارت ديگر شامل نيروهاي فشاري اعمال شده از جريان خروجي و نيروي وارد شده در اثر حركت سيال به معادله (73) اضافه مي شود. با توجه به اينكه اين نيروها در خلاف جهت حركت از محيط به حجم كنترل وارد مي شوند، داراي علامت منفي اند.
- بايد توجه كرد كه در فرمول بندي توده اي مي توان سرعت حركت حجم كنترل را در هر لحظه برابر با سرعت جريان خروجي در نظر گرفت. $\vec{u} = \vec{u}_e$
- يعني:

فصل سوم

فرمول بندي ديفرانسيلي

مقدمه

- به منظور يافتن مدل دقيق تري از رفتار متغيرهاي يک فرايند، از فرمول بندي ديفرانسيلي استفاده مي شود.
- در اين نوع فرمول بندي، قانون هاي عمومي بر روي جز حجم (element) که بخش کوچکي از حجم کنترل است، نوشته مي شود.
- بر خلاف فرمول بندي توده اي، معادله ديفرانسيل حاصل، وابسته به مکان است. معادله هاي ديفرانسيل حاصل اغلب از نوع PDE هستند.

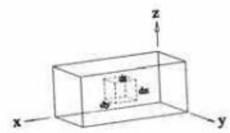
جزء حجم

- در فرمولبندي ديفرانسيلي، سيستم مورد مطالعه جز حجم است. جز حجم مانند حجم كنترل، ورودي و خروجي جرم دارد.
- معمولا در مختصات كارتزين جز حجم را به شكل مكعب مستطيل، در مختصات استوانه اي به شكل قطعه اي كوچک از استوانه و در مختصات كروي، به شكل قاچ كوچكي از كره در نظر مي گيرند.

- تابع f اگر وابسته به ابعاد مكاني و زماني باشد، پس از مدل سازي در سيستم هاي مختلف تابعيت آن به صورت زير حاصل مي شود:
  - **در مختصات كارتزين** $f = f(x, y, z, t)$
  - **در مختصات استوانه اي** $f = f(r, \theta, z, t)$
  - **در مختصات كروي** $f = f(r, \theta, \varphi, t)$
- در هنگام فرمول بندي ديفرانسيلي، ابتدا بايد مشخص كرد كه كميت مورد بررسي تابع چه متغيرهاي مستقلي است و در ميان ابعاد مكاني سيستم، كدام بعد نسبت به ساير متغيرهاي مكاني اهميت بيشتري دارد. اين مسئله در انتخاب شكل و نوع جزحجم به ما كمک خواهد كرد.
- اگر تابع مدل وابسته به سه بعد مكاني باشد، جز حجم انتخاب شده نيز بايد داراي سه بعد كوچک باشد تا پس از مدل سازي، كميت مورد مطالعه به صورت تابعي از سه متغير مكاني بدست آيد. ولي اگر تابع مدل وابسته به يک بعد مكاني باشد، بهتر است بعد حجم به شكلي انتخاب شود كه فقط در همان بعد داراي اندازه كوچک بوده،

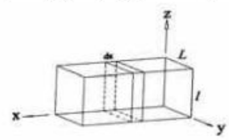
جزء حجم در مختصات کارتزین

- در شکل هاي (4-1)، جز حجم هاي مکعب مستطیل با اندازه هاي مختلف مشخص شده اند.



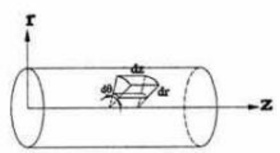
شکل (4-1-الف) جز حجم مکعب مستطیل با سه بعد کوچک به اندازه هاي (dx, dy, dz)

شکل (4-1-ب) جز حجم مکعب مستطیل با دو بعد کوچک به اندازه هاي (dx, dy, l)

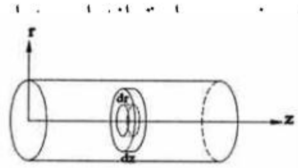


جزء حجم در مختصات استوانه اي

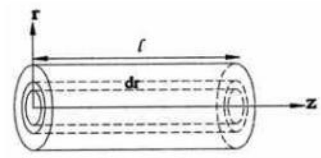
- درشکل هاي (4-2) جز حجم استوانه اي با اندازه هاي مختلف مشخص شده اند.



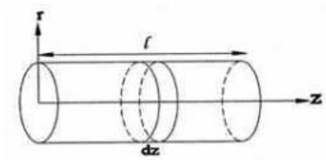
شکل (4-2-الف’ ... (dr, rdθ, dz)



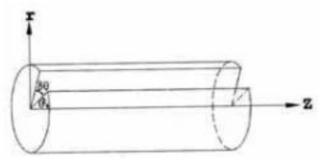
شکل(4-2-ب) جز حجم به شکل حلقه کوچک استوانه ای به ابعاد



شکل (4-2-پ) جز حجم به شکل یک استوانه کامل توخالي به ابعاد $(dr,2\pi,l)$

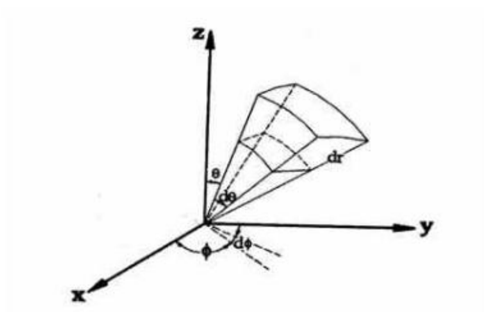


شـکل(4-2-ت) جـز حجـم بـه شـکل یـک اسـتوانه بـا ارتفـاع کوچـک بـه ابعـاد $(R,2\pi,dz)$

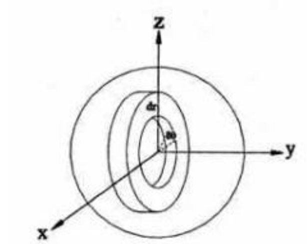


جزء حجم در مختصات کروي

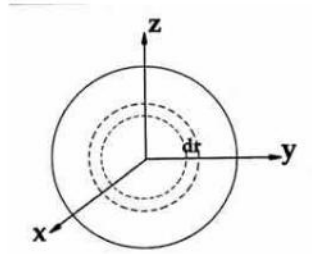
- در شـکل هـاي (4-3) جز حجم هـاي کـروي برحسب انـدازه هـاي مختلف مشخص شده اند.



شکل(4-3-الف) جز حجم به شـکل قـاچي از کـره بـه ابعـاد ($r \sin\theta d\varphi$, $rd\theta$, dr)



- شکل (4-3-ب) جز حجم به شکل حلقه اي توخالي ازکره به ابعاد(π, (2rdθ,dr



- **در مرحله فرمول بندي، ابتدا با توجه به فرض هاي مسئله، بايد شكل و نوع جز حجم به درستي انتخاب گردد، سپس بايد قانون هاي عمومي بر روي آن نوشته شود و با كمك قانون هاي ويژه فرمول بندي كامل گردد.**

فرمول بندي قانون هاي عمومي

- **با توجه به اينكه جز حجم، شش وجه دارد، بايد ورودي ها و خروجي ها از اين وجوه مورد توجه قرار گيرند.**
- **در جز حجمي كه داخل سيستم اصلي مشخص مي شود و هيچ مرز مشتركي با آن ندارد، همواره سه وجه در مقابل ورود كميت و سه وجه ديگر در مقابل خروج كميت قراردارند.**
- **كميت اصلي مورد مطالعه بايد به صورت نرخ فلاكس (شار) در نقطه ورود يا خروج از جز حجم در نظر گرفته شود كه پس از ضرب كردن در سطح مقطع جز حجم مقدار نرخ كميت انتقالي مشخص مي گردد.**

- از آنجا كه فرمول بندي كلي براي كميت هاي مختلف جرم، انرژي و مومنتوم مشابه هستند، از اين تشابه در مدل سازي كمک گرفته مي شود.
- شار كميت عبور كننده از جز حجم برحسب نوع جريان به دو عبارت تفكيک مي شود: يكي در اثر جريان كلي (Bulk flow) و ديگري در اثر نفوذ (Diffusion) است. در جدول (4-1) براي انواع كميت هاي مورد بحث، هريک از اين عبارت ها معرفي شده اند

نوع نفوذ	شار كميت جريان نفوذی (Diffusion)	جريان کلی (Bulk flow)	نوع كميت
-	-	$\vec{\rho u}$	جرم كلي (m)
نفوذ مولكولي	J_i	$c_i u$	جزءمولي (n_i)
هدايت حرارتي	q	ρuh	انرژي حرارتي (H)
تنش	τ	$(\rho u).u$	مومنتوم ($\overrightarrow{mu}$)

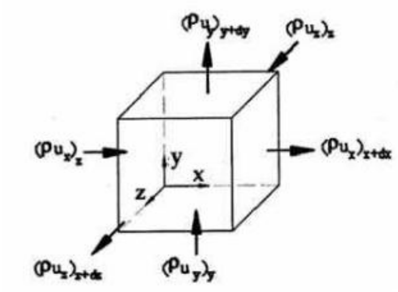
- شار نفوذ جزء جرمي (J_i) با قانون فيک (Fick's law)، شار نفوذ حرارت (q) با قانون فوريه (Fourier law) و شار نفوذمومنتوم (τ) با قانون ويسکوزيته نيوتن (براي سيالات نيوتني) جايگزين مي شوند. در نتيجه مي توان با تشابه در مدل سازي کميت هاي جرم، حرارت و مومنتوم، فرمول بندي را انجام داد و در نهايت به معادله ديفرانسي مورد نظر رسيد.

<u>قانون بقاي جرم</u>

- **با انجام موازنه جرم بر روي جز حجم، فرمول بندي ديفرانسيلي قانون بقاي جرم، به نام معادله هاي پيوستگي حاصل مي شود که تغييرات چگالي را نسبت به متغيرهاي مکان و زمان تعيين مي کند.**

مختصات كارتزين

- جز حجم، مكعب مستطيل به ابعاد dx, dy, dz است كه نرخ شارهاي ورودي و خروجي جرم، عمود بر سطوح آن مشخص شده است. همواره جهت هاي ورودي و خروجي در جز حجم براساس جهت هاي x, y, z مشخص مي شود.



شكل (4-4) جز حجم در مختصات كارتزين براي موازنه جرم

- تفاوت نرخ ورودي و خروجي جرم در سه جهت فضايي مختلف مطابق روابط زير نوشته مي شوند:

- **در جهت x** $(\rho u_x A)_x - (\rho u_x A)_{x+dx}$
- **در جهت y** $(\rho u_y S)_y - (\rho u_y S)_{y+dy}$
- **در جهت z** $(\rho u_z W)_z - (\rho u_z W)_{z+dz}$

- A سطح مقطع جز حجم عمود بر امتداد x و S سطح مقطع جز حجم عمود بر امتداد y و W سطح مقطع جز حجم عمود بر امتداد z هستند.
- براي تعيين تابع f_{x+dx} مي توان از بسط سري تايلر در حوالي نقطه x كمك گرفت، مطابق رابطه زير:

$$f_{x+dx} = f_x + \frac{\partial f_x}{\partial x}dx + \frac{\partial^2 f_x}{\partial x^2}\frac{(dx)^2}{2!} + ...$$

(1-4)

- به علت كوچكي dx مي توان ازعبارت آخر به بعد صرف نظر كرد.
- در اين صورت، نرخ جرم خروجي از جز حجم در مكان (x+dx) به صورت زير نوشته مي شود:

$$(\rho uA)_{x+dx} = (\rho uA)_x + \frac{\partial(\rho uA)_x}{\partial x}dx$$

(2-4)

- معادله (2) را مي توان براي هر سه جهت فضايي z, y, x اعمال كرد كه پس از تفاضل نرخ جرم خروجي از ورودي، نتايج زير بدست خواهد آمد:

- **در جهت x** $\quad -\frac{\partial(\rho u_x A)_x}{\partial x}dx$
- **در جهت y** $\quad -\frac{\partial(\rho u_y A)_y}{\partial x}dy$
- **در جهت z** $\quad -\frac{\partial(\rho u_z A)_z}{\partial x}dz$

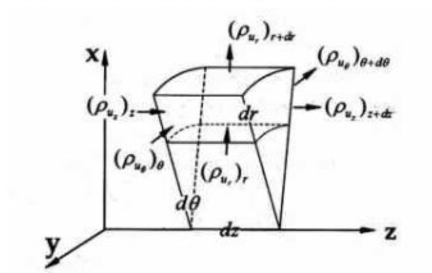
- در فرمول هاي بالا، $W_z=dxdy, S_y=dxdz, A_x=dydz$ است.
- عبارت تجمع در جز حجم نيز نوشته مي شود:
- تجمع جرم: $\frac{\partial}{\partial t}(m)=\frac{\partial}{\partial t}(\rho.dx.dy.dz)$
- بنابراين با جاي گذاري هريک از عبارت هاي معادله در موازنه جرم و با حذف dx, dy, dz رابطه (3) حاصل مي شود.

$$\frac{\partial(\rho)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z}=0 \qquad (3\text{-}4)$$

- معادله (3)، معادله پيوستگي در مختصات كارتزين است.

مختصات استوانه اي

- جز حجم درمختصات استوانه اي حجمي به ابعاد $rd\theta, dz, dr$ است.



- براي نوشتن قانون بقاي جرم، تفاضل نرخ جرم هاي ورودي و خروجي، در جزء حجم استوانه اي نوشته مي شود.

- **در جهت r** $\quad (\rho u_r A)_r-(\rho u_r A)_{r+dr}$
- **در جهت z** $\quad (\rho u_z S)_z-(\rho u_z S)_{z+dz}$
- **در جهت θ** $\quad (\rho u_\theta W)_\theta-(\rho u_\theta W)_{\theta+d\theta}$

- سطح مقطع A (سطح عمود بر امتداد r) درناحيه r با ناحيه r+dr يكسان نيست، در صورتي كه سطح مقطع S نسبت به z و سطح مقطع W نسبت به θ ثابت است به

$$A_r = rd\theta\, dz \quad A_{r+dr} = (r+dr)d\theta\, dz \quad W_\theta = W_{\theta+d\theta} = dzdr \quad S_z = S_{z+dz} = rd\theta\, dr$$

- بنابراين بايد توجه داشت در مختصات استوانه اي بر خلاف مختصات كارتزين، A تابع r است.
- با كمک بسط سري تيلور نتيجه تفاضل خروجي ها از ورودي ها در هر جهت به دست مي آيد:

- **در جهت r** $-\dfrac{\partial(\rho u_r A)_r}{\partial r}dr$
- **در جهت z** $-\dfrac{\partial(\rho u_z A)_z}{\partial z}dz$
- **در جهت θ** $-\dfrac{\partial(\rho u_\theta A)_\theta}{\partial \theta}d\theta$

- تجمع جرم در داخل جز حجم به شكل زير جايگزين مي شود.

$$\frac{\partial(m)}{\partial t} = \frac{\partial(\rho rd\theta dzdr)}{\partial t}$$

- تجمع جرم:
- A_r , S_z , W_e ، برحسب رابطه هاي موجود جايگزين مي شوند و پس از جايگزين كردن كليه عبارت ها در م

$$-\frac{\partial(\rho u_r rd\theta dz)}{\partial r}dr - \frac{\partial(\rho u_z rd\theta dr)}{\partial z}dz - \frac{\partial(\rho u_\theta drdz)}{\partial \theta}d\theta = \frac{\partial(\rho rd\theta dzdr)}{\partial t}$$

- با حذف dθdrdz از طرفين معادله و تقسيم بر r معادله پيوستگي در مختصات اس

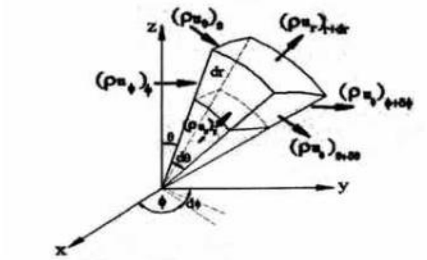
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial(\rho u_r r)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial(\rho u_\theta)}{\partial \theta} = 0$$

(4-4)

- معادله (4)، معادله پيوستگي در مختصات استوانه اي

مختصات کروي

- جز حجم کروي حجمي به ابعاد r sinθdφ, rdθ, dr است.



شکل (4-6) جزء حجم در مختصات کروي براي موازنه جرم

- براي بدست آوردن معادله پيوستگي در مختصات کروي، موازنه جرم را مي نويسيم.
  - در جهت r $\quad (\rho u_r A)_r - (\rho u_r A)_{r+dr}$
  - در جهت θ $\quad (\rho u_\theta S)_\theta - (\rho u_\theta S)_{\theta+d\theta}$
  - در جهت φ $\quad (\rho u_\varphi W)_\varphi - (\rho u_\varphi W)_{\varphi+d\varphi}$

- سطح هاي عمود بر مسير جريان يعني A_r , S_θ , W_φ از رابطه هاي زير بديت مي آيند:

$$A_r = r^2 \sin\theta \, d\varphi \, d\theta \qquad S_\theta = r\sin\theta \, d\varphi \, dr \qquad W_\varphi = rd\theta \, dr$$

- دراين جز حجم نيز سطح مقطع عمود بر امتداد شعاع کره ثابت نيست:

$$A_{r+dr} = (r+dr)^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

- با استفاده از بسط سري تيلور براي کميت هاي خروجي از جزء حجم، نتيجه تفاضل خروجي ها از ورودي ها چنين خواهد شد:
  - در جهت r $\quad -\frac{\partial(\rho u_r A)_r}{\partial r} dr$
  - در جهت θ $\quad -\frac{\partial(\rho u_\theta S)_\theta}{\partial \theta} d\theta$
  - در جهت φ $\quad -\frac{\partial(\rho u_\varphi W)_\varphi}{\partial \varphi} d\varphi$

- عبارت تجمع جرم در داخل جز حجم نیز به صورت زیر بدست مي آيد:
- تجمع جرم: $\frac{\partial(m)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}(\rho r^2 \sin\theta\ d\varphi\ d\theta\ dr)$
- با جاي گذاري روابط بالا در معادله موازنه جرم و نيز جاي گذاري W_φ , S_θ , A_r معادله زير بدست مي آيد

$$-\frac{\partial(\rho u_r r^2 \sin\theta)}{\partial r}d\varphi d\theta dr-\frac{\partial(\rho u_\theta r\sin\theta)}{\partial\theta}d\varphi d\theta dr-\frac{\partial(\rho u_\varphi r)}{\partial\varphi}d\varphi d\theta dr=\frac{\partial(\rho r^2)\sin\theta}{\partial t}d\varphi d\theta dr$$

$r^2\sin\theta\ d\varphi\ d\theta\ dr$

- پس از تقسيم معادله بالا برعبارت ت
معادله پيوستگي

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial(\rho r^2 u_r)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\rho u_\theta \sin\theta)}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\rho u\varphi)}{\partial\varphi}=0$$

(5-4)

معادله پيوستگي در سيستم هاي سه گانه دستگاه مختصات

مختصات كارتزين
$\frac{\partial(\rho)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z}=0$
مختصات استوانه اي
$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial(\rho u_r r)}{\partial r}+\frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial(\rho u_\theta)}{\partial\theta}=0$
مختصات كروي
$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial(\rho r^2 u_r)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\rho u_\theta\sin\theta)}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\rho u\varphi)}{\partial\varphi}=0$

- در معادله هاي پيوستگي تابع هاي چگالي (ρ) و سرعت حركت در جهت هاي سه گانه (u_x ,u_y , u_z) مجهول هستند. بنابراين بايد از معادله هاي حركت نيز استفاده شود كه با حل همزمان معادله پيوستگي و معادله هاي حركت توابع مجهول بدست مي آيند.

- از طرفي با توجه به شرايط مسئله مي توان در برخي موارد از فرض هاي ساده كننده بهره برد و معادله هاي پيچيده حاصل را ساده تر كرد. براي مثال اگر سيستم مورد مطالعه يک سيال تراكم ناپذير باشد، با توجه به ثابت بودن چگالي سيال، معادله پيوستگي ساده تر مي شود.

معادله پيوستگي در سيستم هاي سه گانه دستگاه مختصات (ثابت = ρ)

مختصات كارتزين $\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0$
مختصات استوانه اي $\frac{1}{r}\frac{\partial (ru_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial (u_\theta)}{\partial \theta}+\frac{\partial (u_z)}{\partial z}=0$
مختصات كروي $\frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2u_r)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial (u_\theta \sin\theta)}{\partial \theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial (u\varphi)}{\partial \varphi}=0$

- چنانچه در يک سيال تراكم ناپذير سرعت حركت سيال فقط در يک بعد اهميت داشته باشد و در ابعاد ديگر ناچيز باشد، معادله پيوستگي بسيار ساده مي شود، به طوري كه در مختصات كارتزين نتيجه زير بدست مي آيد:

$$u_x \neq 0,\ u_y \cong 0,\ u_z \cong 0$$

- بنابراين از معادله (6) نتيجه مي شود كه سرعت سيال در جهت x ثابت است.

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}=0,\ \Rightarrow u_x = \text{ثابت}$$

- اگر سيال تراكم پذير باشد، با داشتن تابعيت سرعت حركت، از معادله پيوستگي مي توان براي تعيين تغييرات چگالي سيال استفاده كرد، يا با داشتن تابعيت چگالي مي توان براي تعيين تغييرات سرعت سيال از آن كمک گرفت.

فرمول بندي جزء مولي

- در فرمول بندي جزجرمي يا مولي، معادله هاي پيوستگي جزيي، همراه با عبارت هاي مصرف و توليد و نفوذ ماده i نوشته مي شوند. در اينجا شار انتقال مول هاي جزء i با N_i نشان داده مي شود كه اين انتقال شامل حركت كلي سيال و نفوذ ماده i است كه به صورت زير فرمول بندي مي شود:

$$N_i = C_i u + J_i$$

- u سرعت متوسط سيال است كه جهت آن به جهت N_i بستگي دارد.
- اگر جز i به وسيله يک واکنش، مصرف يا توليد شود، سرعت واکنش نيز به فرمول بندي افزوده مي شود. (براي مصرف $i : R_i < 0$ و براي توليد $i : R_i > 0$) معادله سرعت واکنش، وابسته به دما و غلظت اجزا واکنش دهنده است، بنابراين:

$$-R_i = f(C_i, C_j, ..., T)$$

- فرمول موازنه مولي ماده i در جز حجم به صورت زير نوشته مي شود:

تجمع (i) = نرخ توليد (i) + نرخ مولي خروجي (i) – نرخ مولي ورودي (i)

مختصات كارتزين

- در يک جز حجم مکعبي شکل، به ابعاد dx, dy, dz روابط زير حاصل مي شود.

- **در جهت x** $N_{ix}A\big|_x - N_{ix}A\big|_{x+dx}$
- **در جهت y** $N_{iy}S\big|_y - N_{iy}S\big|_{y+dy}$
- **در جهت z** $N_{iz}W\big|_z - N_{iz}W\big|_{z+dz}$
- **نرخ توليد جزء i** $R_i V$
- **تجمع جزء i** $\dfrac{\partial (C_i V)}{\partial t}$

- با جاي گذاري عبارت هاي بالا در معادله موازنه جرم و مرتب كردن آن رابطه زير بدست مي آيد.

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} + \frac{\partial N_{ix}}{\partial x} + \frac{\partial N_{iy}}{\partial y} + \frac{\partial N_{iz}}{\partial z} = 0$$

• به همين ترتيب مي توان براي دستگاه هاي مختصات ديگر عمل كرد.

معادله هاي پيوستگي جز i در دستگاه مختصات سه گانه

مختصات كرتزين (18-4) $\frac{\partial C_i}{\partial t}+\frac{\partial N_{ix}}{\partial x}+\frac{\partial N_{iy}}{\partial y}+\frac{\partial N_{iz}}{\partial z}-R_i=0$
مختصات استوانه اي (19-4) $\frac{\partial C_i}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rN_{ir})+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(N_{i\theta})+\frac{\partial N_{iz}}{\partial z}-R_i=0$
مختصات كروي (20-4) $\frac{\partial C_i}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r^2N_{ir})+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(N_{i\theta}\sin\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial N_{i\varphi}}{\partial \varphi}-R_i=0$

• اگر به جاي N_i مجموع شارهاي انتقال جرم در اثر جريان كلي و نفوذ i جايگزين شود و براي عبارت نفوذ از قانون فيک استفاده گردد، روابط زير به ترتيب بدست مي آيند:

$$N_{ix}=C_iu_x+J_{ix}$$

- **شار انتقال جرم در جهت x**

$$J_{ix}=-D_{iM}\frac{\partial C_i}{\partial x}$$

- **شار نفوذ جز i در جهت x**

• D_{iM} ضريب نفوذ مولكولي i در مخلوط سيال است. در اين صورت مشتق N_i در جهت x به صورت رابطه زير خواهد بود

$$\frac{\partial N_{ix}}{\partial x}=\frac{\partial (C_iu_i)}{\partial x}+\frac{\partial (J_{ix})}{\partial x}=u_x\frac{\partial C_i}{\partial x}+C_i\frac{\partial u_x}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}(D_{iM}\frac{\partial C_i}{\partial x})$$

(21-4)

• شار انتقال در دو جهت y و z نيز به همين ترتيب

سيال تراكم نايذير با ضريب نفوذ مولكولي ثابت

- در مختصات كارتزين با اعمال فرض چگالي ثابت، معادله پيوستگي به صورت معادله (6) بدست مي آيد.

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0$$

- از طرفي با اعمال فرض ثابت بودن ضريب نفوذ مولكولي، معادله (21) به شكل زير تبديل مي شود:

$$\frac{\partial N_{ix}}{\partial x}=u_x\frac{\partial C_i}{\partial x}+C_i\frac{\partial u_x}{\partial x}-D_{iM}\frac{\partial^2 C_i}{\partial x^2} \qquad (22\text{-}4)$$

- با تعميم رابطه (22) براي جهت هاي ديگر (y و z) و با اعمال معادله هاي (6) و (22) در معادله (18)، رابطه زير بدست مي آيد:

$$\frac{\partial C_i}{\partial t}+(u_x\frac{\partial C_i}{\partial x}+u_y\frac{\partial C_i}{\partial y}+u_z\frac{\partial C_i}{\partial z})=D_{iM}(\frac{\partial^2 C_i}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 C_i}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 C_i}{\partial z^2})+R_i \qquad (23\text{-}4)$$

- معادله (23) معادله پيوستگي جز i در مختصات كارتزين براي سيال تراكم نابذير وضريب نفوذ ثابت است.

معادله هاي پيوستگي جز i در دستگاه مختصات سه گانه (ρ , D_{iM} = ثابت)

مختصات كرتزين (23-4)

$$\frac{\partial C_i}{\partial t}+(u_x\frac{\partial C_i}{\partial x}+u_y\frac{\partial C_i}{\partial y}+u_z\frac{\partial C_i}{\partial z})=D_{iM}(\frac{\partial^2 C_i}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 C_i}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 C_i}{\partial z^2})+R_i$$

مختصات استوانه اي (24-4)

$$\frac{\partial C_i}{\partial t}+(ur\frac{\partial C_i}{\partial r}+u\theta\frac{1}{r}\frac{\partial C_i}{\partial \theta}+uz\frac{\partial C_i}{\partial z})=D_{iM}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial C_i}{\partial r})+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 C_i}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 C_i}{\partial z^2}\right]+R_i$$

مختصات كروي (25-4)

$$\frac{\partial C_i}{\partial t}+(ur\frac{\partial C_i}{\partial r}+u\theta\frac{1}{r}\frac{\partial C_i}{\partial \theta}+u\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial C_i}{\partial \varphi})=$$

$$D_{iM}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial C_i}{\partial r})+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\frac{\partial C_i}{\partial \theta})+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial C_i}{\partial \varphi^2}\right]+R_i$$

سيستم هاي نفوذي

- در معادله هاي پيوستگي جزيي بايد فرض هاي درستي از كيفيت جريان كلي سيال وجود داشته باشد تا بتوان شار انتقال جرم جز (N_i) را در جهت هاي سه گانه با رابطه هاي مناسب جايگزين كرد. به همين دليل در اين بخش برخي از فرض هاي حاكم درسيستم هاي واقعي مورد توجه قرار مي گيرد. چنانچه قبلا ملاحظه شد، شار انتقال جرم جز i در هر جهت فضايي شامل دوعبارت جريان كلي و جريان نفوذي مي باشد.

$$N_i = C_i u + J_i \qquad (26\text{-}4)$$

- u عبارت است از سرعت حركت كلي سيال در جهت و امتداد حركت.

- با توجه به سيستم هاي واقعي موجود، شرايط مختلفي بر فيزيک مسئله وارد است كه در دو حالت مختلف طبقه بندي مي شوند:
- **حالت اول-** سرعت حركت كلي سيال صفر است($u = 0$). در اين صورت شار انتقال جرم برابر با شار نفوذ مي باشد.

$$N_i = J_i \qquad (27\text{-}4)$$

- اين فرض در شرايط زير برقرار مي شود:

- **سيال كاملا ساكن باشد.**
- **نفوذ درفاز جامد (با واكنش يا بدون واكنش) انجام شود.**
- **نفوذ دو طرفه با تعداد مول هاي مساوي انجام شود.**
- **نفوذ در فاز مايع همراه با واكنش رخ دهد**

- **حالت دوم -** سرعت حرکت کلي سيال غير صفر باشد. $(u \neq 0)$

دراين صورت شار انتقال جرم برابر با شار نفوذ مي باشد.

- اين فرض در شرايط زير برقرار مي شود:

- **سيال داراي حرکت اجباري است و نفوذ در مقابل سرعت حرکت کلي سيال ناچيز است. در اين صورت:** $N_i = C_i u$

(28-4)

- **سيال فاقد حرکت اجباري است، اما در اثر عواملي مانند نفوذ يک طرفه يا دو طرفه با مول هاي نابرابر داراي حرکت مي شود. در اين حالت براي تعيين سرعت حرکت کلي سيال مي توان از روابط ... استفاده کرد.**

$$u = \frac{C_i u_i + C_j u_j + ... + C_n u_n}{(C_i + C_j + ... + C_n)}$$

(29-4)

- با توجه به تعريف N_i ، همواره شار انتقال جرم جز i عبارت است از حاصل ضرب سرعت حرکت جز i در غلظت آن. يعني:

$$N_i = C_i u_i$$

(30-4)

- به اين ترتيب با جايگزين کردن معادله (30) در معادله (29) نتيجه مي شود:

$$u = \frac{N_i + N_j + ... + N_n}{C_{total}}$$

(31-4)

- C_{total} مجموع غلظت اجزاست. با جاي گذاري معادله (26)، معادله شار انتقال جرم براساس تعريف سرعت حرکت متوسط سيال به دست مي آيد.

$$N_i = (N_i + N_j + ...)\frac{C_i}{C_{total}} + J_i$$

(32-4)

- در این حالت رابطه براي N_i برحسب شار انتقال جرم دیگر اجزا (N_i) به دست آمده که مي تواند در معادله پیوستگي به کار برده شود.
- از آنجا که سرعت جریان کلي و نفوذ در جهت هاي سه گانه فضایي وجود دارد، بنابراین باید معادله (32) درهر سه جهت فضایي لحاظ شود و در معادله پیوستگي جایگزین گردد.

قانون بقاي انرژي

- از فرمول بندي انرژي حرارتي، معادله حرارت به دست مي آید که در مدل سازي دیفرانسیلي برحسب متغیرهاي مکان و زمان نوشته مي شود و در نهایت تغییرات دما به دست مي آید.
- چنانچه مدل سازي حرارت در سیالات انجام شود، به دلیل اصطکاک بین لایه هاي متحرک، انتقال حرارت رخ مي دهد، بنابراین باید حرارت ناشي از اصطکاک نیز در نظر گرفته شود. در این بخش براي ساده سازي و عدم دخالت عبارت تنش در مدل دما، فرمول بندي حرارت باید با صرف نظر کردن از انرژي حاصل از اصطکاک انجام شود.
- براي فرمول بندي حرارت، نرخ حرارت ورودي و خروجي در اثر حرکت کلي و نفوذ، تولید یا مصرف و تجمع حرارت در جزحجم نوشته شده، سپس در معادله موازنه انرژي مطابق فرمول زیر جاي گذاري مي شود:

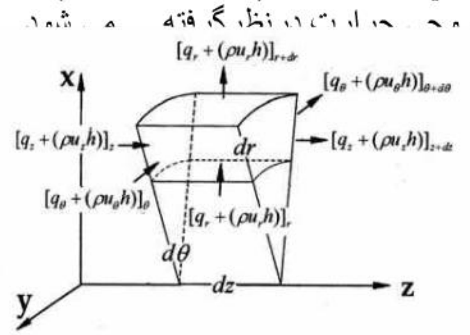
تجمع حرارت = (حرارت تولیدي)+ در اثر کلي و نفوذي(نرخ حرارت خروجي- نرخ حرارت ورودي)

- اگر در يک فرايند، حرارت مبادله شده در مصرف جز i، در يک واکنش شيميايي باشد، عبارت توليد (يا مصرف) انرژي حرارتي به صورت زير مي باشد:

نرخ حجمي توليد (يا مصرف) گرما در اثر واکنش $(-R_i)(-\Delta H_i)$

- R_i سرعت مصرف ماده i و ΔH_i آنتالپي واکنش براي مصرف يک مول ماده i است.
- در صورتي که واکنش گرماده باشد، اين عبارت در موازنه انرژي به صورت گرماي توليدي (با علامت مثبت) و اگر واکنش گرماگير باشد، اين عبارت به صورت گرماي مصرفي (با علامت منفي) به کار مي رود.
- اگر در يک سيستم، حرارت به وسيله يک سيم پيچ حرارتي توليد شود، معمولا نرخ حجمي q''' حرارت توليدي با مشخص مي شود که مقدار آن بر اساس اطلاعات سيستم توليد کننده حرارت مشخص مي گردد.

- فرمول بندي حرارت را نيز مي توان دردستگاه مختصات سه گانه کارتزين، استوانه اي يا کروي انجام داد. در اين بخش براي آشنايي بيشتر با فرمول بندي در مختصات استوانه اي، معادله زير در اين سيستم مورد توجه قرار مي گيرد. به اين منظور، مطابق شکل (4-12) جز حجمي به ابعاد (dr , rdθ , dz) همراه با شارهاي ورودي و خروجي حرارت در نظر گرفته مي شود.



شکل (4-12) موازنه حرارت در جزء حجم استوانه اي

- حرارت به دو صورت نفوذ و حركت كلي منتقل مي شود. شار نفوذ حرارت با q و شار انتقال حرارت كلي با (ρuh) نشان داده شده است. h آنتالپي در واحد جرم و ρu شار انتقال جرم است.
- سيال در حال حركت آنتالپي خود را منتقل مي كند. آنتالپي ($h = c_p T$) به دما و گرماي ويژه (در فشار ثابت) بستگي دارد( ). فرمول هاي زير براي حرارت هاي ورودي و خروجي از جز حجم در جهت هاي سه گانه نوشته مي شوند كه پس از اعمال بسط سري تيلور، تفاضل ورودي از خروجي مشخص شده است.

در اثر كلي : (نرخ حرارت

- در جهت z

$$(\rho u_z c_p TA)_z - (\rho u_z c_p TA)_{z+dz} = -\frac{\partial(\rho u_z c_p TA)_z dz}{\partial z}$$

- در جهت r

$$(\rho u_r c_p TA)_r - (\rho u_r c_p TA)_{r+dr} = -\frac{\partial(\rho u_r c_p TA)_r dr}{\partial r}$$

$$(\rho u_\theta c_p TA)_\theta - (\rho u_\theta c_p TA)_{\theta+d\theta} = -\frac{\partial(\rho u_\theta c_p TA)_\theta dz}{\partial \theta}$$

- مولكول ها و ذرات ماده، در اثر تماس با يكديگر، حرارت خود را به صورت هدايت منتقل مي كنند كه به عنوان عبارت نفوذ حرارت در نظر گرفته مي شود و در جهت هاي سه گانه براي جز حجم به صورت زير نوشته مي شود:

- در اثر نفوذ: (نرخ حرارت ورودي)
- در جهت z

$$(q_z A)_z - (q_z A)_{z+dz} = -\frac{\partial(q_z A)}{\partial z} dz$$

- در جهت r

$$(q_r S)_r - (q_r S)_{r+dr} = -\frac{\partial(q_r S)}{\partial r} dr$$

- در جهت θ

$$(q_\theta W)_\theta - (q_\theta W)_{\theta+d\theta} = -\frac{\partial(q_\theta W)}{\partial \theta} d\theta$$

- q_θ, q_r, q_z شار انتقال حرارت در اثر نفوذ است كه در اثر تماس مولكول ها و به صورت هدايت حرارتي

• به کمک قانون ویژه فوریه مي توان مقدار این حرارت را به گرادیان دما ارتباط داد. به صورت زیر:

- در جهت z $\quad q_z = -K_z \frac{\partial T}{\partial z}$
- در جهت r $\quad q_r = -K_r \frac{\partial T}{\partial r}$
- در جهت θ $\quad q_\theta = -K_\theta \frac{\partial T}{\partial \theta}$

q_θ, q_r, q_z

• براساس شكل (12) اين سطوح در نواحي به صورت زير جايگزين مي شود:

$A_z = rd\theta\, dr \qquad S_r = rd\theta\, dz \qquad W_\theta = dz\, dr$

• چنانچه نرخ حجمي توليد حرارت u''' و حجم جز حجم نيز V باشد:

- نرخ حرارت توليدي: $(u'''V)$

• عبارت تجمع انرژي حرارتي در جز حجم نيز به صورت زير نوشته مي شود:

- تجمع حرارت توليدي: $\frac{\partial}{\partial t}(Um) = \frac{\partial}{\partial t}(\rho c_v TV)$

• U انرژي داخلي جز حجم در واحد جرم است كه به دما و گرماي ويژه (در حجم ثابت) بستگي دارد $(U \cong c_v T)$. m جرم و V حجم جز حجم است كه از رابطه زير به دست مي آيد:

$V = rd\theta\, dz\, dr$

• با جاي گذاري عبارات بدست آمده در معادله موازنه انرژي، فرمول بندي زير حاصل مي شود:

$$-\frac{\partial(\rho u_z c_P T)}{\partial z} rd\theta drdz - -\frac{\partial(\rho u_r c_P Tr)}{\partial r} d\theta dzdr - \frac{\partial(\rho u_\theta c_P T)}{\partial \theta} dzdrd\theta$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}(K_z \frac{\partial T}{\partial z}) rd\theta drdz + \frac{\partial}{\partial r}(K_r \frac{\partial T}{\partial z} r) d\theta dzdr + \frac{\partial}{\partial \theta}(K_\theta \frac{\partial T}{\partial \theta}) d\theta dzdr$$

$$+ u''' rd\theta dzdr = \frac{\partial}{\partial t}(\rho c_\upsilon T) rd\theta dzdr$$

• با حذف (rdθdzdr) از طرفين و با شرط تساوي ضرايب حرارتي در جهت هاي مختلف ($K_z=K_\theta=K_r=K$) نتيجه مي

$$\frac{\partial(\rho c_V T)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_z c_P T)}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial(r\rho u_r c_P T)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(\rho u_\theta c_P T)}{\partial \theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(Kr\frac{\partial T}{\partial r})$$

$$+\frac{1}{\mathrm{r}}\frac{\partial}{\partial \theta}(K\frac{\partial T}{\partial \theta}) + \frac{\partial}{\partial z}(K\frac{\partial T}{\partial z}) + u'''$$

• چنانچه سيستم مورد مطالعه يک ماده تراکم ناپذير باشد، با فرض ثابت بودن ضريب هدايت حرارتي و گرماي ويژه مي توان معادله (72) را ساده تر کرد. درااين صورت فرض هاي ... ار برد:

$c_P = c_V = c =$ **ثابت** $\quad K, \rho =$ **ثابت**

• در اين حالت با استفاده از معادله پيوستگي و سپس تقسيم طرفين معادله بر ، معادله زير

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_z\frac{\partial T}{\partial z} + u_r\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{K}{\rho c}\left[\frac{\partial^2 T}{\partial^2 z} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial T}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial^2 \theta}\right] + \frac{u'''}{\rho c}$$

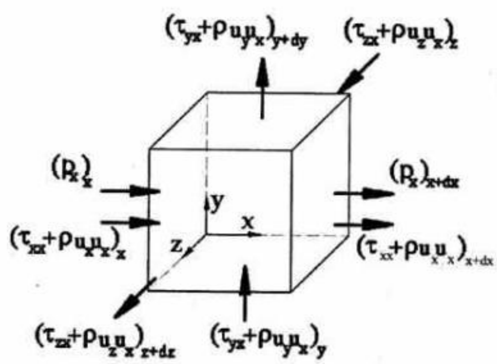
معادله هاي حرارت در مختصات سه گانه (ثابت = k,ρ,c)

مختصات کارتزين (4-73) $$\frac{\partial T}{\partial t}+u_x\frac{\partial T}{\partial x}+u_y\frac{\partial T}{\partial y}+u_z\frac{\partial T}{\partial z}=\frac{K}{\rho c}\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right]+\frac{u'''}{\rho c}$$
مختصات استوانه اي (4-74) $$\frac{\partial T}{\partial t}+u_z\frac{\partial T}{\partial z}+u_r\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta}=\frac{K}{\rho c}\left[\frac{\partial^2 T}{\partial^2 z}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial T}{\partial r})+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial^2 \theta}\right]+\frac{u'''}{\rho c}$$
مختصات کروي (4-75) $$\frac{\partial T}{\partial t}+u_r\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{u_r}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta}+\frac{u_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial T}{\partial \phi}=$$ $$\frac{K}{\rho c}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial T}{\partial r})+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta^2}(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial \theta^2})+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2}\right]+\frac{u'''}{\rho c}$$

قانون بقاي اندازه حرکت

- اندازه حرکت (مومنتوم) برخلاف جرم و انرژي، يک کميت برداري است و در فرمول بندي، علاوه بر مقدار، بايد جهت و امتداد آن مورد توجه قرار گيرد.
- نرخ اندازه حرکت، نيرو است. بنابراين در اين مدل سازي، موازنه نيروها انجام مي شود. در اين بخش، فرمول بندي اندازه حرکت در مختصات کارتزين بررسي مي شود.
- با توجه به جهت هاي سه گانه مختصات، سرعت داراي سه مؤلفه u_x ، u_y و u_z است که پس از فرمول بندي، سه معادله حرکت حاصل مي شود. اين سه معادله، وابسته به يکديگرند و بايد به طور همزمان حل شوند تا تغييرات مومنتوم در جهت هاي سه گانه تعيين گردد. همراه با معادله هاي حرکت، لازم است معادله پيوستگي نيز تحليل شود، زيرا اندازه حرکت تابع دو متغير سرعت و چگالي مي باشد

- درایـن بحـث فرمـول بنـدي مومنتـوم بـراي سـيال نيـوتني مطرح مي شود. مؤلفه مومنتوم تابع جهت هـاي x ، y و z است.
- براي جلوگيري از طـولاني شـدن مراحـل فرمـول بنـدي، ابتدا موازنـه مومنتـوم درامتـداد محـور x نوشـته مـي شـود تـا در نـهايـت معادلـه ديفرانـسيلي تغييـرات u_x نـسبت بـه مكـان و زمـان بـه دسـت آيـد، سـپس بـه تـشابه، دو معادلـه ديگر براي u_y و u_z نيز نوشته مي شود.



- جز حجمي به ابعاد (dx, dy, dz) را مطابق شـكل در نظـر بگيريـد. در ايـن شـكل، شـارهاي مومنتـوم در اثـر حركـت كلـي سـيال، در اثـر نفوذ ممنتوم (تنش هـاي برشـي و نرمـال) و فشـار هيدروسـتاتيكي در امتداد محـور x نشان داده شده است.

- بـه طـور كلـي معادلـه موازنـه ممنتـوم در ايـن جـز حجـم در امتداد يک محور مشخص عبارت است از:
- تجمع ممنتوم =

(نرخ مومنتوم خروجي – نرخ مومنتوم ورودي) (در اثر تنش هاي برشي و نرمال + حركت كلي سيال)
+ نيروي وزني

- به منظور نوشتن تغييرات مومنتوم در اثر حركت كلـي سيال بايد دانست كه انتقال جرم در جهت هاي سه گانـه x ، y و z وجود دارد. ولـي در تعيين شـار مومنتـوم در امتداد محـور x فقط مؤلفه (u_x) در نظر گرفته مي شود. بنابراين:

(نرخ مومنتوم خروجي _ نرخ مومنتوم ورودي) (در اثر حركت كلي سيال)

- **انتقال مومنتوم در جهت x** $((\rho u_x A)u_x)_x - ((\rho u_x A)u_x)_{x+dx} = -\frac{\partial}{\partial x}[(\rho u_x A)u_x]dx$
- **انتقال مومنتوم در جهت y** $((\rho u_y S)u_y)_y - ((\rho u_y S)u_y)_{y+dy} = -\frac{\partial}{\partial y}[(\rho u_y S)u_y]dy$
- **انتقال مومنتوم در جهت z** $((\rho u_z W)u_x)_z - ((\rho u_z W)u_x)_{z+dz} = -\frac{\partial}{\partial z}[(\rho u_z W)u_x]dz$

- نفوذ مومنتوم، در اثر تنش هـاي نرمـال و تنش هـاي برشـي ايجـاد مـي شود.
- از آنجا كه تنش يک تنسور است، بايد هم امتداد نيرو و هم سطحي كه بر آن نيرو اعمال مي شود، مشخص باشد.
- تنش نرمال، عبارت از فشاري است كه به صورت عمود برسطح جز حجم وارد مي شود.
- تنش برشي، فشاري است كه بر اثر اصطكاک لايه ها به وجود مي آيد و مماس برسطح جزحجم وارد مي شود.
- تنش هاي نرمال خود شامل فشار هيدروستاتيكي و تنش عمودي است. فشار هيدروستاتيكي همـان فشار ناشـي از ارتفـاع سيال اسـت و تـنش عمودي فشاري است كه در اثر اصطكاک در مسير حركت بـه وجود مي آيد.

معرفي تنش هاي نرمال و برشي در جهت هاي سه گانه

تنش نرمال (normal stress)	فشار هيدروستاتيكي (P_z, P_y, P_x)
	تنش عمودي $(\tau_{zz}, \tau_{yy}, \tau_{xx})$
تنش برشي (shear stress)	$(\tau_{zx}$ يا $\tau_{xz}), (\tau_{zy}$ يا $\tau_{yz}), (\tau_{xy}$ يا $\tau_{yx})$

- منظور از τ_{zx} تنشي است كه در آن نيرو و سرعت حركت در امتداد محور x است، ولي تغييرات نيرو يا سرعت در جهت z رخ مي دهد.
- تنش هاي τ_{zx} و τ_{yx} تنش هاي برشي اند كه بر سطح مماس بر مسير حركت وارد مي شوند و در واقع نيرو هاي اصطكاكي هستند كه موجب كند شدن حركت مي شوند.
- τ_{xx} يعني تنشي كه در آن هم امتداد نيرو و هم تغيير نيرو در جهت x اعمال مي شود.
- با توجه به اينكه در اين فرمول بندي فقط تصوير نيرو ها در جهت x لحاظ مي شوند، بنابراين تغييرات u_x مورد توجه است.

- در اين حالت نيرو هاي وارد بر جز حجم در اثر تنش هاي عمودي و برشي در جهت x تصوير مي شوند.

(نرخ مومنتوم خروجي _ نرخ مومنتوم ورودي) در اثر تنش عمودي + برشي

- در اثر تنش عمودي به دليل تغ...

$$(\tau_{xx} A)_x - (\tau_{xx} A)_{x+dx} = -\frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xx} A)dx$$

- در اثر تنش برشي به دليل تغي...

$$(\tau_{yx} S)_y - (\tau_{yx} S)_{y+dy} = -\frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yx} A)dy$$

- در اثر تنش عمودي به دليل تغ...

$$(\tau_{zx} W)_z - (\tau_{zx} W)_{z+dz} = -\frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zx} W)dz$$

- τ_{xx} تنشي است كه بر سطح عمود بر مسير حركت وارد مي شود و اين فشار بر سطح (dzdy) وارد مي گردد. τ_{xx} در دو ناحيه x و $x+dx$ و در جهت مخالف به جز حجم وارد مي شود. هنگام ورود سيال، علامت τ_{xx} مثبت و هنگام خروج از جز حجم، علامت آن منفي است، زيرا نيروي اعمال شده هنگام خروج سيال در خلاف جهت حركت به جز حجم وارد مي شود.

- فشار هيدروستاتيكي شامل مؤلفه هاي (P_z, P_y, P_x) است. با توجه به اينكه تصوير نيرو ها بايد در جهت x نوشته شود، بنابراين فقط مؤلفه P_x باقي مي ماند.
- نيروي فشاري هنگام ورود به جز حجم، در جهت حركت و مثبت است، اما هنگام خروج از جز حجم، در خلاف جهت حركت با علامت منفي اعمال مي شود. بنابراين:

(نيروي فشار هيدروستاتيكى خروجى _ نيروي فشار هيدروستاتيكي ورودي)

$$\left(P_x A\right)_x - \left(P_x A\right)_{x+dx} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(P_x A\right)dx$$

- علاوه بر نيرو هاي تنشي و نيرو هاي حاصل از حركت كلي سيال، نيروي وزني نيز مطرح است كه به علت نيروي جاذبه زمين ايجاد مي شود.

- **در امتدا محور x** $\quad mg_x = \rho g_x V$

- V حجم جز حجم و g_x مؤلفه شتاب جاذبه در جهت x است.
- همچنين لازم است تغييرات مومنتوم در اثر تجمع در جز حجم در جهت x تصوير شود.

- **در امتدا محور x** $\quad \frac{\partial}{\partial t}(mu_x) = \frac{\partial}{\partial t}(\rho u_x V)$

- مقادير V, W_z, S_y, A_x كه در هر قسمت آمده است با روابط زير مشخص مي شود.

$$A_x = dzdy \qquad S_y = dzdx \qquad W_z = dxdy \qquad V = dxdydz$$

- با جاي گذاري عبارات معرفي شده در معادله موازنه شده مومنتوم و با كمک بسط سري تيلور و ساده كردن عبارت ها، معادله زير براي مؤلفه مومنتوم در امتداد محور x حاصل مي شود:

(92-4)

$$\frac{d(\rho u_x)}{dt}+\frac{\partial(\rho u_x u_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho u_y u_x)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho u_z u_x)}{\partial z}+\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}+\frac{\partial P_x}{\partial x}-\rho g_x=0$$

- براي تكميل كار لازم است معادله مومنتوم همزمان با معادله پيوستگي نوشته شود، زيرا عبارت ρu_x داراي دو تابع ρ و u_x است. بنابراين با كمک معادله پيوستگي در مختصات كارتزين:

$$\frac{\partial(\rho)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z}=0$$

(3-4)

- معادله

$$\rho\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_x}{\partial z}\right)+\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}+\frac{\partial P_x}{\partial x}-\rho g_x=0$$

(93-4)

- معادله(93) معادله حركت در مختصات كارتزين در امتداد محور xهاست.

معادله حركت در مختصات كارتزين

(93-4) مؤلفه x:
$\rho(\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_x}{\partial z}) + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \frac{\partial P_x}{\partial x} - \rho g_x = 0$
(94-4) مؤلفه y:
$\rho(\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_y}{\partial z}) + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \frac{\partial P_y}{\partial y} - \rho g_y = 0$
(95-4) مؤلفه z:
$\rho(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}) + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial P_z}{\partial z} - \rho g_z = 0$

- با استفاده از قانون هاي ويژه، لازم است به جاي عبارت هاي تنش در معادله حركت، معادله مناسبي بر حسب سرعت جايگزين شود. براي سيال نيوتني ازمعادله هاي ويسكوزيته نيوتن استفاده مي شود. چنانچه گرانروي سيال ثابت باشد (μ = ثابت)، معادله هاي حركت به نام Navier-Stokes حاصل مي شوند.
- در سيال نيوتني و تراكم ناپذير (ρ,μ = ثابت) و نيز با فرض عدم وجود حركت هاي چرخشي، عبارت هاي تنش در معادله هاي جدول (8) به صورت زير جايگز

$$\tau_{xx} = -\mu\frac{\partial u_x}{\partial x} \qquad \tau_{xy} = -\mu\frac{\partial u_y}{\partial x} \qquad \tau_{xz} = -\mu\frac{\partial u_z}{\partial x}$$

$$\tau_{yx} = -\mu\frac{\partial u_x}{\partial y} \qquad \tau_{yy} = -\mu\frac{\partial u_y}{\partial y} \qquad \tau_{yz} = -\mu\frac{\partial u_z}{\partial y}$$

$$\tau_{zx} = -\mu\frac{\partial u_x}{\partial z} \qquad \tau_{zy} = -\mu\frac{\partial u_y}{\partial z} \qquad \tau_{zz} = -\mu\frac{\partial u_z}{\partial z}$$

- پس از جاي گذاري روابط بالا در معادله هاي (93) تا (95) جدول صفحه بعد حاصل مي شود.

معادله هاي حركت سيال نيوتني در مختصات كارتزين (ثابت = ρ,μ)

(96-4) مؤلفه x:

$$\rho(\frac{\partial u_x}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_x}{\partial z})=\mu(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2})-\frac{\partial P_x}{\partial x}+\rho g_x$$

(97-4) مؤلفه y:

$$\rho(\frac{\partial u_y}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_y}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_y}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_y}{\partial z})=\mu(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2})-\frac{\partial P_y}{\partial y}+\rho g_y$$

(98-4) مؤلفه z:

$$\rho(\frac{\partial u_z}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_z}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_z}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z})=\mu(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2})-\frac{\partial P_z}{\partial z}+\rho g_z$$

- اگر معادله هاي حركت در مختصات استوانه اي و كروي نيز نوشته شود، براي سيال نيوتني و تراكم ناپذير معادلات زير حاصل مي شوند.

معادله هاي حركت سيال نيوتني در مختصات استوانه اي (ثابت = ρ,μ)

(99-4) مؤلفه r :

$$\rho(\frac{\partial u_r}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}+u_z\frac{\partial u_r}{\partial z}-\frac{u_\theta^2}{r})=$$
$$\mu\left[\frac{\partial}{\partial r}(\frac{1}{r}\frac{\partial(ru_r)}{\partial r})+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}\right]-\frac{\partial P}{\partial r}+\rho g_r$$

(100-4) مؤلفه θ :

$$\rho(\frac{\partial u_\theta}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_\theta}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}+\frac{u_r u_\theta}{r}+u_z\frac{\partial u_\theta}{\partial z})=$$
$$\mu\left[\frac{\partial}{\partial r}(\frac{1}{r}\frac{\partial(ru_\theta)}{\partial r})+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}+\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2}\right]-\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta}+\rho g_\theta$$

(101-4) مؤلفه z :

$$\rho(\frac{\partial u_z}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z})=$$
$$\mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u_z}{\partial r})+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right]-\frac{\partial P}{\partial z}+\rho g_z$$

معادله های حرکت سیال نیوتنی (ثابت = ρ,μ)

(102-4) مؤلفه r :

$$\rho\left(\frac{\partial u_r}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}+\frac{u_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial\phi}-\frac{u_\theta^2-u_\phi^2}{r}\right)=$$

$$\mu\left[\nabla^2u_r-\frac{2}{r^2}u_r-\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}-\frac{2}{r^2}u_\theta\cot\theta-\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial u_\phi}{\partial\phi}\right]-\frac{\partial P}{\partial r}+\rho g_r$$

(103-4) مؤلفه θ :

$$\rho\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_\theta}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{u_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial\phi}+\frac{u_ru_\theta}{r}-\frac{u_\phi^2\cot\theta}{r}\right)=$$

$$\mu\left[\nabla^2u_\theta+\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}-\frac{u_\theta}{r^2\sin^2\theta}-\frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial u_\phi}{\partial\phi}\right]-\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial\theta}+\rho g_\theta$$

(104-4) مؤلفه ϕ :

$$\rho\left(\frac{\partial u_\phi}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_\phi}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\phi}{\partial\theta}+\frac{u_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\phi}{\partial\phi}+\frac{u_\phi u_r}{r}+\frac{u_\theta u_\phi}{r}\cot\theta\right)=$$

$$\mu\left[\nabla^2u_\phi-\frac{u_\phi}{r^2\sin^2\theta}+\frac{2}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial u_r}{\partial\phi}+\frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial\phi}\right]-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial P}{\partial\phi}+\rho g_\phi$$

که:

$$\nabla^2=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right)$$

انواع شرایط مرزي

- **در مدل سازي هدف از حل هر معادله ديفرانسيل (معمولي يا جزيي) تعيين جواب خصوصي است كه به كمک شرايط مرزي يا شرايط اوليه مسئله بدست مي آيد. به اين دليل اطلاع از شرايط مرزي و اوليه بسيار ضروري است.**

شرط مرزي نوع اول (Dirichlet condition)

- **در اين نوع شرط مرزي، مقدار تابع به صورت عدد ثابت يا تابعي از برخي متغير هاي مستقل بيان مي شود. براي مثال، وقتي غلظت يک ماده در ورود به يک راکتور، مقدار معمولي باشد، يا اينکه غلظت ورودي به صورت تابع معمولي از زمان ارائه شود، شرط مرزي از نوع اول است.**

شرط مرزي نوع دوم (Neumann condition)

- در اين نوع شرط مرزي، مقدار مشتق تابع مشخص مي شود. براي مثال هنگام خروج مواد از يک واکنش گاه، مشتق غلظت در خروجي لوله صفر است يا اينکه در يک لايه مرزي که سرعت حرکت سيال در سطح لايه بيشينه است، مي توان گفت مشتق سرعت نسبت به عرض لايه صفر است.
- در مواردي که در يک سيستم تقارن وجود دارد، مي توان در مرکز سيستم از شرط مرزي نوع دوم استفاده کرد. البته در شرط مرزي نوع دوم، مشتق تابع ممکن است مقداري غير صفر، مثلا عدد ثابت يا تابعي از يک متغير مستقل باشد.

شرط مرزي نوع سوم (Robins condition)

- در اين نوع شرط مرزي، رابطه ميان تابع و مشتق آن مشخص مي شود. براي مثال در يک سيستم حرارتي شرط مرزي نوع سوم رابطه ميان نفوذ حرارت و انتقال حرارت جابجايي را نشان مي دهد و در سيستم هاي انتقال جرم، رابطه ميان نفوذ جرم و عبارت انتقال جرم مشخص مي شود.
- براي درک بيشتر، براي مثال، معادله هاى زير در مرز x=L ارائه مي شوند.

- **انتقال جرم:**

$$-D\frac{\partial C_{(L)}}{\partial x}=K_c\left[C_{(L)}-C_b\right]$$

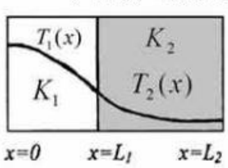
- **انتقال حرارت:**

$$-K\frac{\partial T_{(L)}}{\partial x}=h\left[T_{(L)}-T_b\right]$$

- K_c و h به ترتيب ضريب انتقال جرم و ضريب انتقال

شرط مرزي تماس (Contact condition)

- چنانچه دو سيستم متفاوت، مطابق شكل با يكديگر تماس داشته باشند و در هر سيستم يک معادله ديفرانسيل براي فرمول بندي توزيع كميت نوشته شده باشد، در هر دو سيستم ارائه شرايط مرزي ضروري است. در اين حالت در محل تماس (مثلا در $x=L_1$)، مي توان از شرط تساوي كميت ها و شرط تساوي شار كميت ها استفاده كرد. البته اين شرط در صورتي صحيح است كه در محل تماس، تج



- براي مثال در مورد يک سيستم انتقال حرارت شرايط مرزي تماس به صورت زير نوشته مي شود (در $x=L_1$):

$$T_1(L_1)=T_2(L_1) \qquad (116\text{-}4)$$

$$-K_1\frac{\partial T_1(L_1)}{\partial x}=-K_2\frac{\partial T_2(L_1)}{\partial x} \qquad (117\text{-}4)$$

- يعني در محل تماس دو جسم مختلف به دليل تعادل گرمايي، دما ها برابر است. همچنين مقدار حرارتي كه از يک طرف به مرز تماس مي رسد، برابر است با مقدار حرارتي كه به طرف ديگر منتقل مي شود.

فصل چهارم

معادله هاي ديفرانسيل معمولي رتبه دوم با ضرايب متغير

معادله‌هاي ديفرانسيل خطي مرتبة دوم با ضرايب متغير

- شكل كلي يك معادلة خطي همگن با ضرايب متغير به‌صورت زير است:

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2}+Q(x)\frac{dy}{dx}+R(x)y=0 \qquad (77\text{-}3)$$

- معمولاً حل تحليلي اين معادله‌ها، به‌كمك چندجمله‌اي‌ها (*solution Series*) انجام مي‌شود. به‌اين ترتيب كه تابع y ، به‌صورت يك چندجمله‌اي تواني در نظر گرفته مي‌شود، سپس با جايگزين كردن آن در معادلة ديفرانسيل، پارامتر نماي چندجمله‌اي و كلية ثابت‌هاي آن تعيين مي‌گردد. اين روش به نام روش فروبنيوس (*Frobenius method*) شناخته مي‌شود.
- شرط اعمال اين روش اين است كه توابع $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ در محدودة مورد بررسي توابعي پيوسته و معين باشند.

• برحسب نوع توابع R(x), Q(x), P(x) معادلة (77) به شكل‌ها و نام‌هاي مختلفي ظاهر مي‌شود. متداول‌ترين انواع اين معادله‌ها عبارت‌اند از :

الف : معادله كوشي يا اويلر

ب : معادله بسل

پ : معادله لژاندر

<u>معادلة كوشي يا اويلر ***(Cauchy or Euler equation)***</u>

• شكل اين معادله به‌صورت زير است:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+ax\frac{dy}{dx}+by=0 \qquad (78\text{-}3)$$

به‌طوري كه a و b ثابت‌اند. هر سه عبارت معادله داراي بعد يكسان‌اند.

• اين معادله را مي‌توان با يك تغيير متغير، به معادله‌اي با ضرايب ثابت تبديل و سپس با استفاده از عملگر مشتق آن را به‌صورت زير حل كرد . با اعمال تغيير متغير و جايگزين كردن آن در $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dz}$ اول و دوم معادلة (78):

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dz^2}-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dz} \qquad (79\text{-}3)$$

(80-3)

و پس از جاي‌گذاري در معادلة (78) نتيجه مي

$$\frac{d^2y}{dz^2}+(a-1)\frac{dy}{dz}+by=0 \qquad (81\text{-}3)$$

به‌اين ترتيب معادلة (78) به معادلة (81) با ضرايب ثابت تبديل شده‌است كه معادلة مشخصه‌ي آن عبارت است از:

$$r^2+(a-1)r+b=0 \quad (82\text{-}3)$$

در اين صورت برحسب علامت دلتا (Δ) سه حالت پيش مي‌آيد و در نهايت تابع y به‌صورت جدول (3-3) به‌دست مي‌آيد.

جدول(3-3) ريشه‌هاي معادلة مشخصه و جواب عمومي معادلة كوشي برحسب علامت دلتا

Δ	ريشه‌هاي معادله مشخصه	y_2, y_1	جواب عمومي
$\Delta > 0$	r_1, r_2	$y_1 = x^{r_1}$ $y_2 = x^{r_2}$	$y = Ax^{r_1} + Bx^{r_2}$
$\Delta = 0$	$r_1 = r_2 = r$	$y_1 = x^r$ $y_2 = x^r \ln x$	$y = Ax^r + Bx^r \ln x$
$\Delta < 0$	$\begin{cases} r_1 = \delta + i\beta \\ r_2 = \delta - i\beta \end{cases}$	$\begin{cases} y_1 = x^\delta \sin(\beta \ln x) \\ y_2 = x^\delta \cos(\beta \ln x) \end{cases}$	$y = x^\delta \begin{bmatrix} A\sin(\beta \ln x) + \\ B\cos(\beta \ln x) \end{bmatrix}$

$r_1, r_2 = \dfrac{1-\alpha \pm \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \Delta = (a-1)^2 - 4b \quad \delta = \dfrac{1-a}{2} \quad \beta = \dfrac{\sqrt{|\Delta|}}{2}$

معادلة بسل (*Bessel equation*)

- شكل معادلة بسل به‌صورت زير است:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-v^2)y=0 \quad (83\text{-}3)$$

- v رتبة معادله است كه ممكن است صفر، عدد صحيح يا اعشاري باشد. اين معادله، به‌روش فروبنيوس حل مي‌شود.

ابتدا تابعy به‌صورت چندجمله‌اي زير تعريف مي‌شود:

$$y=\sum_{x=0}^{\infty}a_n x^{n+s} \quad (84\text{-}3)$$

- در اين چندجمله‌اي، ضرايب a_n و پارامتر s مجهول‌اند و بايد با جاي‌گذاريy در معادلة (83) تعيين شوند.

• بنابراين به‌جاي مشتق اول و دوم تابع y عبارت هاي زير جايگزين مي‌شود:

$$\frac{dy}{dx}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+s)x^{n+s-1}$$ (85-3)

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+s)(n+s-1)x^{n+s-2}$$ (86-3)

• با جاي‌گذاري معادله‌هاي (85) و (86) در معادلة (83) و مرتب كردن آنها نتيجه مي‌شد

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+s}\left[(n+s)^2-v^2\right]+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+s+2}=0$$ (87-3)

• در اين حالت با تبديل n به n-2 در عبارت دوم و آزاد كردن شماره‌هاي n=0 و n=1 در عبارت اول نتيجة زير حاصل د...

$$a_0x^s(s^2-v^2)+a_1x^{s+1}\left[(s+1)^2-v^2\right]+\sum_{n=2}^{\infty}x^{n+s}\left\{a_n\left[(n+s)^2-v^2\right]+a_{n-2}\right\}=0$$ (88-3)

• براي برقراري معادلة قبل بايد هريك از عبارت‌ها صفر باشد. بنابراين ضرايب x بايد صفر باشد. به اين ترتيب از عبارت اول با فرض $a_0\neq0$ معادلة مشخصة زير به‌دست مي‌آيد:

$$s^2-v^2=0$$ (89-3)

• از اين معادله مقدار مشخصة s تعيين مي‌شود. $s=\pm v$

(90-3)

• از عبارت دوم مقدار ثابت a_1 تعيين مي‌شود. داخل كروشه با توجه به مقدار s=υ غير صفر است، بنابراين لازم است صفر a_1 باشد.

$$a_1=0$$ (91-3)

- از مساوي قرار دادن عبارت سوم معادلة (88) با صفر، رابطة a_n برحسب a_{n-2} به‌دست مي‌آيد. به رابطة حاصل، معادلة بازگشتي (*recurrence equation*) گويند.

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{(s+n)^2 - v^2} \qquad (92\text{-}3)$$

- اگر n عدد فرد باشد ($n=2k+1$)، ثابت‌ها صفر شده و فقط هنگامي كه n زوج باشد ($n=2k$) ثابت‌ها غير صفر مي‌شوند.

با توجه به اين‌كه براي s دو مقدار به‌دست آمده‌است، بنابراين براي a_n نيز دو دسته جواب حاصل مي‌شود:

الف - $s = +v$

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0 v!}{2^{2k} k!(k+v)!} \qquad (93\text{-}3)$$

- مي‌توان به‌جاي $v!$ و $(k+v)!$ از تابع عمومي فاكتوريل، يعني تابع گاما (Γ) استفاده كرد كه به‌صورت انتگرال زير تعريف م

$$\Gamma(v+1) = \int_0^\infty x^v e^{-x} dx \qquad (94\text{-}3)$$

- چنانچه v عدد صحيح باشد، مقدار انتگرال بالا مساوي با فاكتوريل v مي‌شود.

$$\Gamma(v+1) = v! \qquad (95\text{-}3)$$

- اما چنانچه v عدد اعشاري باشد، ديگر معادلة (95) كاربرد ندارد و بايد از رابطة (94) به‌طور مستقيم استفاده كرد. بنابراين بهتر است شكل كلي ثابت به‌كمك تابع گاما نشان داده شود كه ، اعشاري باشد.

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0 \Gamma(v+1)}{2^{2k} k! \Gamma(k+v+1)} \qquad (96\text{-}3)$$

- باتوجه به مقادير s و a_{2k} يك جواب معادلهٔ بسل به‌صورت زير به‌دست مي‌آيد:

(97-3)

$$y_1 = a_0\Gamma(\nu+1)2^{\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{2k+\nu}k!\Gamma(k+\nu+1)}x^{2k+\nu}$$

- ضريبي كه در پشت مجموعه مشخص شده‌است، به‌صورت يك ثابت عمومي درنظر گرفته مي‌شود كه بايد بعداً به‌كمك شرايط مرزي يا اوليهٔ مسئله تعيين شود، بنابراين مقدار آن مهم نيست.
- مجموعهٔ حاصل را تابع بسل نوع اول با رتبهٔ ν از متغير x گويند كه به‌صورت ز

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{2k+\nu}k!\Gamma(k+\nu+1)}x^{2k+\nu} \qquad (98\text{-}3)$$

ب - s = -υ -

- با تبديل ν به $-\nu$ در معادلهٔ (98) جواب ديگر معادلهٔ بسل حاصل مي‌شود.

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{2k-\nu}k!\Gamma(k-\nu+1)}x^{2k-\nu} \qquad (99\text{-}3)$$

- به اين ترتيب جواب عمومي معادلهٔ (83) تركيب خطي از جواب‌هاي (98) و (99) است.

$$y = C_1J_\nu(x) + C_2J_{-\nu}(x) \qquad (100\text{-}3)$$

- جواب عمومي بالا در صورتي قابل قبول است كه ν عدد اعشاري باشد. اگر ν صفر يا يك عدد صحيح باشد، $J_\nu(x)$ و $J_{-\nu}(x)$ مستقل ازيكديگر نيستند، به‌طوري‌كه:

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \qquad \nu=n \text{ (عدد صحيح)} \qquad (101\text{-}3)$$

- در این حالت براي تعيين جواب دوم از روش كاهش مرتبه استفاده مي‌شود. به طوري‌كه در يک معادلة ديفرانسيل به‌صورت زير:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=0 \qquad (102\text{-}3)$$

- اگر يك جواب خصوصي معادله $y_1(x)$ باشد، جواب دوم را مي‌توان از رابطة زير به‌دست آورد:

$$y_2(x)=y_1(x)\int_0^{\infty}\frac{exp\int[-P(x)dx]}{y_1^2(x)}dx \qquad (103\text{-}3)$$

- باتوجه به معادلة بسل(83): $P(x)=1/x$ و $y_1(x)=J_v(x)$
- در این‌صورت جواب دوم براساس معادلة (103) تعيين مي‌شود:

$$y_2(x)=J_v(x)\int_0^{\infty}\frac{dx}{xJ_v^2(x)} \qquad (104\text{-}3)$$

- باتوجه به عبارت انتگرال در معادلة (104)، حاصل این معادله به‌صورت انتگرال جزء به جزء مجموع دو عبارت خواهد شد كه يك عبارت آن (به‌علت وجود 1/x) به‌صورت لگاريتمي و عبارت ديگر به‌صورت يك مجموعة تواني است كه به‌صورت كلي زير نوشته مي‌شود:

$$y_2(x)=J_v(x)\ln x+\sum_{k=0}^{\infty}b_{2k}x^{2k-v} \qquad (105\text{-}3)$$

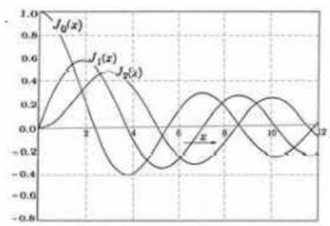
- تابع حاصل به‌نام تابع بسل نوع دوم ($Y_\upsilon(x)$) ناميده مي‌شود كه با قراردادن آن در معادلة (83) ثابت‌هاي b_{2k} و درنتيجه شكل اصلي تابع به‌دست مي‌آيد . به‌دليل طولاني بودن محاسبات فقط نتيجة نهايي آورده مي‌شود:

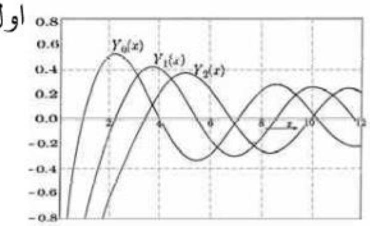
$$Y_v(x)=J_v(x)\ln(x)-\sum_{k=0}^{v-1}\frac{(v-k-1)!}{2^{2k-v}k!}x^{2k-v}+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{[\varphi(k)+\varphi(k+v)]}{2^{2k-v}(v+k)!}x^{2k+v}$$

- كه در معادله مقابل: (عدد صحيح) $\nu=n$ $\varphi(k)=\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{m}$ $\varphi(0)=0$
- بنابراين در مواقعي كه رتبهٔ (ν) عدد صحيح يا صفر باشد، جواب عمومي معادلهٔ (83) بهصورت تركيب خطي از جوابهاي زير است، يعني: $y(x)=C_1J_n(x)+C_2Y_n(x)$

(106-3)

- شكلهاي (3-2) و (3-3)، نمودار تابع بسل نوع اول و تابع بسل نوع دوم را با مرتبههاي صفر و يك و دو نشان دهند. چنانچه ملاحظه ميشود، تشابه اين دو تابع در نوساني بودن و تفاوت آنها اول در





<u>معادلهٔ بسل تغيير يافته ***(Modified Bessel)***</u>

- چنانچه در معادلهٔ (83)، x به تبديل شود، معادلهٔ (107) حاصل ميشود.

(107-3)

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(\lambda^2x^2-\nu^2)y=0$$

- جواب اين معادله نيز تابع بسل ازمتغير λx يعني $J_\upsilon(\lambda x)$ است. درصورتي λ كه عدد موهومي ($\sqrt{-1}$) باشد، معادلهٔ (107) بهشكل زير تبديل ميشود كه به آن معادلهٔ بسل تغييريافته ميگويند.

(108-3)

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-(x^2+\nu^2)y=0$$

- در اينصورت جواب معادلهٔ (108) نيز $J_\upsilon(ix)$ تابع است.

- از آنجا که همواره سعي مي‌شود در جواب معادله ، عبارت موهومي حذف شود، عمليات زير انجام مي‌گردد:

- با نوشتن مجموعه $J_\upsilon(ix)$ و خارج کردن i از داخل مجموعه ، معادلة (109) حاصل مي‌شود.

$$J_\nu(ix) = i^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2k+\nu} k!\,\Gamma(k+\nu+1)} x^{2k+\nu} \qquad (109\text{-}3)$$

- در اين حالت مجموعه جديدي به‌دست مي‌آيد که تابع بسل تغييريافته نوع اول $I_\upsilon(x)$ ناميده مي‌شود.

$$I_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+\nu}}{2^{2k+\nu} k!\,\Gamma(k+\nu+1)} \qquad (110\text{-}3)$$

- براي تعيين جواب دوم معادلة (108) بايد ν را به $-\nu$ تبديل کرد که در اين‌صورت جواب عمومي معادله، ترکيب خطي از جواب‌ها خواهد بود.

$$y(x) = C_1 I_\nu(x) + C_2 I_{-\nu}(x) \qquad (111\text{-}3)$$

- در معادلة قبل چنانچه ν صفر يا عدد صحيح باشد، جواب دوم، $I_{-\upsilon}(x)$ ، مستقل نيست و بايد به‌کمك معادلة (103) تعيين گردد. از اين روش، جواب دوم، به نام تابع بسل تغييريافتة نوع دوم $K_\upsilon(x)$ و با شکل کلي زير به‌دست مي‌آيد:

$$K_\nu(x) = I_\nu(x)\ln x + \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k} x^{2K-\nu} \qquad (112\text{-}3)$$

- با جاي‌گذاري معادلة بالا در معادلة (107) و تعيين ثابت‌هاي شکل اصلي تابع حاصل م

$$K_\nu(x) = (-1)^{\nu+1} I_\nu(x)\ln(x) + \sum_{k=0}^{\nu-1} (-1)^k \frac{(\nu-k-1)!}{2^{2k-\nu} k!} x^{2k-\nu}$$

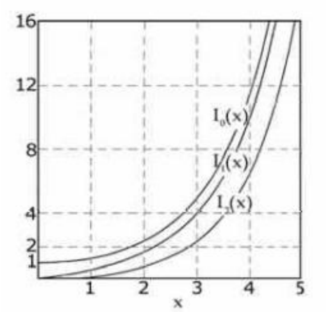
$$+(-1)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[\varphi(k)+\varphi(k+\nu)]}{2^{2k-\nu}(\nu+k)!} x^{2k+\nu}$$

$$\varphi(0)=0 \qquad \varphi(k) = \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{m} \quad \nu=n \text{ (عدد صحيح)}$$

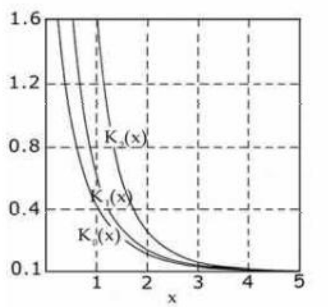
- بنابراين هنگامي‌که رتبه(ν) صفر، يا عدد صحيح باشد، جواب عمومي معادلة بسل تغييريافته به‌صورت زير خواهدبود:

$$y(x) = C_1 I_n(x) + C_2 K_n(x) \qquad (113\text{-}3)$$

- شكل‌هاي (3-4) و (3-5) نمودار دو تـابع $I_v(x)$ و $K_v(x)$ را براي رتبه‌هاي صفر و يك و دو نشان مـي‌دهند. شباهت اين دو تابع در اين است كه هيچيك نوسـاني نيستند. تفاوت آنها در اين است كـه تـابع $I_v(x)$ در نقطـة x=0 معين، ولـي تـابع $K_v(x)$ در نامعين است.



شكل (3-4) نمودار تابع بسل تغييريافتة نوع اول



شكل (3-5) نمودار تابع بسل تغييريافتة نوع دوم

شكل كلي معادله‌هاي بسل

- در نتيجة فرمول‌بندي سيستم‌هاي واقعي معمولا شكل‌هاي كلي‌تري از معادله‌هاي ديفرانسيل با ضرايب متغيرحاصل مي‌شود كـه قابل تبـديل به معادلة بسل هستند. براي مثال معادلة زير را درنظر بگيريد:

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\alpha}\frac{dy}{dx}\right)+\gamma^2 x^{\beta} y=0 \qquad (114\text{-}3)$$

- بـه‌طوري كـه α β پارامترهـاي مثبت‌اند و γ مـي‌توانـد يك عـدد حقيقي يا موهومي باشد. مي‌توان اين معادله را با تغيير متغير به‌شكل معادلة بسل تبديل كرد.

- ابتدا متغير مستقل به‌صورت $x=t^{\mu}$ تعريف مي‌شود كه با جاي‌گذاري در معادلة (114) به‌شكل زير تبديل مي‌گردد:

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2}+t[\mu(\alpha-1)+1]\frac{dy}{dt}+\gamma^2\mu^2 t^{\mu(\beta-\alpha+2)}y=0 \qquad (115\text{-}3)$$

- **حالت اول:** $(\beta - \alpha + 2) \neq 0$
- دراین حالت μ در معادلة (115) طوري انتخاب مي‌شود كه تساوي زير برقرار باشد: $\mu(\beta-\alpha+2)=2 \quad \Rightarrow \mu = \dfrac{2}{\beta-\alpha+2}$
- بنابراين:

$$t^2 \frac{d^2y}{dt^2} + at\frac{dy}{dt} + b^2t^2y = 0 \qquad (116\text{-}3)$$

- به‌طوري كه: $b = \gamma\mu \quad a = \mu(\alpha - 1) + 1$
- با تغيير تابع y در معادلة (116)، به‌صورت $= t^{\nu}$ نتيجه مي‌شود:

$$t^{\nu}\frac{d^2z}{dt^2} + (a + 2\nu)t^{\nu-1}\frac{dz}{dt} + \left\{b^2t^{\nu} + \left((a-1)\nu + \nu^2\right)t^{\nu-2}\right\}z = 0 \qquad (117\text{-}3)$$

- در اين معادله ν طو

$$a + 2\nu = 1 \quad \Rightarrow \nu = \frac{1-a}{2} \quad \Rightarrow \nu = \frac{1-\alpha}{\beta-\alpha+2}$$

- سپس با تقسيم طرفين معادله بر $t^{\nu-2}$ نتيجه مي‌شود:

$$t^2\frac{d^2z}{dt^2} + t\frac{dz}{dt} + (b^2t^2 - \nu^2)z = 0 \qquad (118\text{-}3)$$

- معادلة بالا كاملاً مشابه با معادلة بسل (107) است. در اين‌صورت يك جواب معادلة (118) به‌صورت زير خواهد بود:

$$z(t) = Z_{\nu}(bt) \qquad (119\text{-}3)$$

- Z_{ν} شكلي از انواع توابع بسل است كه مي‌تواند (J_{ν} ، Y_{ν}، I_{ν} يا K_{ν}) باشد و (bt) نيز متغير تابع بسل است. در اين‌صورت تابع $y(t)$ به‌صورت زير تعيين مي‌شود:

$$y(t) = t^{\nu}Z_{\nu}(\gamma\mu t) \qquad (120\text{-}3)$$

- از آنجا كه: $t = x^{\frac{1}{\mu}}$
- بنابراين جواب معادلة (114) به‌دست مي‌آيد:

$$y(x) = x^{\frac{\nu}{\mu}}Z_{\nu}(\gamma\mu x^{\frac{1}{\mu}}) \qquad (121\text{-}3)$$

- شايان ذكر است كه معادلة (114) داراي دو جواب خصوصي است كه جواب عمومي تابع $y(x)$ ، بهصورت تركيب خطي از جوابها ارائه ميشود. يعني:

$$y(x) = C_1 x^{\frac{v}{\mu}} Z_v\left(|\gamma| \mu x^{\frac{1}{\mu}}\right) + C_2 x^{\frac{v}{\mu}} Z_{-v}\left(|\gamma| \mu x^{\frac{1}{\mu}}\right) \qquad (122\text{-}3)$$

- بهطوريكه: $\mu = \dfrac{2}{\beta - \alpha + 2}$ و $v = \dfrac{1-\alpha}{\beta - \alpha + 2}$
- برحسب اينكه v ، عدد صحيح يا كسري و γ عدد موهومي يا حقيقي باشد، شكل تابع بسل و جواب دوم معادله، مشخص ميشود.

- **حالت دوم** $\beta - \alpha + 2 = 0$
- در اين حالت ابتدا در معادلة (114)، جمله اول را باز كرده و سپس دو طرف معادله را به $x^{\alpha-2}$ تقسيم ميكنيم. در نتيجه به معادلة كوشي به شكل زير تبديل ميشود:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + \alpha x \frac{dy}{dx} + \gamma^2 y = 0$$

- كاربرد معادلههاي بسل درمدلهايي است كه در مختصات استوانهاي و كروي نوشته ميشوند، اين معادلهها در مدل پرههايي با سطح مقطع متغير نيز بهكار ميروند.
- درجدول (3-4) كليه حالتهاي مختلف براي جوابهاي معادلة (114) ملاحظه مي شود.

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\alpha}\frac{dy}{dx}\right)+\gamma^2 x^{\beta} y=0$$

- **جدول (3-4) جواب‌هاي معادلة**
- **حالت اول**
- يك جواب معادله:

$$\beta-\alpha+2\neq 0$$

$$y_1(x)=x^{\frac{\nu}{\mu}}Z_{\nu}\left(|\gamma|\mu x^{\frac{1}{\mu}}\right)$$

$$\nu=(1-\alpha)/(\beta-\alpha+2),\quad \mu=2/(\beta-\alpha+2),$$

$$\frac{\nu}{\mu}=(1-\alpha)/2$$

- براي تابع Z برحسب نوع و رتبة معادلـه (ν) دو جواب مطـابق زيـر انتخاب مي‌ش

γ	ν	$Z(x)$	
حقيقي	عدد اعشاري	J_{ν}	$J_{-\nu}$
	صفر يا صحيح (v=n)	J_n	Y_n
موهومی	عدد اعشاري	I_{ν}	$I_{-\nu}$
	صفر يا صحيح (v=n)	I_n	K_n

$$\delta=(1-\alpha)/2,\quad \beta=\sqrt{|\Delta|}/2$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\alpha}\frac{dy}{dx}\right)+\gamma^2 x^{\beta} y=0$$

- جدول (3-4) جواب‌هاي معادلة
- **حالت دوم**
- يك جواب معادله:

$$\beta-\alpha+2=0$$

$$y_1(x)=x^{r}$$

- براساس معادلة مشخصة زير دو جواب خصوصي به‌دست مي‌آيد.

$$r^2+(\alpha-1)r+\gamma^2=0$$

- ريشه‌هاي معادلة مشخصه براساس علامت Δ :

$\Delta=(\alpha-1)^2-4\gamma^2$	$y(x)$	
مثبت	x^{r_1}	x^{r_2}
صفر	x^{r}	$x^{r}\ln x$
منفي	$x^{\delta}\sin(\beta\ln x)$	$x^{\delta}\cos(\beta\ln x)$

$$\delta=(1-\alpha)/2,\quad \beta=\sqrt{|\Delta|}/2$$

خواص توابع بسل

الف - روابط مشتق

$$\frac{d}{dx}\left[x^{v}Z_{v}(mx)\right]=\begin{cases} mx^{v}Z_{v-1}(mx) & Z=J,Y,I \\ -mx^{v}Z_{v-1}(mx) & Z=K \end{cases} \qquad (123\text{-}3)$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-v}Z_{v}(mx)\right]=\begin{cases} -mx^{-v}Z_{v+1}(mx) & Z=J,Y,K \\ mx^{-v}Z_{v+1}(mx) & Z=I \end{cases} \qquad (124\text{-}3)$$

$$\frac{d}{dx}\left[Z_{v}(mx)\right]=\begin{cases} mZ_{v-1}(mx)-(\frac{v}{x})Z_{v}(mx) & Z=J,Y,I \\ -mZ_{v-1}(mx)-(\frac{v}{x})Z_{v}(mx) & Z=K \end{cases} \qquad (125\text{-}3)$$

$$\frac{d}{dx}\left[Z_{v}(mx)\right]=\begin{cases} -mZ_{v+1}(mx)+(\frac{v}{x})Z_{v}(mx) & Z=J,Y,K \\ mZ_{v+1}(mx)+(\frac{v}{x})Z_{v}(mx) & Z=I \end{cases} \qquad (126\text{-}3)$$

- براي v=0 :

$$\frac{d}{dx}\left[Z_{0}(mx)\right]=\begin{cases} -mZ_{1}(mx) & Z=J,Y,K \\ mZ_{1}(mx) & Z=I \end{cases} \qquad (127\text{-}3)$$

ب - روابط انتگرال عمومي

$$\int xJ_{v}^{2}(mx)dx=\frac{1}{2m^{2}}\left\{(m^{2}x^{2}-v^{2})J_{v}^{2}(mx)+\left[x\frac{dJ_{v}(mx)}{dx}\right]^{2}\right\} \qquad (128\text{-}3)$$

$$\int mx^{v}Z_{v-1}(mx)dx=\begin{cases} x^{v}Z_{v}(mx) & Z=J,Y,I \\ -x^{v}Z_{v}(mx) & Z=K \end{cases} \qquad (129\text{-}3)$$

$$\int mx^{-v}Z_{v+1}(mx)dx=\begin{cases} -x^{-v}Z_{v}(mx) & Z=J,Y,K \\ x^{-v}Z_{v}(mx) & Z=I \end{cases} \qquad (130\text{-}3)$$

ج - روابط توابع بسل براي رتبه‌هاي صحيح ($v=n$)

$$Z_{-n}(mx)=\begin{cases} (-1)^{n}Z_{n}(mx) & Z=J,Y \\ Z_{n}(mx) & Z=I,K \end{cases} \qquad (131\text{-}3)$$

د- رفتار توابع بسل براي متغيرهاي كوچك

- با توجه به نوع جواب‌ها به‌شكل مجموعه‌هاي تواني كه قبلاً شرح داده شد، چنين به‌نظر مي‌رسد كه توابع بسل براي متغيرهاي كوچك خيلي سريع همگرا مي‌شوند. با جداكردن نخستين عبارت‌هاي كوچك اين مجموعه، مي‌توان رفتارتابع بسل را براي متغيرهاي كوچك به‌دست آورد.

$$J_0(x) = 1 - \frac{(\frac{x}{2})^2}{(1!)^2} + \frac{(\frac{x}{2})^4}{(2!)^2} - .... \qquad (132\text{-}3)$$

$$J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{(\frac{x}{2})^3}{1!2!} + \frac{(\frac{x}{2})^5}{2!3!} - ... \qquad (133\text{-}3)$$

$$J_v(x) = \frac{(\frac{x}{2})^v}{\Gamma(v+1)} \left\{ 1 - \frac{(\frac{x}{2})^2}{1!(v+1)} + \frac{(\frac{x}{2})^4}{2!(v+1)(v+2)} - ... \right\} \qquad (134\text{-}3)$$

$$I_0(x) = 1 + \frac{(\frac{x}{2})^2}{(1!)^2} + \frac{(\frac{x}{2})^4}{(2!)^2} + ... \qquad (135\text{-}3)$$

$$I_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{(\frac{x}{2})^3}{1!2!} + \frac{(\frac{x}{2})^5}{2!3!} + ... \qquad (136\text{-}3)$$

$$I_v(x) = \frac{(\frac{x}{2})^v}{\Gamma(v+1)} \left\{ 1 + \frac{(\frac{x}{2})^2}{1!(v+1)} + \frac{(\frac{x}{2})^4}{2!(v+1)(v+2)} + ... \right\} \qquad (137\text{-}3)$$

- بسط ساير توابع بسل براي متغيرهاي كوچك نيز به همين روش انجام مي‌شود.

هـ - روابط برخي توابع بسل با توابع مثلثاتي و هيپربوليك

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}}\sin x \qquad (138\text{-}3)$$

$$J_{-\frac{1}{2}}(x)=\left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}}\cos x \qquad (139\text{-}3)$$

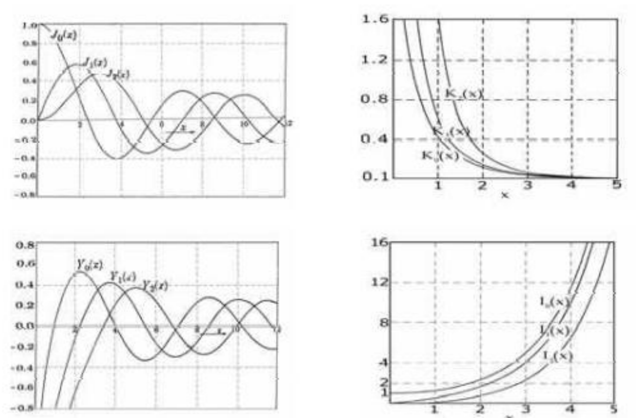
$$I_{\frac{1}{2}}(x)=\left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}}\sinh x \qquad (140\text{-}3)$$

$$I_{-\frac{1}{2}}(x)=\left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}}\cosh x \qquad (141\text{-}3)$$

$$Y_{\frac{1}{2}}(x)=-\left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}}\cos x \qquad (142\text{-}3)$$

$$Y_{-\frac{1}{2}}(x)=-\left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}}\sin x \qquad (143\text{-}3)$$

نمايش نمودار توابع بسل



- توابع Y و K (برخلاف I و J) در $x=0$ نامعين هستند.
- توابع I و K (برخلاف J و Y) غيرنوساني‌اند.
- تابع بسل I برخلاف بسل K با افزايش مقدار متغيرمستقل، به سمت بي‌نهايت ميل مي‌كند.

معادلة لژاندر (***Legendre equation***)

- معادلة لژاندر نيز نوعي از معادله‌هاي خطي مرتبة دوم با ضرايب متغير است كه به‌صورت زير معرفي مي‌شود:

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+n(n+1)y=0 \qquad (144\text{-}3)$$

- جواب‌هاي اين معادله به‌نام توابع لژاندر شناخته مي‌شود. در حالت خاص، وقتي n صفر يا عدد صحيح مثبت باشد، يكي از دو جواب مستقل معادله، مي‌تواند چندجمله‌اي لژاندر از درجة n باشد و جواب دوم يك سري تمام نامتناهي است.

- مثالي از كاربرد اين معادله، مدل‌سازي ديفرانسيلي در مختصات كروي يا استوانه اي است . به‌طوري كه وقتي متغير وابسته تابعي از شعاع (r) و يك زاوية (θ) باشد، پس از جداسازي متغيرها و تبديل معادلة ديفرانسيل جزيي به معمولي، معادلة ديفرانسيل حاصل در جهت θ به معادله‌اي مشابه (144) تبديل مي‌شود.
- معادلة (144) يك معادلة ديفرانسيل معمولي با ضرايب متغير است، براي حل اين معادله نيز از روش فروبنيوس استفاده مي‌شود.

- يك چندجمله‌اي تواني به شكل زير به‌عنوان جواب معادله اختيار مي‌شود:

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^{k+s}$$ (145-3)

- s مقدار مشخصه و a_k ثابت‌هاي چندجمله‌اي هستند.
- با جاي‌گذاري معادلة (145) در معادلة (144) و با فاكتورگيري از x هاي با توان يكسان و سپس آزادكردن شمارة صفر و يك در عبارت مشتق دوم، معادلة زير ظاهره

$$a_0 s(s-1)x^{s-2}+a_1(s+1)sx^{s-1}+\sum_{k=2}^{\infty}a_k(k+s)(k+s-1)x^{k+s-2}$$ 146-3)

$$-\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^{k+s}\left[(k+s)(k+s+1)-n(n+1)\right]=0$$

- در عبارت سوم معادلة (146)، k به k+2 تبديل مي‌گردد و از دو عبارت سوم و چهارم فاكتورگيري مي‌شود كه معادلة (147) به‌دست آيد

$$a_0 s(s-1)x^{s-2}+a_1(s+1)sx^{s-1}+$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}x^{k+s}\left\{a_{k+2}(s+k+2)(s+k+1)+a_k\left[n(n+1)-(k+s)(k+s+1)\right]\right\}=0$$ 147-3)

- از برابر قرار دادن هريك از عبارت‌هاي معادلة (147) با صفر روابط زير حاصل مي‌شود:

$$a_0 s(s-1)x^{s-2}=0$$

$$a_1(s+1)sx^{s-1}=0$$ (148-3)

$$a_{k+2}(s+k+2)(s+k+1)+a_k\left[n(n+1)-(s+k)(s+k+1)\right]=0$$ (149-3)

$$s=0 \qquad a_1,a_0\neq 0$$ (150-3)

- از معادله‌هاي (148) و (149) با فرض نتيجه مي‌شود:
- از معادلة بازگشتي، يعني معادلة (150) رابطة ميان a_k و a_{k+2} مشخص مي‌شود.

$$a_{k+2}=\frac{-(n-k)(n+k+1)}{(k+1)(k+2)}a_k \quad ,k=0,1,2,...$$

(151-3)

• با توجه به اینکه k زوج یا فرد باشد ثابت‌هاي متفاوتي به‌دست مي‌آيد.

• ***$k=2m$ (زوج)***

(152-3)

$$a_0=a_0$$
$$a_2=\frac{-n(n+1)}{2!}a_0$$
$$a_4=\frac{-(n-2)(n+3)}{3\times 4}a_2=(-1)^2\frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!}a_0$$
$$\vdots$$
$$a_{2m}=(-1)^k\frac{n(n-2)\ldots(n-2m+2)(n+1)(n+3)\ldots(n+2m-1)}{(2m)!}a_0$$

• ***$k=2m+1$ (فرد)***

• (153-3)

$$a_1=a_1$$
$$a_3=-\frac{(n-1)(n+2)}{3!}a_1$$
$$a_5=-\frac{(n-3)(n+4)}{4\times 5}a_3=(-1)^2\frac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{5!}a_1$$
$$\vdots$$
$$a_{2m+1}=(-1)^k\frac{(n-1)(n-3)\ldots(n-2m+1)(n+2)(n+4)\ldots(n+2m)}{(2m+1)!}a_1$$

- با توجه به دو حالت بالا، با جاي‌گذاري مقدار مشخصه و ثابت‌ها در معادلة (145) جواب عمومي براي تابع y به‌دست مي‌آيد كه جواب عمومي به‌صورت زير است:

$$y(x) = a_0 u_1(x) + a_1 u_2(x) \qquad (154\text{-}3)$$

- به‌طوري‌كه:

$$u_1(x) = 1 + \frac{1}{a_0}\sum_{m=1} a_{2m} x^{2m} \qquad (155\text{-}3)$$

$$u_2(x) = x + \frac{1}{a_1}\sum_{m=1} a_{2m+1} x^{2m+1} \qquad (156\text{-}3)$$

- $u_1(x)$ جوابي است كه براي شماره‌هاي زوج ($k = 0, 2, 4, \ldots$) حاصل شده است و $u_2(x)$ جوابي است كه براي شماره هاي فرد به‌دست مي‌آيد.

<u>چندجمله‌اي و سري لژاندر</u>

- چنانچه درمعادلة لژاندر (144) ، n صفر يا عددصحيح مثبت باشد، يك جواب اين معادله را چندجمله‌اي لژاندر نوع اول $P_n(x)$ و جواب دوم معادله را يك سري نامتناهي $Q_n(x)$ گويند، كه به‌جاي $u_1(x)$ و $u_2(x)$ در معادلة (154) به‌كار مي‌روند. در اين‌صورت جواب عمومي، به‌صورت تركيب خطي از چندجمله‌اي‌هاي لژاندر به‌شكل زير خواهد بود.

$$y(x) = C_1 P_n(x) + C_2 Q_n(x) \qquad (157\text{-}3)$$

- برحسب زوج يا فرد بودن n ، $P_n(x)$ و $Q_n(x)$ هر يك شكلي از $u_1(x)$ و $u_2(x)$ هستند.

• براي n = عدد فرد

(158-3)

$$P_n(x)=(-1)^{\frac{(n-1)}{2}}\frac{1.3.5...n}{2.4.6...(n-1)}u_2(x)$$

(159-3)

$$Q_n(x)=(-1)^{\frac{(n+1)}{2}}\frac{2.4.6...(n-1)}{1.3.5...n}u_1(x)$$

• براي $n = 1$ $\quad P_1(x)=u_2(x)=x \qquad Q_1(x)=-u_1(x)$

• بنابراين براي درجه‌هاي فرد هر يك از عبارت هاي بالا را مي‌توان به شكل بسط داده شدة زير نمايش داد:

$$P_n(x)=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{1.3.5..n}{2.4.6...(n-1)}\times\left[x-\frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3+\frac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{5!}x^5+...\right]$$

$$Q_n(x)=(-1)^{\frac{n+1}{2}}\frac{2.4.6...(n-1)}{1.3.5...n}\times\left[1-\frac{n(n+1)}{2!}x^2+\frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!}x^4+...\right]$$

• براي n = عدد زوج

(160-3)

$$P_n(x)=(-1)^{\frac{n}{2}}\frac{1.3.5...(n-1)}{2.4.6...n}u_1(x)$$

$$Q_n(x)=(-1)^{\frac{n}{2}}\frac{2.4.6...n}{1.3.5...(n-1)}u_2(x)$$

(161-3)

براي n=0 $\quad P_0(x)=u_1(x)=1 \quad , \quad Q_0(x)=u_2(x)$

• ملاحظه مي شود كه در هر دو حالت $P(x)$ يک چند جمله اي متنا هي و $Q(x)$ يک سري نامتناهي است.

• براي درجه هاي زوج (n) هريك از جواب هاي بالا را مي توان به شكل بسط داده شده زير نمايش داد:

$$P_n(x)=(-1)^{\frac{n}{2}}\frac{1.3.5...(n-1)}{2.4.6...n}\times\left[1-\frac{n(n+1)}{2!}x^2+\frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!}x^4+...\right]$$

$$Q_n(x)=(-1)^{\frac{n}{2}}\frac{2.4.6..n}{1.3.5...(n-1)}\times\left[x-\frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3+\frac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{5!}x^5+...\right]$$

- با دقت در رابطه‌ها، ملاحظه مي‌شود كه $P_n(x)$ ، هنگامي كه n عدد فرد يا زوج باشد، داراي تعداد محدودي جمله است. اما $Q_n(x)$ ، هنگامي‌كه n فرد يا زوج باشد، يك سري نامتناهي است.
- چند جمله‌اي $P_n(x)$ براي درجه هاي n=0 تا n=5 به صورت زير ملاحظه مي شود:

$$P_0(x)=1, P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1), P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$$

(162-3)

$$P_1(x)=x, P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x), P_5(x)=\frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x)$$

- شكل كلي تابع لژاندر نوع اول را مي‌توان به‌صورت زير نيز ارايه داد:

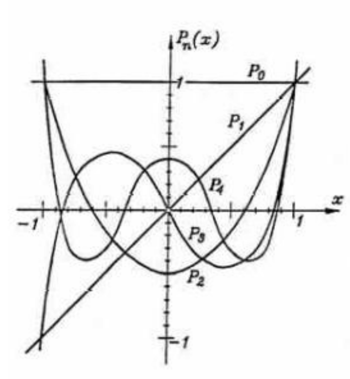
$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k}\qquad \begin{cases} N=\frac{n}{2} & n= \text{عدد زوج} \\ N=\frac{n-1}{2} & n= \text{عدد فرد} \end{cases}$$

(163-3)

- سري لژاندرنوع دوم، $Q_n(x)$ ، براي درجه هاي و نيز به شكل زير ملاحظه مي شودكه مجموعه هاي نامتناهي هستند:

$$Q_0(x)=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{7}x^7+.....$$

$$Q_1(x)=-1+x^2+\frac{1}{3}x^4+\frac{1}{5}x^6+.....$$

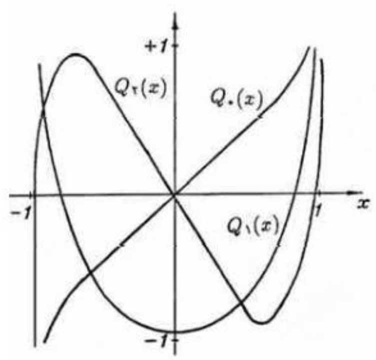


شکل (3-6) چندجمله‌اي لژاندر نوع اول

- چندجملـه‌اي لژانـدر نـوع اول در صـفر داراي مقدار معينـي است. به‌طوري‌که:

$$P_n(1)=1 \qquad (164\text{-}3)$$

$$P_n(-1)=(-1)^n$$



شکل (3-7) سري لژاندر نوع دوم

- سري لژاندر نوع دوم در نقطه هاي 1 و 1- نـامعين است و به سمت بي‌نهايت ميل مي‌كند، به‌طوري‌که:

$$Q_n(1)=+\infty \qquad (165\text{-}3)$$

$$Q_n(-1)=(-1)^{n+1}\infty$$

- معادله‌هاي:

$$Q_n(x)=(-1)^{\frac{(n+1)}{2}}\frac{2.4.6...(n-1)}{1.3.5...n}u_1(x) \qquad Q_n(x)=(-1)^{\frac{n}{2}}\frac{2.4.6...n}{1.3.5...(n-1)}u_2(x)$$

شکل تـابع $Q_n(x)$ را نـشان مـي‌دهند. شكل ديگري از سري لژاندر نوع دوم از درجة صفر را مي‌توان با كمي محاسبة رياضي، به‌صورت زير نشان

$$Q_0(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}ln(\frac{1+x}{1-x}) & |x|<1\\ \frac{1}{2}ln(\frac{x+1}{x-1}) & |x|>1\end{cases} \qquad (166-3)$$

- رابطه ميان $P_n(x)$ و $Q_n(x)$ را مي‌توان به شكل زير به‌دست آورد:

$$Q_n(x)=Q_0(x)P_n(x)-\frac{2n-1}{1\times n}P_{n-1}(x)-\frac{(2n-5)}{3(n-1)}P_{n-3}(x)-... \qquad (167-3)$$

- براي چند درجة مختلف (n):

$$Q_1(x)=Q_0(x)P_1(x)-1$$

$$Q_2(x)=Q_0(x)P_2(x)-\frac{3}{2}x$$

$$Q_3(x)=Q_0(x)P_3(x)-\frac{5}{2}x^2+\frac{2}{3}$$

- معمولاً به علت واگرا بودن $Q_n(x)$ در مرزهاي $x=\pm1$ و با توجه به مسايل مدل‌سازي در شرايط واقعي، و متناهي بودن تابع مسئله در اين مرزها سري $Q_n(x)$ نمي‌تواند جواب قابل قبول باشد.

<u>خواص چندجمله‌اي لژاندر نوع اول</u>

- رابطه‌هاي زير بخشي از خواص چندجمله‌اي‌هاي لژاندر نوع اول مي‌باشد.

$$P_n(-x)=(-1)^n P_n(x)$$

$$(n+1)P_{n+1}(x)+nP_{n-1}(x)=(2n+1)xP_n(x) \quad , n=1,2,3,\ldots$$

$$P'_{n+1}(x)-P'_{n-1}(x)=(2n+1)P_n(x) \quad , n=1,2,3,..$$

(168-3)

(169-3)

(170-3)

- **فرمول رودريگس (*es' Formula*)**

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \tag{171-3}$$

$$\frac{d^n P_n(x)}{dx^n}=\frac{(2n)!}{2^n n!} \tag{172-3}$$

- **خاصيت تعامد:**

$$\begin{cases} \int_{-1}^{+1} P_n(x)P_m(x)dx=0 \quad , n\neq m \\ \int_{-1}^{+1} P_n^2(x)dx=\frac{2}{2n+1} \end{cases} \tag{173-3}$$

فصل پنجم

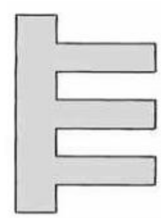
كاربرد معادله‌هاي بسل

مقدمه

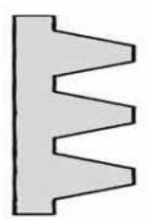
- در مدل‌سازي ديفرانسيلي فصل چهارم ملاحظه شد، چنانچه فرمول‌بندي در شرايط پايا انجام شود و تابع هدف فقط تابع يك بعدي از مكان بوده و عبارت نفوذ كميت نيزمهم باشد، نتيجة فرمول‌بندي مسئله به يك معادلة ديفرانسيل معمولي رتبة دوم مي‌انجامد. از طرفي معادلة ديفرانسيل حاصل برحسب نوع سيستم مورد مطالعه ممكن است داراي ضرايب ثابت يا ضرايب متغير باشد.
- معمولاً مدل‌سازي در مختصات كارتزين منجر به معادله‌هايي با ضرايب ثابت مي‌شود. ولي درمدل‌سازي در سطوح گسترش يافته با سطح مقطع متغير، و در سيستم‌هاي مختصات استوانه‌اي يا كروي (در جهت شعاع) به معادله‌هاي ديفرانسيل با ضرايب متغير مي‌انجامد كه بيشتر اين معادله‌ها، از نوع معادله‌هاي بسل يا قابل تبديل به بسل هستند

<u>سطوح گسترش یافته (پره‌ها، تیرك‌ها و ...)</u>

- سطح يك ديواره به دو روش قابل گسترش است، يكي با سطح مقطع ثابت و ديگري با سطح مقطع متغير.
- معمول‌ترين سطوح گسترش‌يافته در سه دستة پره‌هاي مستقيم، دوراني و سوزني تقسيم‌بندي مي‌شوند.
- براي تعيين ميزان انتقال حرارت از سطوح گسترش‌يافته، ابتدا نحوة توزيع دما، با استفاده از فرمول‌بندي ديفرانسيلي، بررسي مي‌شود.



الف - سطح گسترش‌يافته با مقطع ثابت

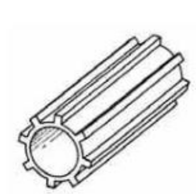


ب - سطح گسترش‌يافته با مقطع متغير

الف - پرة مستقيم(*straight fin*)

ب - پرة دوراني(*annular fin*)

ج - پرة سوزني(*pin fin*)



- براي مدل‌سازي اين سطوح، فرض‌هاي زير درنظرگرفته مي‌شود:

- ضخامت پره در مقايسه با طول آن ناچيز است. بنابراين از توزيع دماي عرضي در مقايسه با توزيع دماي طولي صرف‌نظر مي‌شود.
- ضريب هدايت حرارتي پره ثابت است.
- ضريب انتقال حرارت محيط ثابت است.
- شرايط پايا برقرار است.

- با اين فرض‌ها، دماي پره (T) فقط تابع طول پره (x) بوده و جزء حجم مورد مطالعه داراي بعد كوچك dx خواهد بود.

- فرمول‌بندي انتقال حرارت براي يك پره به‌صورت زير حاصل مي‌شود:

$$\frac{d}{dx}\left(KA\frac{dT}{dx}\right)-hP(T-T_{\infty})=0$$ (1-5)

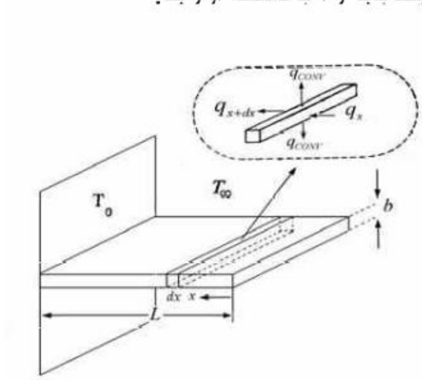
- A سطح مقطع و P محيط پره است. همچنين براي حل اين معادله دو شرط مرزي در ابتدا و انتهاي پره لازم است. تغيير متغير $\theta=T-T_{\infty}$ براي همگن كردن و سادگي در حل معادله انجام مي‌شود و معادلة زير حاصل مي‌گردد.

(2-5)

$$\frac{d}{dx}\left(A\frac{d\theta}{dx}\right)-\frac{hP}{K}\theta=0$$

- چنانچه سطح مقطع پره متغير باشد، بايد با توجه به شكل پره، تابعيت $A(x)$ و $P(x)$ مشخص شود.

- **مسئلة5-1-** شكل (5-3) پره‌اي مستقيم با سطح مقطع ثابت، با طول محدود L و ضخامت b را نشان مي‌دهد. دماي پاية پره T_0 و انتهاي پره عايق شده‌است. ضريب انتقال حرارت و دماي محيط h T_∞ به‌ترتيب و است. معادلة توزيع دما در پره و ميزان انتقال حرارت در شرايط بالا را به‌دست آوريد.



شكل (5-3)-انتقال حرارت در پرة مستقيم با سطح مقطع ثابت

<u>حل مسئله</u>

- در حل مسائل پره‌ها، بهتر است مبدأ مختصات در نوك پره درنظر گرفته‌شود، زيرا در هنگام اعمال شرايط مرزي، حل مسئله، بويژه در مورد پره‌هايي با سطح مقطع متغير، ساده‌تر خواهد شد. بنابراين:

$$\begin{cases} \frac{d\theta(0)}{dx} = 0 \\ \theta(L) = T_0 - T_\infty = \theta_0 \end{cases} \qquad (3\text{-}5)$$

- معادلة (2) در اين مسئله به صورت زير تبديل مي‌گردد و با روش عملگر مشتق و اعمال شرايط مرزي بالا حل مي‌شود:

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - \frac{hP}{KA}\theta = 0 \qquad (4\text{-}5)$$

$$\frac{\theta(x)}{\theta_0} = \frac{cosh(mx)}{cosh(mL)} \qquad (5\text{-}5)$$

- به‌طوري كه: $m = \sqrt{\frac{hP}{KA}}$

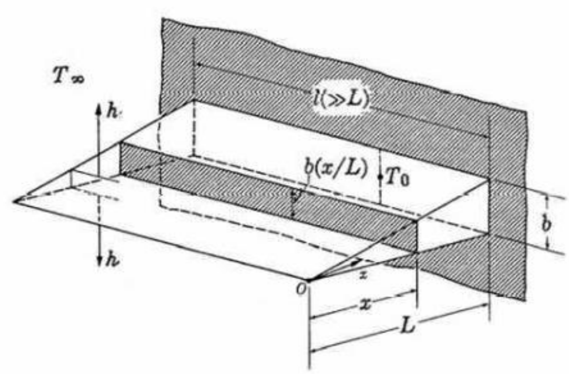
• در شـرایط پایـا، نـرخ انتقـال حـرارت از پـره بـه محـیط را مـي‌تـوان بـه كمـك تعیـین شـار انتقـال حـرارت از پایـة پـره به‌دست آورد، یعني:

$$q_{total} = +KA \frac{d\theta}{dx}\Big|_{x=L} \qquad (6\text{-}5)$$

• كه نتیجه مي‌شود:

$$q_{total} = \sqrt{hPKA}\,\theta_0 \tanh(mL) \qquad (7\text{-}5)$$

• **مسئلة 5-2-** یك پرة مستقیم با سطح مقطع مثلث و دماي پایه در شكل (5-4) نشان داده شده‌است. توزیع دما و انتقال حرارت را در شرایط پایا به‌دست آورید.



شكل (5-4) انتقال حرارت در پرة مستقیم با سطح مقطع متغیر

حل مسئله

- براي اينكه توزيع دما يك‌بعدي فرض شود، لازم است $\frac{L}{l} << 1$. همچنين اگر $\frac{b}{L} << 1$ باشد، مي‌توان محيط پره (P) را ثابت در نظر گرفت.
- با توجه به شكل، در اين پره، بايد رابطة ضخامت (y) برحسب طول پره به‌دست آيد. با اعمال اصل تشابه رابطة زير
مي‌شود:

$$\frac{x}{L}=\frac{y}{b} \qquad (8\text{-}5)$$

- به‌اين ترتيب سطح مقطع و محيط پره به‌صورت ت
مي‌آيد:

$$A = yl = b(\frac{x}{L})l$$

$$P = 2y + 2l \qquad (9\text{-}5)$$

- و نيز: $P \cong 2l$
- و چون $y << l$
- به اين‌ترتيب معادلة (2) به معادلة زير تبدي

$$\frac{d}{dx}(x\frac{d\theta}{dx}) - \frac{2hL}{Kb}\theta = 0$$

- معادلة (10) يك معادلة ديفرانسيل با ضرايب متغير است كه با استفاده از شكل كلي معادله‌هاي بسل حل مي‌شود. با استفاده از جدول (3-3) ثابت‌هاي معادلة كلي به صورت زير هستند:

$$\begin{cases} \alpha = 1, \beta = 0, \gamma = \pm im,\ m = \sqrt{\dfrac{2hL}{Kb}} \\ v = 0,\ \mu = 2, \dfrac{v}{\mu} = 0 \end{cases}$$

- باتوجه به موهومي بودن γ جواب‌ها از نوع بسل تغييريافته‌اند و با توجه به اينكه رتبة معادله صفر است، بنابراين يك جواب از نوع بسل I و جواب ديگر از نوع بسل K خواهدبود. بنابر
عبارت‌اند از:

$$\theta(x) = C_1 I_0(2mx^{\frac{1}{2}}) + C_2 K_0(2mx^{\frac{1}{2}})$$

- براي تعيين ثابت‌هاي عمومي معادله، از شرايط مرزي استفاده مي‌شود.
- شرايط مرزي مسئله: $\theta(0) =$ محدود $\quad \frac{d\theta(0)}{dx} = 0$

$$\theta(L) = T_0 - T_\infty = \theta_0$$

- از آنجا كه: $\lim_{x \to 0} K_0(x) \to$ نامحدود

نامحدود بودن دماي نوك پره قابل قبول نيست، بنابراين مي‌توان $C_2 = 0$ نتيجه گرفت:

- با اعمال شرط مرزي ديگر C_1 به‌دست مي‌آيد:

$$C_1 = \frac{\theta_0}{I_0(2mL^{\frac{1}{2}})} \quad (12\text{-}5)$$

- بنابراين توزيع دماي پره حاصل مي‌گردد:

$$\frac{\theta(x)}{\theta_0} = \frac{I_0(2mx^{\frac{1}{2}})}{I_0(2mL^{\frac{1}{2}})} \quad (13\text{-}5)$$

- نرخ انتقال حرارت پره از رابطة (6) به‌دست مي‌آيد:

$$q_{total} = +KA_0\left(\frac{d\theta}{dx}\right)_{x=L}$$

- به طوري كه A سطح مقطع پايه پره است. عبارت مشتق دما نيز ازطريق مشتق تابع بسل (I_0) تعيين مي‌شود. براي تعيين مشتق (I_0) از معادلة مقابل استفاده مي‌شود، ولي مطابق معادلة (13) متغير تابع بسل، $u = 2mx^{\frac{1}{2}}$ است $I_0(u)$، بنابراين مشتق تابع به صورت زير تعيين مي شود:

$$\frac{d}{dx}\left[Z_0(mx)\right]=\begin{cases}-mZ_1(mx) & Z=J,Y,K\\ mZ_1(mx) & Z=I\end{cases}$$

$$\frac{d}{dx}\left[I_0(u)\right]=\frac{d}{du}\left[I_0(u)\right]\frac{du}{dx}$$

- بنابراين:

$$\frac{d}{dx}\left[I_0(u)\right]=mx^{\frac{-1}{2}}I_1(2mx^{\frac{1}{2}})$$

(14-5)

- درنهايت نرخ انتقال حرارت پره به‌صورت زير به‌دست مي‌آيد:

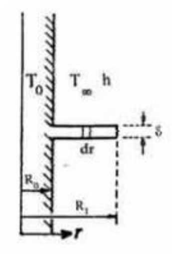
$$q_{total}=\sqrt{2hKb}\,\theta_0\frac{I_1(2mL^{\frac{1}{2}})}{I_0(2mL^{\frac{1}{2}})}$$

(15-5)

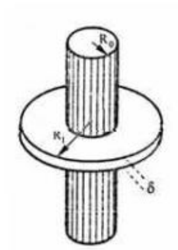
مدل يك بعدي در مختصات استوانه‌اي

- اگر مدل مورد بررسي در سيستمي به شكل استوانه فرمول‌بندي شود و چنانچه متغير مستقل مدل فقط شعاع استوانه باشد، در اين صورت نتيجة فرمول‌بندي مدل، ODE با ضرايب متغير است كه معمولا به شكل عمومي معادله‌هاي بسل قابل حل است.

- **مسئله 4-5-** يك پرة دوار مطابق شكل (6-5) به شعاع بيروني R_1 و ضخامت δ در محيطي به دماي T_∞ و ضريب انتقال حرارت h قرار دارد. ميله‌اي كه پره روي آن قرار دارد داراي شعاع R_0 و دماي ثابت T_0 است. توزيع دماي پاياي پره را به‌دست آوريد.



ب- مقطع پره



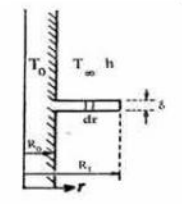
الف- پره دوار

حل مسئله

- باتوجه به اينكه ميلة مركزي داراي دماي ثابت است و توزيع دما فقط در پره وجود دارد، مدل‌سازي حرارت فقط روي پره انجام مي‌شود.
- **فرض‌هاي مسئله**

- شرايط پايا برقرار است.
- توزيع دما در پره فقط تابع شعاع استوانه است.
- در انتهاي پره، انتقال حرارت با محيط به دماي T_∞ انجام مي‌شود. يعني در $r = R_1$ شرط مرزي نوع سوم برقرار است.
- دماي پاية پره در $r = R_0$ مقدار ثابت T_0 است.

- جزء حجمي با بعد كوچك dr درون پره انتخاب و فرمول‌بندي حرارت درآن انجام مي‌شود:



$$(qA)_r-(qA)_{r+dr}-2h(T-T_\infty)S=0 \qquad (27\text{-}5)$$

$$A=2\pi r\delta\ ,\ S=2\pi r dr$$

- به‌طوري كه:

$$\theta=T-T_\infty$$

- با تغيير متغير نتيجه مي‌شود:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\theta}{\partial r}\right)-\frac{2h}{\delta K}\theta=0 \qquad (28\text{-}5)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\theta}{\partial r}\right)-m^2 r\theta=0 \qquad (29\text{-}5)$$

- به‌طوري كه:

$$m^2=\frac{2h}{\delta K}$$

شرايط مرزي:

$$\begin{cases} r=R_0, T=T_0 \Rightarrow \theta(0)=T_0-T_\infty=\theta_0 \\ r=R_1, -K\dfrac{\partial T}{\partial r}=h(T-T_\infty) \Rightarrow \dfrac{\partial\theta(R_1)}{\partial r}=-\dfrac{h}{K}\theta(R_1) \end{cases} \qquad (30\text{-}5)$$

- با توجه به جدول (3-3) پارامترهاي α، β و γ براي معادلة (29) مشخص مي‌شوند:

$$\begin{cases} \alpha=1\ ,\ \beta=1\ ,\ \gamma=\pm im \\ v=0\ ,\ \mu=1\ ,\ \dfrac{v}{\mu}=0 \end{cases}$$

- بنابراين جواب عمومي معادلة (29) به: $\theta(r)=C_1 I_0(mr)+C_2 K_0(mr)$

(31-5)

- با اع

$$\begin{cases} \theta_0=C_1 I_0(mR_0)+C_2 K_0(mR_0) \\ C_1 m I_1(mR_1)-C_2 m K_1(mR_1)=\dfrac{-h}{K}\left[C_1 I_0(mR_1)+C_2 K_0(mR_1)\right] \end{cases} \qquad (32\text{-}5)$$

- درنتیجة حل دستگاه معادلـه‌هاي (32) ثابـت‌هـاي C_1 و C_2 به‌دست مي‌آیند:

(33-5)

$$C_1=\theta_0\frac{\frac{Km}{h}K_1(mR_1)-K_0(mR_1)}{\frac{Km}{h}K_0(mR_0)I_1(mR_1)+K_0(mR_0)I_0(mR_1)+\frac{Km}{h}I_0(mR_0)K_1(mR_1)-I_0(mR_1)K_0(mR_1)}$$

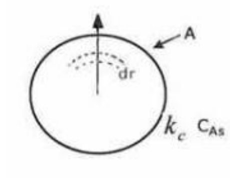
(34-5)

$$C_2=\theta_0\frac{\frac{Km}{h}I_1(mR_1)-I_0(mR_1)}{\frac{Km}{h}K_0(mR_0)I_1(mR_1)+K_0(mR_0)I_0(mR_1)+\frac{Km}{h}I_0(mR_0)K_1(mR_1)-I_0(mR_1)K_0(mR_1)}$$

مدل يك‌بعدي در مختصات كروي

- اگر مـدل مـورد بررسـي در سيـستمي بـه شـكل كـره فرمول‌بندي شود و متغير مستقل نيز فقط شـعاع كـره باشـد، در ايـن صـورت معادلـة حاصـل ODE بـا ضرايب متغيراست كه معمولا به شكل عمـومي توابـع بسل قابل حل است.

- **مسئلة5-5-** مطابق شکل(5-7)، در يك كاتاليزور متخلخل كروي به شعاع R واکنش درجهٔ اول ($A \to B$) انجام مي‌شود. مادة A با ضريب نفوذ موثر D_{eff} به داخل حفرات دانه نفوذ كرده و در سطوح داخلي كاتاليزور به B تبديل مي‌شود. معادلهٔ سرعت واكنش به‌صورت $-r_A = kC_A$ است به‌طوري‌که، k ثابت سرعت به‌ازاي واحد حجم كاتاليزور است. جريان گاز اطراف دانه داراي غلظت ثابت C_{As} بوده و ضريب انتقال جرم مادة A از لاية گازي اطراف دانه kc است.توزيع غلظت A را در كاتاليزور به‌دست آوريد.



شكل(5-7)- دانه كاتاليزور كروي

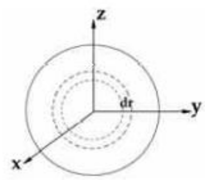
- در اين مسئله نفوذ همراه با واكنش مؤثر است. همچنين با توجه به اين‌كه گاز اطراف كاتاليزور داراي غلظت ثابتي از ماده واكنش‌گر است

فرض‌هاي مسئله

- شرايط پايا برقرار است.
- توزيع دما در پره فقط تابع شعاع دانه است.
- واكنش در دماي ثابت انجام مي شود.
- گاز درون دانه فاقد حركت كلي است و فقط نفوذ جزيي وجود دارد.
- ضريب نفوذ مؤثر ثابت است.
- ضريب انتقال جرم مادة A از فيلم اطراف دانه k_c است، بنابراين درسطح دانه شرط مرزي نوع سوم برقرار است.

حل مسئله

- جزء حجمي با بعد كوچك dr درون كره انتخاب و فرمول‌بندي حرارت روي آن انجام مي‌شود.



$$-\frac{\partial(N_A S)}{\partial r}dr + (r_A)V = 0 \tag{60-5}$$

- به‌طوري‌كه: $S = 4\pi r^2 \ , V = 4\pi r^2 dr \ , N_A = J_A$
- بنابراين معادله ديفرانسيل زير بر اساس متغيرهاي بدون بعد حاصل مي‌شود:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{r}}(\bar{r}^2 \frac{\partial \overline{C}_A}{\partial \bar{r}}) - \frac{kR^2}{D_{eff}}\bar{r}^2\overline{C}_A = 0 \tag{61-5}$$

- به‌طوري‌كه:

$$\overline{C}_A = \frac{C_A}{C_{As}} \ , \quad \bar{r} = \frac{r}{R}$$

- شرايط مرزي:

$$\overline{C}_A(0) = \tag{62-5}$$

$$- D_{eff} \ \frac{d\overline{C}_A(1)}{d\bar{r}} = RK_C\left[\overline{C}_A(1) - 1\right] \tag{63-5}$$

- جواب معادلة (61) با كمك جدول (3-3) به‌دست مي‌آيد، به‌طوري‌كه:

$$\begin{cases} \alpha = 2 \, , \beta = 2 \, , \gamma = \pm i\varphi \, , \varphi = \sqrt{\dfrac{R^2 k}{D_{eff}}} \\ v = -\dfrac{1}{2} \, , \mu = 1 \, , \dfrac{v}{\mu} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

- بنابراين تابع غلظت به‌صورت تركيب خطي زير حاصل مي‌شود:

$$\overline{C}_A(\bar{r}) = C_1\bar{r}^{-\frac{1}{2}}I_{-\frac{1}{2}}(\varphi\bar{r}) + C_2\bar{r}^{-\frac{1}{2}}I_{\frac{1}{2}}(\varphi\bar{r}) \tag{64-5}$$

- با توجه به معادله‌هاي (3-140)و(3-141) ميان تابع $I(x)$ با رتبه υ=1/2 و توابع هيپربوليك رابطه وجود دارد، بنابراين مي‌توان معادلة (64) را نيز به‌شكل هيپربوليك تبديل كرد:

(65-5)

$$\overline{C}_A(\bar{r}) = C_1\bar{r}^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{\pi\varphi\bar{r}}\right)^{\frac{1}{2}} cosh(\varphi\bar{r}) + C_2\bar{r}^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{\pi\varphi\bar{r}}\right)^{\frac{1}{2}} sinh(\varphi\bar{r})$$

- پس از مرتب كردن و جداكردن متغيرها ازثابت هادر معادلة بالا نتيجه مي‌شود:

$$\overline{C}_A(\bar{r}) = \frac{D_1}{\bar{r}} cosh(\varphi\bar{r}) + \frac{D_2}{\bar{r}} sinh(\varphi\bar{r})$$

(66-5)

- در اين صورت ثابت‌هاي جديد از طريق شرايط مرزي به‌دست مي‌آيند.

- با توجه به شرط مرزي(62):

$$D_1 = 0$$

- بنابراين:

$$\overline{C}_A(\bar{r}) = \frac{D_2}{\bar{r}} sinh(\varphi\bar{r})$$

(67-5)

- با جاي‌گذاري معادلة (67) در شرط مرزي (63) ثابت به‌دست مي‌آيد:

$$D_2\varphi cosh(\varphi) - D_2 sinh(\varphi) = -\frac{RK_C}{D_{eff}}(D_2 sinh(\varphi) - 1)$$

(68-5)

(69-5)

$$D_2 = \frac{RK_C / D_{eff}}{\varphi cosh(\varphi) + (RK_C / D_{eff} - 1) sinh(\varphi)}$$

فصل 6

روشهاي تفاضل محدود

مقدمه

- اغلب مدلهاي رياضي در رشته هاي علوم و مهندسي، به شكل معادلات ديفرانسيل هستند.
- مسائلي كه داراي يک متغير مستقل هستند، با معادلات ديفرانسيل معمولي، و مسائلي كه داراي بيش از يک متغير مستقلند، با معادلات ديفرانسيل پاره اي مدل مي شوند.
- برخي از معادلات ديفرانسيل معمولي و نيز تعداد اندكي از معادلات ديفرانسيل پاره اي، داراي راه حل هاي تحليلي هستند. اما اكثر معادلات ديفرانسيل، به خصوص نوع غير خطي آنها و نيز دستگاه معادلات ديفرانسيل همزمان، راه حل تحليلي ندارند و بايد از تكنيک هاي عددي براي حل آنها استفاده كرد.

مفاهيم مورد نياز

اساس روشهاي حل عددي در حقيقت بر مفهوم تفاضل هاي محدود (*finite differences*) قرار دارد.

مشتق

در محاسبات ديفرانسيلي، تعريف مشتق به شكل زير است:

$$\frac{df(x)}{dx}\Big|_{x_0} = f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

كه در روش تفاضل محدود، مقدار مخرج به صفر ميل نمي كند، ولي مقداري كوچک است. اگر اين مقدار را با h نشان دهيم:

$$h = x - x_0$$

مي توانيم بنويسيم:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

- محاسبات در روش تفاضل محدود، به کمک داده هاي گسسته (*discrete*) انجام مي شود که اين داده ها مي توانند نشان دهنده يک سري داده هاي تجربي و آزمايشگاهي باشند:

$$y_{i-3} \quad y_{i-2} \quad y_{i-1} \quad y_i \quad y_{i+1} \quad y_{i+2} \quad y_{i+3}$$

همچنين مي توانند به شکل مقادير گسسته اي از يک تابع پيوسته باشند:

$$y(x-3h) \quad y(x-2h) \quad y(x-h) \quad y(x) \quad y(x+h) \quad y(x+2h) \quad y(x+3h)$$

عملگرهاي خطي

عملگرهاي خطي که در روش تفاضل محدود به کار مي روند، به قرار زيرند:

D = differential operator
I = integral operator
E = shift operator
Δ = forward difference operator
∇ = backward difference operator
μ = averager operator

از آنجايي که در ادامه از سري تيلور استفاده هاي زيادي خواهيم کرد، فرم کا

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f^{I}(x_0) + \frac{(x-x_0)^2 f^{II}(x_0)}{2!} + \frac{(x-x_0)^3 f^{III}(x_0)}{3!} + \dots + \frac{(x-x_0)^n f^{(n)}(x_0)}{n!} + R_n(x)$$

تعریف عملگرها

- عملگر مشتق

$$\mathrm{D}\,y(x) = \frac{dy(x)}{dx} = y'(x)$$

- عملگر انتگرال

$$\mathrm{I}\,y(x) = \int_x^{x+h} y(x)\,dx$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$I = D^{-1}$$

- عملگر انتقال

$$\mathrm{E}\,y(x) = y(x+h)$$

عکس این عملگر به شکل مقابل است:

$$\mathrm{E}^{-1}y(x) = y(x-h)$$

در صورتي که عملگر انتقال به توان بالاتر از یک برسد، خواهیم داشت:

$$\mathrm{E}^{n}y(x) = y(x+nh)$$

تعریف عملگرها

با استفاده از بسط سري تیلور، مي توان عملگر انتقال را با عملگر مشتق مربوط ساخت:

$$y(x+h) = y(x) + \frac{h}{1!}y'(x) + \frac{h^2}{2!}y''(x) + \frac{h^3}{3!}y'''(x) + \dots$$

بنابراین با استفاده از عملگر مشتق خواهیم داشت:

$$y(x+h) = y(x) + \frac{h}{1!}Dy(x) + \frac{h^2}{2!}D^2y(x) + \frac{h^3}{3!}Dy(x) + \dots$$

در صورتیکه از $y(x)$ در طرف راست عبارت، فاکتور بگیریم، داریم:

$$y(x+h) = \left(1 + \frac{h}{1!}D + \frac{h^2}{2!}D^2 + \frac{h^3}{3!}D^3 + \dots\right)y(x)$$

عبارت داخل پرانتز برابراست با:

$$e^{hD} = 1 + \frac{h}{1!}D + \frac{h^2}{2!}D^2 + \frac{h^3}{3!}D^3 + \dots$$

بنابراین:

$$y(x+h) = e^{hD}y(x)$$

تعريف عملگرها

با مقايسه دو عبارت مقابل:

$$E\,y(x) = y(x+h) \qquad y(x+h) = e^{hD}y(x)$$

خواهيم داشت:

$$E = e^{hD}$$

به طريق مشابه براي عمل انتقال عكس نيز مي توان نوشت:

$$y(x-h) = y(x) - \frac{h}{1!}y'(x) + \frac{h^2}{2!}y''(x) - \frac{h^3}{3!}y'''(x) + \dots$$

$$y(x-h) = \left(1 - \frac{h}{1!}D + \frac{h^2}{2!}D^2 - \frac{h^3}{3!}D^3 + \dots\right)y(x)$$

$$e^{-hD} = 1 - \frac{h}{1!}D + \frac{h^2}{2!}D^2 - \frac{h^3}{3!}D^3 + \dots$$

در نتيجه:

$$E^{-1} = e^{-hD} \qquad \Rightarrow \qquad y(x-h) = e^{-hD}y(x)$$

تفاضل محدود پس رو

مقادير زير را در نظر بگيريد:

$$y_{i-3} \quad y_{i-2} \quad y_{i-1} \quad y_i \quad y_{i+1} \quad y_{i+2} \quad y_{i+3}$$

تفاضل محدود پس رو براي تابع y در i به شكل زير تعريف مي شود:

$$\nabla y_i = y_i - y_{i-1}$$

يا

$$\nabla y(x) = y(x) - y(x-h)$$

تفاضل پس رو مرتبه دوم به شكل زير است:

$$\nabla^2 y_i = \nabla(\nabla y_i) = \nabla(y_i - y_{i-1}) = \nabla y_i - \nabla y_{i-1}$$

$$= (y_i - y_{i-1}) - (y_{i-1} - y_{i-2})$$

$$\nabla^2 y_i = y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2}$$

يا

$$\nabla^2 y(x) = y(x) - 2y(x-h) + y(x-2h)$$

تفاضل پس رو مرتبه سوم نيز به شكل زير خواهد بود:

$$\nabla^3 y_i = \nabla(\nabla^2 y_i) = \nabla(y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2})$$

$$= \nabla y_i - 2\nabla y_{i-1} + \nabla y_{i-2}$$

$$= (y_i - y_{i-1}) - 2(y_{i-1} - y_{i-2}) + (y_{i-2} - y_{i-3})$$

و

$$\nabla^3 y_i = y_i - 3y_{i-1} + 3y_{i-2} - y_{i-3}$$

تفاضل محدود پس رو

تفاضل هاي پس رو مرتبه بالاتر به شكل زير خواهد بود:

$$\nabla^4 y_i = y_i - 4y_{i-1} + 6y_{i-2} - 4y_{i-3} + y_{i-4}$$

$$\nabla^5 y_i = y_i - 5y_{i-1} + 10y_{i-2} - 10y_{i-3} + 5y_{i-4} - y_{i-5}$$

ضرايب جملات چند جمله اي هاي بالا، همانند ضرايب $(a-b)^n$ است.

$n =$ مرتبه تفاضل محدود

بنابراين تفاضل محدود پس رو را مي توان به فرم كلي زير نوشت:

$$\nabla^n y_i = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \frac{n!}{(n-m)!\,m!} y_{i-m}$$

تفاضل پس رو و مشتق

مي توان رابطه بين تفاضل محدود پس رو و عملگر مشتق را بدست آورد. با توجه به عبارت ه $\nabla y(x) = y(x) - y(x-h)$ $\quad y(x-h) = e^{-hD} y(x)$

مي توان نوشت:

$$\nabla y(x) = y(x) - y(x-h) = y(x) - e^{-hD} y(x)$$
$$= (1 - e^{-hD}) y(x)$$

كه در آن:

$$\nabla = 1 - e^{-hD}$$

با استفاده از سري e^{-hD} خواهيم داشت:

$$\nabla = hD - \frac{h^2 D^2}{2} + \frac{h^3 D^3}{6} - \dots$$

براي بدست آوردن تفاضل هاي با مرتبه بالاتر، عبارت تفاضل مرتبه اول را به توان بالاتر مي ر

$$\nabla^2 = (1 - e^{-hD})^2 = (1 - 2e^{-hD} + e^{-2hD})$$

$$\nabla^3 = (1 - e^{-hD})^3 = (1 - 3e^{-hD} + 3e^{-2hD} - e^{-3hD})$$

$$\vdots$$

$$\nabla^n = (1 - e^{-hD})^n$$

تفاضل پس رو و مشتق

با باز کردن ترم هاي تواني و مرتب کردن جملات حاصل، براي تفاضل هاي مرتبه دوم و سوم خواهيم داشت:

$$\nabla^2 = h^2D^2 - h^3D^3 + \frac{7}{12}h^4D^4 - \dots \qquad \nabla^3 = h^3D^3 - \frac{3}{2}h^4D^4 + \frac{5}{4}h^5D^5 - \dots$$

همچنين مي توان فرمول هايي را بدست آورد که عملگر مشتق را بر حسب تفاضل پس رو بيان کنند:

$$e^{-hD} = 1 - \nabla$$

$$\ln e^{-hD} = -hD = \ln(1 - \nabla)$$

$$\ln(1 - \nabla) = -\nabla - \frac{\nabla^2}{2} - \frac{\nabla^3}{3} - \frac{\nabla^4}{4} - \frac{\nabla^5}{5} - \dots$$

$$hD = \nabla + \frac{\nabla^2}{2} + \frac{\nabla^3}{3} + \frac{\nabla^4}{4} + \frac{\nabla^5}{5} + \dots$$

و به طور کلي خواهيم داشت:

$$h^nD^n = \left(\nabla + \frac{\nabla^2}{2} + \frac{\nabla^3}{3} + \frac{\nabla^4}{4} + \frac{\nabla^5}{5} + \dots\right)^n$$

تفاضل محدود پس رو

Backward difference operators	Differential operators
$\nabla = hD - \frac{h^2D^2}{2} + \frac{h^3D^3}{6} - \dots$	$hD = \nabla + \frac{\nabla^2}{2} + \frac{\nabla^3}{3} + \frac{\nabla^4}{4} + \dots$
$\nabla^2 = h^2D^2 - h^3D^3 + \frac{7}{12}h^4D^4 - \dots$	$h^2D^2 = \nabla^2 + \nabla^3 + \frac{11}{12}\nabla^4 + \frac{5}{6}\nabla^5 + \dots$
$\nabla^3 = h^3D^3 - \frac{3}{2}h^4D^4 + \frac{5}{4}h^5D^5 - \dots$	$h^3D^3 = \nabla^3 + \frac{3}{2}\nabla^4 + \frac{7}{4}\nabla^5 + \dots$
$\nabla^n = (1 - e^{-hD})^n$	$h^nD^n = \left(\nabla + \frac{\nabla^2}{2} + \frac{\nabla^3}{3} + \frac{\nabla^4}{4} + \dots\right)^n$

تفاضل محدود پیش رو

همانند حالت قبل، مقادیر زیر را در نظر بگیرید:

$$y_{i-3} \quad y_{i-2} \quad y_{i-1} \quad y_i \quad y_{i+1} \quad y_{i+2} \quad y_{i+3}$$

تفاضل پیش رو به شکل زیر تعریف مي شود:

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$$

یا

$$\Delta y(x) = y(x+h) - y(x)$$

تفاضل پیش رو مرتبه دوم به شکل زیر است:

$$\Delta^2 y_i = \Delta(\Delta y_i) = \Delta(y_{i+1} - y_i) = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$$

$$= (y_{i+2} - y_{i+1}) - (y_{i+1} - y_i)$$

$$\Delta^2 y_i = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i$$

یا

$$\Delta^2 y(x) = y(x+2h) - 2y(x+h) + y(x)$$

تفاضل پیش رو مرتبه سوم نیز به شکل زیر خواهد بود:

$$\Delta^3 y_i = \Delta(\Delta^2 y_i) = \Delta(y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i)$$

$$= \Delta y_{i+2} - 2\Delta y_{i+1} + \Delta y_i$$

$$= (y_{i+3} - y_{i+2}) - 2(y_{i+2} - y_{i+1}) + (y_{i+1} - y_i)$$

$$\Delta^3 y_i = y_{i+3} - 3y_{i+2} + 3y_{i+1} - y_i$$

تفاضل محدود پیش رو

تفاضل هاي پیش رو مرتبه بالاتر به شکل زیر خواهد بود:

$$\Delta^4 y_i = y_{i+4} - 4y_{i+3} + 6y_{i+2} - 4y_{i+1} + y_i$$

$$\Delta^5 y_i = y_{i+5} - 5y_{i+4} + 10y_{i+3} - 10y_{i+2} + 5y_{i+1} - y_i$$

ضرایب جملات چند جمله اي هاي بالا، همانند ضرایب $(a-b)^n$ است.

$n =$ مرتبه تفاضل محدود

بنابراین تفاضل محدود پیش رو را مي توان به فرم کلي زیر نوشت:

$$\Delta^n y_i = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \frac{n!}{(n-m)!\,m!} y_{i+n-m}$$

تفاضل پيش رو و مشتق

مي توان رابطه بين تفاضل محدود پيش رو و عملگر مشتق را بدست آورد. با توجه به عبارت هاي $\Delta y(x) = y(x+h) - y(x)$ و $y(x+h) = e^{hD} y(x)$ مي توان نوشت:

$$\Delta y(x) = y(x+h) - y(x) = e^{hD} y(x) - y(x)$$
$$= (e^{hD} - 1) y(x)$$

كه در آن:

$$\Delta = e^{hD} - 1$$

با استفاده از سري e^{-hD} خواهيم داشت:

$$\Delta = hD + \frac{h^2 D^2}{2} + \frac{h^3 D^3}{6} + \dots$$

براي بدست آوردن تفاضل هاي با مرتبه بالاتر، عبارت تفاضل مرتبه اول را به توان بالاتر مي رسانيم:

$$\Delta^2 = (e^{hD} - 1)^2 = (e^{2hD} - 2e^{hD} + 1)$$
$$\Delta^3 = (e^{hD} - 1)^3 = (e^{3hD} - 3e^{2hD} + 3e^{hD} - 1)$$
$$\vdots$$
$$\Delta^n = (e^{hD} - 1)^n$$

تفاضل پيش رو و مشتق

با باز كردن ترم هاي تواني و مرتب كردن جملات حاصل، براي تفاضل هاي مرتبه دوم و سوم خواهيم داشت:

$$\Delta^2 = h^2 D^2 + h^3 D^3 + \frac{7}{12} h^4 D^4 + \dots \qquad \Delta^3 = h^3 D^3 + \frac{3}{2} h^4 D^4 + \frac{5}{4} h^5 D^5 + \dots$$

همچنين مي توان فرمول هايي را بدست آورد كه عملگر مشتق را بر حسب تفاضل پيش رو بيان كنند:

$$e^{hD} = 1 + \Delta$$
$$\ln e^{hD} = hD = \ln(1 + \Delta)$$
$$\ln(1 + \Delta) = \Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \frac{\Delta^4}{4} + \frac{\Delta^5}{5} - \dots$$
$$hD = \Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \frac{\Delta^4}{4} + \frac{\Delta^5}{5} - \dots$$

و به طور كلي خواهيم داشت:

$$h^n D^n = \left(\Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \frac{\Delta^4}{4} + \frac{\Delta^5}{5} - \dots \right)^n$$

تفاضل محدود پيش رو

Forward difference operators	Differential operators
$\Delta = hD + \frac{h^2D^2}{2} + \frac{h^3D^3}{6} + \dots$	$hD = \Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \frac{\Delta^4}{4} + \dots$
$\Delta^2 = h^2D^2 + h^3D^3 + \frac{7}{12}h^4D^4 + \dots$	$h^2D^2 = \Delta^2 - \Delta^3 + \frac{11}{12}\Delta^4 - \frac{5}{6}\Delta^5 + \dots$
$\Delta^3 = h^3D^3 + \frac{3}{2}h^4D^4 + \frac{5}{4}h^5D^5 + \dots$	$h^3D^3 = \Delta^3 - \frac{3}{2}\Delta^4 + \frac{7}{4}\Delta^5 - \dots$
$\Delta^n = (e^{hD} - 1)^n$	$h^nD^n = \left(\Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \frac{\Delta^4}{4} + \dots\right)^n$

تفاضل محدود مرکزي

اگر داده مبنا را y_i در نظر بگيريم، داده هاي قبلي و بعدي به اندازه *h/2* از آن فاصله مي گيرند، به شکل زير:

$$y_{i-2} \quad y_{i-1\frac{1}{2}} \quad y_{i-1} \quad y_{i-\frac{1}{2}} \quad y_i \quad y_{i+\frac{1}{2}} \quad y_{i+1} \quad y_{i+1\frac{1}{2}} \quad y_{i+2}$$

که معادل است با:

$$y(x-2h) \quad y(x-1\tfrac{1}{2}h) \quad y(x-h) \quad y(x-\tfrac{1}{2}h) \quad y(x) \quad y(x+\tfrac{1}{2}h) \quad y(x+h) \quad y(x+1\tfrac{1}{2}h) \quad y(x+2h)$$

تفاضل مرکزي مرتبه اول به شکل زير است:

$\delta y(x) = y(x + \tfrac{1}{2}h) - y(x - \tfrac{1}{2}h)$ يا $\delta y_i = y_{i+1/2} - y_{i-1/2}$

تفاضل مرکزي مرتبه دوم به شکل زير خواهد بود:

$$\delta^2 y(x) = y(x + h) - 2y(x) + y(x - h)$$

$$\delta^2 y_i = \delta(\delta y_i) = \delta(y_{i+\frac{1}{2}} - y_{i-\frac{1}{2}}) = \delta y_{i+\frac{1}{2}} - \delta y_{i-\frac{1}{2}}$$
$$= (y_{i+1} - y_i) - (y_i - y_{i-1})$$
$$\delta^2 y_i = y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}$$

تفاضل محدود مركزي

همچنين براي تفاضل مركزي مرتبه سوم داريم:

$$\delta^3 y_i = \delta(\delta^2 y_i) = \delta(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1})$$
$$= \delta_{i+1} - 2\delta y_i + \delta y_{i-1}$$
$$= (y_{i+1\frac{1}{2}} - y_{i+\frac{1}{2}}) - 2(y_{i+\frac{1}{2}} - y_{i-\frac{1}{2}}) + (y_{i-\frac{1}{2}} - y_{i-1\frac{1}{2}})$$
$$\delta^3 y_i = y_{i+1\frac{1}{2}} - 3y_{i+\frac{1}{2}} + 3y_{i-\frac{1}{2}} - y_{i-1\frac{1}{2}}$$

و براي مرتبه هاي بالاتر:

$$\delta^4 y_i = y_{i+2} - 4y_{i+1} + 6y_i - 4y_{i-1} + y_{i-2}$$

$$\delta^5 y_i = y_{i+2\frac{1}{2}} - 5y_{i+1\frac{1}{2}} + 10y_{i+\frac{1}{2}} - y_{i-\frac{1}{2}} + 5y_{i-1\frac{1}{2}} - y_{i-2\frac{1}{2}}$$

به طور كلي خواهيم داشت:

$$\delta^n y_i = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \frac{n!}{(n-m)!\,m!} y_{i-m+n/2}$$

تفاضل محدود مركزي

بايد توجه داشت كه تفاضل هاي مركزي با مرتبه فرد، شامل نقاطي بين نقاط اصلي است، اما تفاضل مركزي با مرتبه زوج، شامل نقاط اصلي مي باشد.

اين مساله مشكل ساز است!

براي حل مشكل، عملگر م... ، كنيم:

$$\mu = \frac{1}{2}[E^{1/2} + E^{-1/2}]$$

تاثير اين عملگر بر رو... تبه فرد به شكل زير است:

$$\mu\delta y_i = \frac{1}{2}(E^{1/2}\delta y_i + E^{-1/2}\delta y_i)$$
$$= \frac{1}{2}(\delta y_{i+\frac{1}{2}} + \delta y_{i-\frac{1}{2}})$$
$$= \frac{1}{2}[(y_{i+1} - y_i) + (y_i - y_{i-1})]$$
$$= \frac{1}{2}(y_{i+1} - y_{i-1})$$

تفاضل محدود مركزي

براي تفاضل مركزي مرتبه سوم داريم:

$$\mu\delta^3 y_i = \frac{1}{2}(E^{1/2}\delta^3 y_i + E^{-1/2}\delta^3 y_i)$$
$$= \frac{1}{2}(\delta^3 y_{i+½} + \delta^3 y_{i-½})$$
$$= \frac{1}{2}[(y_{i+2} - 3y_{i+1} + 3y_i - y_{i-1}) + (y_{i+1} - 3y_i + 3y_{i-1} - y_{i-2})]$$
$$= \frac{1}{2}(y_{i+2} - 2y_{i+1} + 2y_{i-1} - y_{i-2})$$

اشاره: دقت تفاضل هاي مركزي، پيش رو و پس رو

تفاضل مركزي و مشتق

مي توان رابطه اي بين تفاضل مركزي و عملگر مشتق برقرار كرد:

$$\mu\delta y(x) = \frac{1}{2}[y(x+h) - y(x-h)]$$
$$= \frac{1}{2}[e^{hD}y(x) - e^{-hD}y(x)]$$
$$= \frac{1}{2}(e^{hD} - e^{-hD})y(x)$$

به عبارت ديگر:

$$\mu\delta = \frac{1}{2}(e^{hD} - e^{-hD}) = \sinh hD$$

با استفاده از بسط توابع هيپربوليک مي توان نوشت:

$$\sinh hD = hD + \frac{(hD)^3}{3!} + \frac{(hD)^5}{5!} + \frac{(hD)^7}{7!} + \dots$$

پس خواهيم داشت:

$$\mu\delta = hD + \frac{h^3D^3}{6} + \frac{h^5D^5}{120} + \frac{h^7D^7}{5040} + \dots$$

تفاضل مركزي و مشتق

به همين شكل براي مرتبه دوم داريم:

$$\delta^2 y(x) = y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)$$
$$= e^{hD}y(x) - 2y(x) + e^{-hD}y(x)$$
$$= (e^{hD} - 2 + e^{-hD})y(x)$$

كه معادل است با:

$$\delta^2 = e^{hD} + e^{-hD} - 2 = 2(\cosh hD - 1) = E + E^{-1} - 2$$

با بسط جملات تواني خواهيم داشت:

$$\delta^2 = h^2D^2 + \frac{h^4D^4}{12} + \frac{h^6D^6}{360} + \frac{h^8D^8}{20160} + \cdots$$

به همين ترتيب براي مراتب بالاتر به عبارت هاي زير مي رسيم:

$$\mu\delta^3 = h^3D^3 + \frac{h^5D^5}{4} + \frac{h^7D^7}{40} + \ldots$$

$$\delta^4 = h^4D^4 + \frac{h^6D^6}{6} + \frac{h^8D^8}{80} + \ldots$$

تفاضل مركزي و مشتق

براي به دست آوردن رابطه اي كه بتواند عملگر مشتق را بر حسب عملگر ميانگين بدهد، بايد ابتدا رابطه اي جبري بين δ و μ برقرار كرد:

$$\mu = \frac{1}{2}[E^{1/2} + E^{-1/2}] \Rightarrow \mu^2 = \frac{1}{4}(E + E^{-1} + 2)$$

$$\delta^2 + 2 = E + E^{-1}$$

همچنين داريم:

$$\mu^2 = \frac{\delta^2}{4} + 1$$

بنابراين:

$$hD = \sinh^{-1}\mu\delta$$

از طرفي:

$$\sinh^{-1}\mu\delta = \mu\delta - \frac{(\mu\delta)^3}{6} + \frac{3(\mu\delta)^5}{40} - \ldots$$

و:

درنتيجه:

$$hD = \mu\delta - \frac{\mu^3\delta^3}{6} + \frac{3\mu^5\delta^5}{40} - \ldots$$

تفاضل مرکزي و مشتق

با توجه به: $\mu^2 = \frac{\delta^2}{4} + 1$

خواهيم داشت: $hD = \mu(\delta - \frac{\delta^3}{6} + \frac{\delta^5}{30} - \dots)$

اين رابطه را براي تفاضل هايي با مرتبه بالاتر مشاهده مي کنيد:

$$h^2D^2 = \delta^2 - \frac{\delta^4}{12} + \frac{\delta^6}{90} - \dots$$

$$h^3D^3 = \mu(\delta^3 - \frac{\delta^5}{4} + \frac{7\delta^7}{120} - \dots)$$

$$h^4D^4 = \delta^4 - \frac{\delta^6}{6} + \frac{7\delta^8}{240} - \dots$$

تفاضل محدود مرکزي

Central difference operators	Differential operators
$\mu\delta = hD + \frac{h^3D^3}{6} + \frac{h^5D^5}{120} + \frac{h^7D67}{5040} + \dots$	$hD = \mu(\delta - \frac{\delta^3}{6} + \frac{\delta^5}{30} - \frac{\delta^7}{140} \dots)$
$\delta^2 = h^2D^2 + \frac{h^4D^4}{12} + \frac{h^6D^6}{360} + \frac{h^8D^8}{20160} + \dots$	$h^2D^2 = \delta^2 - \frac{\delta^4}{12} + \frac{\delta^6}{90} - \dots$
$\mu\delta^3 = h^3D^3 + \frac{h^5D^5}{4} + \frac{h^7D^7}{40} + \dots$	$h^3D^3 = \mu(\delta^3 - \frac{\delta^5}{4} + \frac{7\delta^7}{120} - \dots)$
$\delta^4 = h^4D^4 + \frac{h^6D^6}{6} + \frac{h^8D^8}{80} + \dots$	$h^4D^4 = \delta^4 - \frac{\delta^6}{6} + \frac{7\delta^8}{240} - \dots$

فصل 7: برازش خطي

روش کمترين مربعات

- فرض مي کنيم که معادله منحني برازنده خطي به شکل زير باشد :

$$Y^* = X\beta + u$$

- که در آن b نمايان گر راستاي k و تخميني ازپارامتر β بردار است. از اين تخمين براي تعيين بردارهاي مربوط به تفاضل ها استفاده مي شود :

$$\epsilon = Y^* - Xb = Y^* - Y$$

- این تفاضلات، اختلاف میان Y^*هاي تجربي و مقادير محاسبه شده Y با استفاده از بردار تخميني b است. از راه هاي معمول براي اندازه گيري بردار مجهول b روش حداقل مربعات است كه در آن مجموع مربعات تفاضلات را کمینه می کند:

$$\Phi = \epsilon'\epsilon = (Y^* - Xb)'(Y^* - Xb)$$

براي محاسبه مقداري از بردار b كه ϕ را كمينه مي كند، مشتق نسبت به b را محاسبه كرده، برابر صفر قرار مي دهيم

$$\frac{\partial \Phi}{\partial b} = (-X)'(Y^* - Xb) + (Y^* - Xb)'(-X) = 0$$

- با استفاده از ماتريس- بردار $A'y = y'A$ معادله به دست آمده را ساده سازي مي كنيم:

$$-2X'(Y^* - Xb) = 0$$

- معادله فوق با مرتب سازي مجدد منجر به معادله زير مي شود:

$$(X'X)b = X'Y^*$$

- معادله فوق، دسته معادلات جبري خطي "معادلات نرمال " ناميده مي شود. ماتريس $(X'X)$ ماتريس متقارن $(k \times k)$ است. فرض بالا نشان مي دهد ماتريس $(X'X)$ غير يكه است و بنابراين معكوس آن وجود دارد.

- بنابراين معادلات نرمال براي بردار b حل مي شوند.

$$b = (X'X)^{-1}X'Y^*$$

- مقادير اجزا بردار b به سادگي از معادله بالا به دست مي آيد چون طرف راست آن شامل ماتريس مشاهدات متغير مستقل X و مشاهدات متغير وابسته y' كه همگي مشخص هستند، مي باشد.

- رگرسيون چند جمله اي حالت خاصي از رگرسيون خطي است. در چنين حالتي ارتباط ميان متغير وابسته و مستقل با چند جمله اي درجه $(k - 1)$ بيان مي شود:

$$y = b_1 + b_2x + b_3x^2 + \dots + b_kx^{k-1}$$

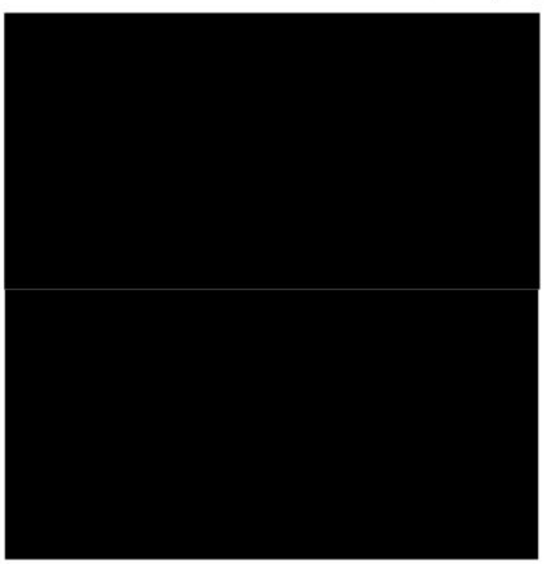
- مي توانيم $x^0, x^1, x^2, \dots, x^{k-1}$ را متغيرهاي مستقل در نظر گرفته و ماتريس را براي رگرسيون چند جمله اي به صورت زير بسازيم:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{k-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{k-1} \\ & & \dots & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{k-1} \end{bmatrix}$$

- بردار ضرايب چند جمله اي بالا با استفاده از معادله اسلايد قبلي به دست مي آيد.

- تابع *polyfit* در *MATLAB* رگرسيون خطي را انجام مي دهد. عبارت *polyfit(X,Y,N)* ضرايب چند جمله اي درجه nام قابل انطباق با نقاط داده شده در بردار X (متغيرهاي مستقل) وY(متغيرهاي وابسته) را محاسبه مي كند. توجه داشته باشيد كه *Polyfit* *ضرايب را به ترتيب نزولي بيان مي كند كه در خلاف جهت نشان داده شده در معادله* قبلي است.

روش ديگري را بررسي مي كنيم:



• مقادیر a و b به این شکل به دست می آیند:

[redacted]

و ضریب همبستگی به شکل زیر خواهد بود:

[redacted]

فصل 8

حل دستگاه معادلات غير خطي

روش نيوتن

- اگر معادلات حاصل از فرآيند مدل سازي بيش از يک معادله باشند، مي توانيم روش نيوتن را براي حل همزمان اين معادلات به کار بريم.

ابتدا با حل يک دستگاه با دو معادله آغاز مي کنيم:

$$f_1(x_1, x_2) = 0$$
$$f_2(x_1, x_2) = 0$$

که در اين معادلات، f_1 و f_2 توابع غير خطي بوده، x_1 و x_2 متغيرهاي مستقل هستند.

- سري تيلور هر دو تابع را حول نقاط $x_1^{(1)}$ و $x_2^{(2)}$ مي نويسيم:

$$f_1(x_1, x_2) = f_1(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}|_{x^{(1)}}(x_1 - x_1^{(1)}) + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}|_{x^{(1)}}(x_2 - x_2^{(1)}) + \ldots$$

$$f_2(x_1, x_2) = f_2(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}|_{x^{(1)}}(x_1 - x_1^{(1)}) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}|_{x^{(1)}}(x_2 - x_2^{(1)}) + \ldots$$

با توجه به اينكه مقدار هر دو تابع صفر است، سمت چپ معادلات را برابر با صفر قرار داده، از مشتقات مرتبه دوم به بعد صرفنظر مي نماييم. خواهيم داشت:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}|_{x^{(1)}}(x_1 - x_1^{(1)}) + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}|_{x^{(1)}}(x_2 - x_2^{(1)}) = -f_1(x_1^{(1)}, x_2^{(1)})$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1}|_{x^{(1)}}(x_1 - x_1^{(1)}) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}|_{x^{(1)}}(x_2 - x_2^{(1)}) = -f_2(x_1^{(1)}, x_2^{(1)})$$

- حال پارامتر تصحيح كننده را δ در نظر مي گيريم:

$$\delta_1^{(1)} = x_1 - x_1^{(1)}$$

$$\delta_2^{(1)} = x_2 - x_2^{(1)}$$

پس معادلات صفحه قبل تبديل خواهند شد به:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}|_{x^{(1)}}\delta_1^{(1)} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}|_{x^{(1)}}\delta_2^{(1)} = -f_1(x_1^{(1)}, x_2^{(1)})$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1}|_{x^{(1)}}\delta_1^{(1)} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}|_{x^{(1)}}\delta_2^{(1)} = -f_2(x_1^{(1)}, x_2^{(1)})$$

معادلات بالا، يک دسته از معادلات خطي همزمان هستند كه مجهولات آنها $\delta_1^{(1)}$ و $\delta_2^{(1)}$ مي باشند.

• معادلات حاصل را مي توان به فرم ماتريسي نوشت:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\Big|_{x^{(1)}} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\Big|_{x^{(1)}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\Big|_{x^{(1)}} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\Big|_{x^{(1)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1^{(1)} \\ \delta_2^{(1)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} \end{bmatrix}$$

از آنجايي كه اين دستگاه شامل دو معادله است، مي توان به راحتي از روش كرامر براي بدست آوردن اولين مقادير مربوط به پارامترهاي تصحيح كننده بهره بر

$$\delta_1^{(1)} = - \frac{\left[f_1 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} - f_2 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right]}{\left[\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right]}$$

$$\delta_2^{(1)} = - \frac{\left[f_2 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} - f_1 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right]}{\left[\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right]}$$

اكنون حدس جديد با افزودن حدس قبلي به بردار (vector) δ، بدست مي آ

لازم به ذكر است كه اين حل، مربوط به دو معادله بود. اين روش مي تواند به تعداد k معادله با k مجهول بسط پيدا كند.

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \ldots, x_k) &= 0 \\ &\vdots \\ f_k(x_1, \ldots, x_k) &= 0 \end{aligned}$$

خطي كردن اين دسته از معادلات هم با استفاده از سري تيلور به ماتريس زير منتج خواهد شد:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ & \cdots\cdots & \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \delta_k \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} f_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_k \end{bmatrix}$$

- عبارت حاصل به شكل زير مي تواند نوشته شود:

$$J\delta = -f$$

J : ماتريس ژاكوبين حاوي مشتقات جزئي

δ : بردار مربوط به پارامتر تصحيح كننده

f : بردار مربوط به توابع

معادلاتي كه به شدت غير خطي هستند، تمايل به واگرا شدن دارند. براي جلوگيري از بوقوع پيوستن چنين حالتي، عملياتي با عنوان آرام سازي (*relaxation*) براي پايدار كردن فرآيند حل مساله به كار مي رود.

- اگر δ بردار پارامتر تصحيح كننده، بدون آرام سازي باشد، بردار relax شده به شكل $\rho\delta$ خواهد بود كه ρ، *relaxation factor* نام دارد:

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} + \rho\,\delta$$

- مقدار معمول (typical) براي پارامترρ، 0.5 است.
- مقدار صفر باعث جلوگيري از حركت مي شود.
- مقدار يک معادل حالتي است كه عمليات آرام سازي انجام نشده است.

آرام سازي مقدار تصحيحي را كه در هر مرحله بر روي متغير انجام مي شود، كم مي كند و به اين شكل از واگرا شدن فرآيند حل مساله جلوگيري مي نمايد.

- به یک مثال توجه کنید:

$$\begin{cases} f_1 = x_1 x_2^2 - 2x_1^2 = 2 \\ f_2 = x_1^3 + x_2^2 = 5 \end{cases}$$

معادلات را به شکل زیر مرتب مي کنیم:

$$\begin{cases} f_1 = x_1 x_2^2 - 2x_1^2 - 2 = 0 \\ f_2 = x_1^3 + x_2^2 - 5 = 0 \end{cases}$$

- هر دو تابع را برحسب هر دو متغیر مشتق مي گیریم:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = x_2^2 - 4x_1 \qquad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 2x_1 x_2$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 3x_1^2 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 2x_2$$

به این ترتیب ماتریس ژاکوبین به شکل زیر خواهد بود:

$$J = \begin{bmatrix} x_2^2 - 4x_1 & 2x_1 x_2 \\ 3x_1^2 & 2x_2 \end{bmatrix}$$

• نیاز به یک حدس اولیه داریم:

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

حال باید بردار δ را تشکیل دهیم:

$$\delta^{(0)} = -J^{-1} f^{(0)} = -\begin{bmatrix} -7 & 4 \\ 12 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -8 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5161 \\ 1.0968 \end{bmatrix}$$

به این شکل $x^{(1)}$ بدست مي آید:

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.5161 \\ 1.0968 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.4839 \\ 2.0968 \end{bmatrix}$$

با استفاده از مقدار جدید x، مجددا باید بردار δ را تشکیل دهیم:

$$\delta^{(1)} = -\begin{bmatrix} -1.539 & 6.2229 \\ 6.6059 & 4.1936 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0.1202 \\ 2.6641 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.338 \\ -0.1029 \end{bmatrix}$$

و براي $x^{(2)}$ خواهیم داشت:

$$x^{(2)} = \begin{bmatrix} 1.1459 \\ 1.9939 \end{bmatrix}$$

و به همین صورت ادامه مي دهیم:

$$\delta^{(2)} = -\begin{bmatrix} -0.608 & 4.5696 \\ 3.9393 & 3.9878 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -0.0705 \\ 0.4803 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1212 \\ -0.0007 \end{bmatrix}$$

$$x^{(3)} = \begin{bmatrix} 1.0247 \\ 1.9932 \end{bmatrix}$$

$$\delta^{(3)} = -\begin{bmatrix} -0.126 & 4.0849 \\ 3.15 & 3.9864 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -0.029 \\ 0.0488 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0236 \\ -0.0064 \end{bmatrix}$$

$$x^{(4)} = \begin{bmatrix} 1.0011 \\ 1.9996 \end{bmatrix}$$

در صورتي كه تفاوت بين مقادير جديد با آخرين مقادير از خطاي مورد نظر كمتر باشد، جواب حاصل قابل قبول خواهد بود. در اينجا، با انجام يكمرحله ديگر به جواب مي رسيم:

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

روش هموتوپي پيوستگي:

- اشكال روش نيوتن در اين است كه نسبت به حدس توليه حساس مي باشد.
- تابع f(x) را در نظر بگيريد. مي خواهيم مقداري كه اين تابع را صفر مي كند، بدست بياوريم.

$$f(x) = 0$$

تابع هموتوپي H(x) =

$$H(x) = t\, f(x) + (1-t)\, g(x)$$

g(x) را تابعي مشخص در نظر مي گيريم.

$$H(x) = t\, f(x) + (1-t)\, g(x)$$

- اگر $t = 1$ ، در این صورت جوابهاي اصلي بدست مي آيد.
- اگر $t = 0$ ، در این صورت جوابهاي $g(x)$ بدست مي آيد.

- لازم به ذکر است که هیچ محدودیتي براي حدس زدن تابع $g(x)$ وجود ندارد.

سه روش متداول را بررسي مي کنيم:

- روش fixed point :

$$H(x,t) = t\, f(x) + (1-t)\,(x-x_0)$$

t را از صفر عدد دهي مي کنيم تا به يک برسيم.

- روش نيوتني:

$$H(x,t) = t\, f(x) + (1-t)\,[\, f(x) - f(x_0)\,]$$

- روش ترکيبي:

$$H(x,t) = t\, f(x) + (1-t)\,[\, f'(x)\ (x - x_0)\,]$$

روش نيوتني بيشتر در محاسبات مورد استفاده قرار مي گيرد. البته تضمين نمي کند که براي هر مقداري از x_0 به جواب برسد. اما در اين حالت، محدوده وسيعتري براي حدس اوليه وجود دارد.

- همان مثال را با استفاده از روش هموتوپي (fixed point) حل مي کنيم:

$$\begin{cases} f_1 = x_1 x_2^2 - 2x_1^2 - 2 = 0 \\ f_2 = x_1^3 + x_2^2 - 5 = 0 \end{cases}$$

همان حدس اوليه را بکار مي بريم:

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

تابع هموتوپي به شکل زير خواهد بود:

$$H(x,t) = tf(x) + (1-t)(x - x_0)$$

- با توجه به تابع زیر

$$H(x,t) = t\,f(x) + (1-t)(x - x_0)$$

ماتریس H به صورت زیر خواهد بود:

$$H = \begin{bmatrix} t\left(x_1 x_2^2 - 2x_1^2 - 2\right) + (1-t)\left(x_1 - x_{1,0}\right) \\ t\left(x_1^3 + x_2^2 - 5\right) + (1-t)\left(x_2 - x_{2,0}\right) \end{bmatrix}$$

که مقادیر $x_{1,0}$ و $x_{2,0}$ برابر خواهند بود با:

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- حال t را در ماتریس H از 0.25 تا 1 مقدار دهي مي كنيم. هر بار دو معادله حاصل را با استفاده از روش نيوتني حل مي كنيم و جوابهاي بدست آمده را به عنوان مقدار اوليه مرحله بعد بكار مي بريم.

در پایان مراحل

$$t = 0.25 \qquad x = \begin{bmatrix} 2.1329 \\ -2.2398 \end{bmatrix}$$

$$t = 0.5 \qquad x = \begin{bmatrix} 1.5169 \\ -2.1612 \end{bmatrix}$$

$$t = 0.75 \qquad x = \begin{bmatrix} 1.2015 \\ -2.071 \end{bmatrix}$$

$$t = 1 \qquad x = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

همانطور که ملاحظه شد، با این روش، ریشه دیگر این دستگاه که 2- بود، رسیدیم. در صورتي که از روش نیوتني استفاده کنیم، به همان عدد 2 خواهیم رسید.

روش جايگزيني متوالي

- دستگاه مقابل را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} f_1(x_1,\ldots,x_n)=0 \\ f_2(x_1,\ldots,x_n)=0 \\ . \\ . \\ f_n(x_1,\ldots,x_n)=0 \end{cases}$$

براي حل به روش جايگزيني متوالي، هر معادله را برحسب يکي از مجهولها مرتب مي کنيم:

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2 ..., x_n) = x_1 \\ g_2(x_1, x_2, ..., x_n) = x_2 \\ . \\ . \\ g_n(x_1, x_2 ..., x_n) = x_n \end{cases}$$

البته هيچ محدوديتي وجود ندارد که به عنوان مثال x_1 از تابع اول و x_2 از تابع دوم بدست بيايد.

همچنين براي هر مجهول، يک مقدار اوليه حدس مي زنيم و به صورت يک بردار مي نويسيم:

$$\begin{bmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \\ . \\ . \\ x_{n,0} \end{bmatrix}$$

- با استفاده از تابع g_1 و نيز مقادير x_2 تا x_n مقدار جديد x_1 را بدست مي آوريم.

$$g_1(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1$$

- با استفاده از تابع g_2 و نيز مقادير x_1 تا x_n مقدار جديد x_2 را بدست مي آوريم.

$$g_2(x_1, x_2, ..., x_n) = x_2$$

- به همين ترتيب ادامه مي دهيم تا براي هر کدام از مجهولها يک مقدار جديد حاصل شود.

$$g_n(x_1, x_2, ..., x_n) = x_n$$

- مقادير جديد را در يک بردار جديد قرار مي دهيم و با برداري که به عنوان حدس اوليه در نظر گرفته بوديم، مقايسه مي کنيم.

$$\begin{bmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \\ . \\ . \\ x_{n,0} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_{1,1} \\ x_{2,1} \\ . \\ . \\ x_{n,1} \end{bmatrix}$$

- با توجه به اختلاف اعداد جديد با اعداد اوليه، حدس بعدي خود را تغيير مي دهيم.

- همان مثال را با استفاده از روش جايگزيني متوالي حل مي کنيم:

$$\begin{cases} f_1 = x_1 x_2^2 - 2x_1^2 - 2 = 0 \\ f_2 = x_1^3 + x_2^2 - 5 = 0 \end{cases}$$

حال بايد يکي از دو تابع را بر حسب x_1 و ديگري را بر حسب x_2 بدست آوريم.

براي x_2 از تابع اول داريم:

$$x_2 = \sqrt{\frac{2x_1^2 + 2}{x_1}}$$

و براي x_1 از تابع دوم خواهيم داشت:

$$x_1 = \sqrt[3]{5 - x_2^2}$$

به عنوان حدس اوليه، اعداد مقابل را به کار مي بريم:

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 1.8 \end{bmatrix}$$

با قرار دادن $x_1=2$ در تابع اول و $x_2=1$ در تابع دوم، مقادير جديد را بدست مي آوريم:

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.2073 \\ 2.01659 \end{bmatrix} \quad x^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.977 \\ 2.0177 \end{bmatrix} \quad x^{(3)} = \begin{bmatrix} 0.975 \\ 2.0002 \end{bmatrix}$$

$$x^{(4)} = \begin{bmatrix} 0.9997 \\ 2.0003 \end{bmatrix} \quad x^{(5)} = \begin{bmatrix} 0.9995 \\ 2.0000 \end{bmatrix} \quad x^{(6)} = \begin{bmatrix} 1.0000 \\ 2.0000 \end{bmatrix}$$

حل معادلات دیفرانسیل معمولی(IVP)

دسته بندی معادلات دیفرانسیل معمولی

- معادلات دیفرانسیل معمولی بر حسب مرتبه , خطی بودن و شرایط مرزی دسته بندی می شوند.
- مرتبه یک معادله دیفرانسیل مرتبه بالاترین مشتق موجود در آن است. به عنوان مثال به معادلات دیفرانسیل مرتبه اول, دوم و سوم در زیر اشاره شده است:

First order: $$\frac{dy}{dx} + y = kx$$

Second order: $$\frac{d^2y}{dx^2} + y\frac{dy}{dx} = kx$$

Third order: $$\frac{d^3y}{dx^3} + a\frac{d^2y}{dx^2} + b\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = kx$$

- معادلات دیفرانسیل معمولی بر حسب خطی بودن یا نبودن نیز تقسیم بندی می شوند. معادله ای غیر خطی است که حاصلضرب متغیر وابسته و یا مشتقش و یا هردو در معادله موجود باشد.
- برای مثال معادلات زیر غیر خطی هستند زیرا شامل $y(dx/dy)$ و $(dy/dx)^2$ می باشند:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y\frac{dy}{dx} = kx$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} + a\frac{d^2y}{dx^2} + b\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = kx$$

- ولی معادله زیر خطی است(فرم کلی معادله دیفرانسیل خطی مرتبه n):

$$b_0(x)\frac{d^ny}{dx^n} + b_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + b_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + b_n(x)y = R(x)$$

- اگر $R(x)=0$ باشد معادله همگن نامیده می شود.
- اگر $R(x)\neq 0$ باشد معادله غیرهمگن نامیده می شود.
- ضرایب $\{b_i \mid i =1,2,\ldots,n\}$ ضرایب متغیر نامیده می شوند هر گاه خود تابع x باشند و ضرایب ثابت نامیده می شوند هرگاه عدد باشند.
- معادله autonomous محسوب می شود اگر متغیر وابسته واضح در معادله ذکر نشود. برای مثال معادله زیر همگن با ضرایب ثابت و همچنین autonomous است:

$$b_0(x)\frac{d^ny}{dx^n} + b_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + b_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + b_n(x)y = R(x)$$

- برای بدست آوردن جواب معادله دیفرانسیل مرتبه nام یا n معادله همزمان مرتبه اول لازم است n مقدار متغیر مستقل(یا مشتقات آن) در مقادیر مشخص متغیر وابسته معلوم باشد.

- معادلات دیفرانسیل معمولی به مسائل مقدار اولیه و شرط مرزی تقسیم بندی می شوند.

- در مسائل مقدار اولیه مقادیر متغیر های وابسته و یا مشتقات آنها به عنوان مقادیر اولیه متغیر های مستقل محسوب می شوند.

$$V\frac{\partial C}{\partial t} = \upsilon C_0 - \upsilon C + VkC^n$$

$$C(0) = 0.5$$

- در مسائل شرط مرزی متغیر های وابسته و یا مشتقات آنها در بیش از یک نقطه متغیر مستقل شناخته مي شوند.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{q''}{k}$$

$$T(L) = 80$$

$$\frac{\partial T(0)}{\partial x} = 0$$

- اگر برخی از متغیر های وابسته (یا مشتقات آنها) به عنوان مقدار اولیه متغیر مستقل مشخص شوند و باقی مانده متغیر ها (یا مشتقات آنها) به عنوان مقدار نهایی متغیر مستقل مشخص شوند به این مسئله دو نقطه مقدار مرزی می گویند.

انتقال به فرم canonical

وقتی سیستم شامل n معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه اول هم زمان به صورت:

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(y_1, y_2, \dots, y_n, x)$$
$$\frac{dy_2}{dx} = f_2(y_1, y_2, \dots, y_n, x)$$
$$\vdots$$
$$\frac{dy_n}{dx} = f_n(y_1, y_2, \dots, y_n, x)$$

باشد به این حالت فرم canonical می گویند.

- وقتی شرایط اولیه در نقطه مشخص x_0 داده شده اند:

$$y_1(x_0) = y_{1,0}$$
$$y_2(x_0) = y_{2,0}$$
$$\vdots$$
$$y_n(x_0) = y_{n,0}$$

سیستم معادله:

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(y_1, y_2, \dots, y_n, x)$$
$$\frac{dy_2}{dx} = f_2(y_1, y_2, \dots, y_n, x)$$
$$\vdots$$
$$\frac{dy_n}{dx} = f_n(y_1, y_2, \dots, y_n, x)$$

جوابی به فرم مقابل دارد:

$$y_1 = F_1(x)$$
$$y_2 = F_2(x)$$
$$\vdots$$
$$y_n = F_n(x)$$

- مسئله قبل می تواند به صورت ماتریسی خلاصه شود که سیستم معادلات به این صورت نشان داده می شود: $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$

- بردار مقدار اولیه به این صورت: $y(x_0) = y_0$

- و بردار جواب ها به این صورت: $y = F(x)$

- معادلات دیفرانسیل از مراتب بالاتر یا سیستم های شامل معادلات مرتبه مختلط با جایگزینی به صورت سری به حالت canonical تبدیل می شوند.

- معادله دیفرانسیل مرتبه nام را در نظر بگیرید:

$$\frac{d^n z}{dx^n} = G\left(z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2 z}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}}, x\right)$$

- تبدیل ها به صورت زیر است:

$$z = y_1$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dy_1}{dx} = y_2$$

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{dy_2}{dx} = y_3$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} = \frac{dy_{n-1}}{dx} = y_n$$

$$\frac{d^n z}{dx^n} = \frac{dy_n}{dx}$$

- هنگامی که در $\frac{d^n z}{dx^n} = G\left(z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}, x\right)$ به nام جایگزین

شود n معادله مرتبه ... ز می دهد:

$$\frac{dy_1}{dx} = y_2$$
$$\frac{dy_2}{dx} = y_3$$
$$\vdots$$
$$\frac{dy_n}{dx} = G(y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n, x)$$

- اگر طرف راس ...له دیفرانسیل به صورت تابعی از متغیر مستقل نباشد به صورت $\frac{dy}{dx} = f(y)$ است و به یک فرم autonomous تبدیل می شود.

مثال: انتقال معادله دیفرانسیل معمولی به فرم canonical:

- انتقال ها را برای معادله دیفرانسیل معمولی زیر به کار برید:

$$\frac{d^4z}{dt^4} + 5\frac{d^3z}{dz^3} - 2\frac{d^2z}{dt^2} - 6\frac{dz}{dt} + 3z = 0$$

• داریم:

$$z = y_1$$
$$\frac{dz}{dt} = \frac{dy_1}{dt} = y_2$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dy_2}{dt} = y_3$$
$$\frac{d^3z}{dt^3} = \frac{dy_3}{dt} = y_4$$
$$\frac{d^4z}{dt^4} = \frac{dy_4}{dt}$$

• با این جایگزین کردن ها در معادله به چهار معادله زیر می رسیم:

$$\frac{dy_1}{dt} = y_2$$
$$\frac{dy_2}{dt} = y_3$$
$$\frac{dy_3}{dt} = y_4$$
$$\frac{dy_4}{dt} = -3y_1 + 6y_2 + 2y_3 - 5y_4$$

• این دسته معادلات دیفرانسیل معمولی خطی است که به صورت ماتریسی به فرم زیر بیان می شود:

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$$

• که ماتریس A در آن به صورت زیر است:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 6 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

معادلات دیفرانسیل معمولی غیر خطی- مسائل مقدار اولیه

- در این قسمت حل های عددی برای دسته معادلات دیفرانسیل معمولی به فرم canonical را می بینیم: $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$
- با بردار شرایط اولیه داده شده به وسیله: $y(x_0) = y_0$
- برای اینکه بتوانیم این روش گرافیکی را با مثال توضیح دهیم yرا به صورت متغیر منفرد در نظر می گیریم نه یک بردار از متغیر ها. فرمول های بدست آمده برای حل معادلات دیفرانسیل منفرد قابل تعمیم به دسته معادلات دیفرانسیل است که باید همزمان حل شوند.

- بدست آوردن این روش ها را با مرتب کردن دوباره $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ آغاز می کنیم.
- و از دو طرف بین حدود $x_t \le x \le x_{t+1}$ و $y_t \le y \le y_{t+1}$ انتگرال می گیریم:

$$\int_{y_i}^{y_{i+1}} dy = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y)\, dx$$

- طرف چپ معادله نتیجه می دهد: $y_{i+1} - y_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y)\, dx$
- یک روش برای انتگرال گرفتن معادله بالا اینست که طرف چپ معادله را گرفته و از روش اختلاف محدود برای تعیین جواب استفاده کنیم. این روش مستقیما با زاویه انحناء متغیر وابسته y با سطح زیر نمودار تابع f(x,y) کار می کند.

- توابع زیادی در MATLAB وجود دارد تا دسته معادلات دیفرانسیل معمولی را حل کند.
- این محاسبه گر ها با توجه به روش حل آنها در جدول زیر آمده اند:

Solver	Method of solution
ode23	Runge-Kutta lower-order (2^{nd} order - 3 stages)
ode45	Runge-Kutta higher-order (4^{th} order - 5 stages)
ode113	Adams-Bashforth-Moulton of varying order (1-13)
ode23s	Modified Rosenbrock of order 2
ode15s	Implicit, multistep of varying order (1-5)

- اولین محاسبه گری که کاربر ممکن است استفاده کند ode45 است.

- عبارت $[x,y] = ode45\ (\ 'y\_prime'\ ,\ [x_o,x_f]\ ,y_0\ )$ با دسته معادلات معمولی که تابع y_prime.m از x_0 تا x_f با مقادیر اولیه داده شده به صورت بردار y_0 توضیح داده شده حل می شود. و مقادیر متغیر های مستقل و وابسته را به بردارهای x و y برمی گرداند. بردار متغیر وابسته,x, به طور مساوی فاصله ندارد چون تابع کنترلر step size است.

- اگر حل به نقاط مشخصی از x نیاز داشته باشد بازه $[x_o,x_f]$ باید با برداری شامل مقادیر متغیر مستقل جایگزین شود.

- برای مثال $[x,y] = ode45\ (\ \text{'y\_prime'}\ ,\ [x_o,h,x_f]\ ,y_0\ )$ به حل دسته معادلات معمولی از x_o تا x_f در بازه ای به طول n برمی گردد. بردار x در این حالت به صورت monotonic(احتمالا به استثنا بازه آخر) است.

- روش کلی برای استفاده از سایر محاسبه گرهای معادلات دیفرانسیل معمولی در MATLAB مانند روش توضیح داده شده فوق برای برای محاسبه گر ode45 است.

روش اویلر و اویلر بهبود یافته

- از اولین روشهای حل معادلات دیفرانسیل معمولی روش اویلر است. با توجه به اینکه طرف راست معادله زیر اختلاف محدود پیشرو y در مکان i است به سادگی به دست می آید.

$$y_{i+1} - y_i = \Delta y_i$$

- که با مرتب کردن فرمول پیشرو برای اندازه گیری y بدست می آید:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$$

- ترم تفاضل پیشرو Δy_i که از معا $\Delta = hD + \frac{h^2D^2}{2} + \frac{h^3D^3}{6} + \dots$ به دست آمده، برای y در نقطه i به کار می رود:

$$\Delta y_i = hDy_i + \frac{h^2D^2y_i}{2} + \frac{h^3D^3y_i}{6} + \dots$$

- در روش اویلر سری بالا پس از اولین جمله بریده می شود:

$$\Delta y_i = hDy_i + O(h^2)$$

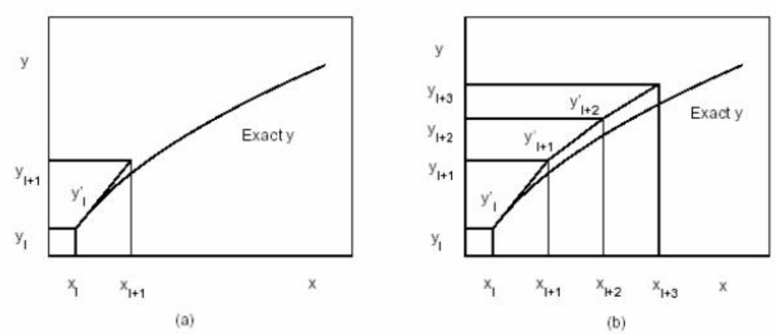
- مجموع دو معادله بالا فرمول اویلر صریح را برای انتگرال گیری از معادلات دیفرانسیل نتیجه می دهد:

$$y_{i+1} = y_i + hDy_i + O(h^2)$$

- مشتق Dy_i با معادل آن y'_i و $f(x_i, y_i)$ جایگزین شده تا فرم معمولی تری از روش اویلر صریح ارائه دهد:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) + O(h^2)$$

- این معادله به سادگی بیانگر این است که مقدار بعدی y از مقدار قبلی آن با حرکت از مرحله ای به طول h جهت زاویه ای y به دست آید. این معادله اویلر غیر دقیق تر است چرا که خطای برش $O(h^2)$ دارد.
اگر h بزرگ انتخاب شود انحناء y می تواند به سرعت از انحناء واقعی منحرف شود.



- دقت معادله اویلر با استفاده از مجموعی از روشهای اختلاف پیشرو و پسرو بهبود می یابد. توجه داشته باشید که اولین اختلاف پیشرو y در مکان i مساوی است با اولین اختلاف پسرو y در مکان (i+1)

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i = \nabla y_{i+1}$$

- بنابراین فرمول پیشرو در حالت اختلاف پسرو می شود:

$$y_{i+1} = y_i + \nabla y_{i+1}$$

- جمله اختلاف پسرو ∇y_{i+1} از معاد $\nabla = hD - \frac{h^2D^2}{2} + \frac{h^3D^3}{6} - ...$ برای y در نقطه i+1 به کار می رود:

$$\nabla y_{i+1} = hDy_{i+1} - \frac{h^2D^2y_{i+1}}{2} + \frac{h^3D^3y_{i+1}}{6} - \dots$$

- با ترکیب معاله بالا $y_{i+1} = y_i + \nabla y_{i+1}$ داریم:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1}) + O(h^2)$$

- این معادله اویلر ضمنی یا اویلر پسرو است. چرا که شامل محاسبات تابع و y_{i+1} امشخص است. معادله زیر:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1}) + O(h^2)$$

می تواند با در نظر گرفتن گام پیشرو از مکان i به i+1 در جهت گرادیان دیده شود که باید در i+1 اندازه گیری شود.

- معادله ضمنی نمی تواند به تنهایی حل شود اما باید به صورت دسته معادلات همزمان حل شود. هنگامی که این دسته ها خطی هستند معادله با استفاده از روش حذفی گوس حل می شود. اگر دسته شامل معادلات غیر خطی باشد مسئله بسیار سخت تر است و باید با روش نیوتن برای حل معادلات جبری غیر خطی هم زمان حل شود.

- در روش اویلر مسئله با استفاده از روش صریح برای تعیین مقدار y_{i+1} ساده می شود:

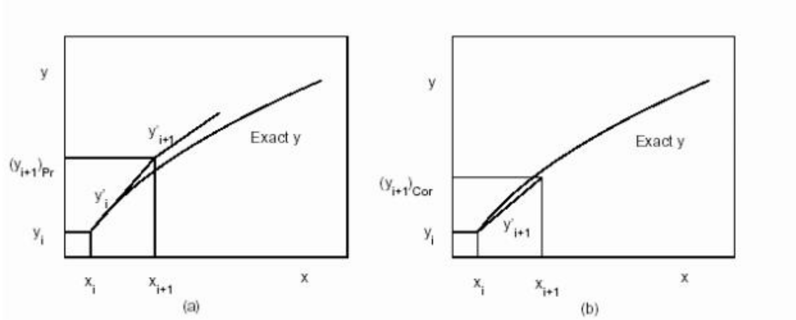
$$(y_{i+1})_{Pr} = y_i + hf(x_i, y_i) + O(h^2)$$

- و سپس با استفاده از مقدار تعیین شده در روش ضمنی برای جواب صحیح به کار می رود.

$$(y_{i+1})_{Cor} = y_i + hf(x_{i+1}, (y_{i+1})_{Pr}) + O(h^2)$$

- این مجموعه روشها Euler predictor corrector یا اویلر بهبود یافته نامیده می شود.

- کاربرد گرافیکی روش اویلر تصحیح شده در شکل زیر دیده می شود:



- تصحیح با معادله زیر

$$(y_{i+1})_{Cor} = y_i + hf(x_{i+1}, (y_{i+1})_{Pr}) + O(h^2)$$

بیشتر از یکبار به کار می رود تا جواب صحیح همگرا شود که در آن اختلاف بین دو نقطه درست متوالی کمتر از حد همگرایی می شود. با این حالت پس از دوبار استفاده از تصحیح گر دقت بیشتری حاصل شده است.

- روش صریح همانند ضمنی معادله اویلر خطایی از درجه (h^2) دارد، بنابراین وقتی هر دو را با هم به عنوان تخمین گر- تصحیح گر استفاده می کنیم دقت آنها به خطا از درجه (h^3) منجر می شود.

- این نتیجه با افزودن معادلات زیر به هم نیز به دست می آید:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$$

$$y_{i+1} = y_i + \nabla y_{i+1}$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(\Delta y_i + \nabla y_{i+1})$$

• و با مرتب کردن معادلات زیر به دست می آید:

$$\Delta y_i = hDy_i + \frac{h^2D^2y_i}{2} + \frac{h^3D^3y_i}{6} + \dots$$

$$\nabla y_{i+1} = hDy_{i+1} - \frac{h^2D^2y_{i+1}}{2} + \frac{h^3D^3y_{i+1}}{6} - \dots$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})] + O(h^3)$$

• جملات درجه (h^2) با توجه به علامت های مخالفشان حذف می شوند و بنابراین فرمولی با دقت بیشتر به دست می آید.

• معادله آخر همانند قانون ذوزنقه ای است ، تنها با این تفاوت که مقدار تابع در (x_{i+1},y_{i+1}) اندازه گیری شده است.

• نشان داده شده است که فرمول ضمنی روش اویلر از صریح آن stable تر است. Stability این روش ها در بخش های بعد بررسی می شود.

- با $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})] + O(h^3)$ معادله
به فرم زیر دیده می شود:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}hf(x_i, y_i) + \frac{1}{2}hf(x_{i+1}, y_{i+1}) + O(h^2)$$

که دراین روش اویلر ثابت های وزنی تابع y در دو نقطه که یک گام به طول h و وزن مساوی با هم فاصله دارند، استفاده می کند. در این حالت معادله بالا روش -Crank Nicolson نامیده می شود.

- معادله قبل در شکل کلی تر به صورت زیر بیان می شود:

$$y_{i+1} = y_i + w_1 k_1 + w_2 k_2$$

که در این حالت داریم:

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf(x_i + c_2 h,\ y_i + a_{21} k_1)$$

- انتخاب عامل وزنی w_1 و w_2 و مکان های i و i+1 که در آنها ثابت ها اندازه گیری می شوند بر مبنای دقت مورد نیاز برای محاسبه انتگرال ها انجام می شود. برای مثال با توجه به تعداد جملات باقی مانده در بسط سری های نامحدود.

• این دیدگاه پایه و اساس فرمول های محاسبه بر مبنای سری انتگرال هاست که دقت بالایی برای معادلات دیفرانسیل ابتدایی دارد. این مطالب در مبحث بعدی مورد بحث قرار می گیرد.

روش رانژ کوتا

• مورد استفاده ترین روش انتگرال گیری از معادلات دیفرانسیل ابتدایی ، روش استفاده از سری ها با نام روش رانژ کوتا مرتبه دوم، سوم ، چهارم و یا حالات دیگر معادله رانژ کوتا است. این روش ها بر پایه دیدگاه trajectory های وزنی که در بخشهای قبل فرمول بندی شده اند قرار دارد. در حالت کلی تر، فرمول پیشرو انتگرال گیری از معادله دیفرانسیل $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ با معادله برگشتی زیر بیان می شود:

$$y_{i+1} = y_i + w_1 k_1 + w_2 k_2 + w_3 k_3 + \ldots + w_m k_m$$

• هر trajectory ، k_i به صورت زیر محاسبه می شود:

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf(x_i + c_2 h, y_i + a_{21}k_1)$$

$$k_3 = hf(x_i + c_3 h, y_i + a_{31}k_1 + a_{32}k_2)$$

$$\vdots$$

$$k_m = hf(x_i + c_m h, y_i + a_{m1}k_1 + a_{m2}k_2 + \ldots + a_{m,m-1}k_{m-1})$$

• این معادلات در فرم فشرده به صورت زیر بیان می شوند :

$$y_{i+1} = y_i + \sum_{i=1}^{m} w_i k_i$$

$$k_j = hf\left(x_i + c_j h, y_i + \sum_{l=1}^{j-1} a_{jl}k_l\right)$$

که در آن $c_1 = 0$ $a_{1j} = 0$

- مقدار m که نمایان گر پیچیدگی و دقت روش است، هنگامی ثابت می شود که m+1 جمله در بسط سری نامحدود y_{i+1} وجود داشته باشد.

$$y_{i+1} = y_i + hy_i{}' + \frac{h^2 y_i{}''}{2!} + \frac{h^3 y_i{}'''}{3!} + \dots$$

$$y_{i+1} = y_i + hDy_i + \frac{h^2 D^2 y_i}{2!} + \frac{h^3 D^3 y_i}{3!} + \dots$$

- مراحل به دست آوردن روش رانژ کوتا به پنج بخش تقسیم می شود که در زیر بر مبنای رانژ کوتا مرتبه دوم بیان شده اند.

- مرحله 1- مقدار m را که بیانگر دقت فرمول به دست آمده است، انتخاب کنید. برای رانژ کوتا مرتبه دوم ، m=2 است. سری را بعد از m+1 جمله قطع کنید:

$$y_{i+1} = y_i + hDy_i + \frac{h^2 D^2 y_i}{2!} + O(h^3)$$

• مرحله 2- در معادله بالا هر یک از مشتقات y را با مشابه آن در f که تابعی از x و y است، جایگزین کنید:

$$Dy_i = f_i$$

$$D^2 y_i = \frac{df}{dx} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} \right)_i$$

$$= (f_x + f f_y)_i$$

• معادله قبل را در معادله بالا قرار داده نتیجه می شود:

$$y_{i+1} = y_i + hf_i + \frac{h^2}{2} f_{x_i} + \frac{h^2}{2} f_i f_{y_i} + O(h^3)$$

• مرحله 3- معادله $y_{i+1} = y_i + \sum_{i=1}^{m} w_i k_i$ را به صورت مجموع m جمله بنویسید:

$$y_{i+1} = y_i + w_1 k_1 + w_2 k_2$$

که در آن:

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf(x_i + c_2 h, y_i + a_{21} k_1)$$

- مرحله4- بسط تیلور تابع f را بنویسید:

$$f(x_i + c_2 h,\ y_i + a_{21} k_1) = f_i + c_2 h f_{x_i} + a_{21} h f_{y_i} f_i + O(h^2)$$

- معادله $y_{i+1}=y_i+w_1k_1+w_2k_2$ را در معادله بالا قرار داده نتیجه می شود:

$$y_{i+1} = y_i + (w_1 + w_2) h f_i + (w_2 c_2) h^2 f_{x_i} + (w_2 a_{21}) h^2 f_i f_{y_i} + O(h^3)$$

- مرحله 5- به منظور یکی بودن معادله بدست آمده در مرحله 2 و معادله بالا ضرایب جملات مشابه باید برابر باشند. بنابراین به دسته معادلات دیفرانسیل همزمان با ثابت های غیر مشخص c_j ، w_j و a_{jl} می رسیم. برای روش رانژ کوتا درجه دوم سه معادله و چهار مجهول داریم:

$$w_1 + w_2 = 1$$
$$w_2 c_2 = \frac{1}{2}$$
$$w_2 a_{21} = \frac{1}{2}$$

- این نشان می دهد که همواره تعداد متغیر ها بیشتر از تعداد معادلات است. درجه آزادی سیستم به ما اجازه می دهد تعدادی پارامتر انتخاب کنیم. برای رانژ کوتا درجه دوم یک درجه آزادی، برای رانژ کوتا درجه سوم و چهارم ، دو درجه آزادی و برای رانژ کوتا مرتبه پنجم حداقل پنج درجه آزادی وجود دارد. این آزادی برای انتخاب پارامترها منجر به حالات مختلف معادلات رانژ کوتا می

- فرض کنید برای رانژ کوتا مرتبه دومی که اکنون به دست آوردیم $c_2 = 1$ انتخاب شود. سایر پارامترها از معادله قبل به دست می اید:

$$w_1 = w_2 = \frac{1}{2} \qquad a_{21} = 1$$

- با این دسته پارامترها، فرمول معادله رانژ کوتا درجه دوم به صورت

$$\left.\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \\ k_1 &= hf(x_i, y_i) \\ k_2 &= hf(x_i + h, y_i + k_1) \end{aligned}\right\} \quad O(h^3)$$

Table 5.2 Summary of the Runge-Kutta integration formulas

Second order

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \quad + O(h^3)$$

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf(x_i + h, y_i + k_1)$$

Third order

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) \quad + O(h^4)$$

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2})$$

$$k_3 = hf(x_i + h, y_i + 2k_2 - k_1)$$

Fourth order

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad + O(h^5)$$

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2})$$

$$k_3 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2})$$

$$k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3)$$

Table 5.2 Summary of the Runge-Kutta integration formulas (cont'd)

Fifth order

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{90}(7k_1 + 32k_3 + 12k_4 + 32k_5 + 7k_6) \quad + O(h^6)$$

$$k_1 = hf(x_i,\ y_i)$$

$$k_2 = hf(x_i + \frac{h}{2},\ y_i + \frac{k_1}{2})$$

$$k_3 = hf(x_i + \frac{h}{4},\ y_i + \frac{3k_1}{16} + \frac{k_2}{16})$$

$$k_4 = hf(x_i + \frac{h}{2},\ y_i + \frac{k_3}{2})$$

$$k_5 = hf(x_i + \frac{3h}{4},\ y_i - \frac{3k_2}{16} + \frac{6k_3}{16} + \frac{9k_4}{16})$$

$$k_6 = hf(x_i + h,\ y_i + \frac{k_1}{7} + \frac{4k_2}{7} + \frac{6k_3}{7} - \frac{12k_4}{7} + \frac{8k_5}{7})$$

Runge-Kutta-Fehlberg

$$y_{i+1} = y_i + (\frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4104}k_4 - \frac{1}{5}k_5) \quad + O(h^5)$$

$$k_1 = hf(x_i,\ y_i)$$

$$k_2 = hf(x_i + \frac{h}{4},\ y_i + \frac{k_1}{4})$$

$$k_3 = hf(x_i + \frac{3}{8}h,\ y_i + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2)$$

$$k_4 = hf(x_i + \frac{12}{13}h,\ y_i + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3)$$

$$k_5 = hf(x_i + h,\ y_i + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3860}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4)$$

$$k_6 = hf(x_i + \frac{h}{2},\ y_i - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5)$$

$$T_E = \frac{1}{360}k_1 - \frac{128}{4275}k_3 - \frac{2197}{75240}k_4 + \frac{1}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6$$

معادلات ديفرانسيل معمولي غير خطي

مسائل مقدار مرزي

BOUNDARY-VALUE PROBLEMS

مقدمه:

- معادلات ديفرانسيل معمولي غير خطي با شرايط مرزي مشخص در دو يا چند نقطه، به عنوان مسائل مقدار مرزي دسته بندي مي شوند.

- مسائل زيادي در مهندسي شيمي وجود دارد كه به چنين معادلاتي منتهي مي شود:

1- نفوذ همراه با واكنش شيميايي در مسائل مربوط به كاتاليستها
2- انتقال جرم و حرارت در مسائل لايه مرزي
3- كاربرد در روشهاي دقيق بهينه سازي

• روشهاي مختلفي براي حل اين معادلات وجود دارد:

1- *Shooting* method
2- *finite difference* method
3- *collocation* method

• سيستم معادلات در اين نوع مسائل مي تواند خطي و يا غير خطي باشد.
• شرايط مرزي مي توانند به صورت خطي يا غير خطي، جدا يا تركيبي، و نيز دو نقطه اي يا چند نقطه اي باشند.

فرم canonical براي يک مساله مقدار مرزي دو نقطه اي با شرايط مرزي خطي، به صورت زير است:

$$\frac{dy_j}{dx} = f_j(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad x_0 \le x \le x_f \ ; \ j = 1, 2, \ldots, n$$

• شرايط مرزي در نقطه اوليه x_0 و نقطه نهايي x_f هستند.

• r معادله اول داراي شرط اوليه و $(n\text{-}r)$ معادله بعدي، داراي شرط نهايي هستند.

$$y_j(x_0) = y_{j,0} \qquad j = 1, 2, \ldots, r$$

$$y_j(x_f) = y_{j,f} \qquad j = r+1, \ldots, n$$

- یک مساله مقدار مرزي دو نقطه اي که به شکل یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم با دو شرط مرزي است، مي تواند به شکل زیر نوشته شو..

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, \frac{dy}{dx}) \qquad x_0 \le x \le x_f$$

شرایط مرزي مي تو... : $a_0 y(x_0) + b_0 y'(x_0) = \gamma_0$

$$a_f y(x_f) + b_f y'(x_f) = \gamma_f$$

که پانویس هاي 0 و f به ترتیب نشان دهنده نقطه اول و نقطه نهایي هستند.

- براي حل اینگونه مسائل، به شکل زیر عمل مي کنیم:

- ابتدا معادله دیفرانسیل را با تبدیل به فرم *canonical*، به چند معادله دیفرانسیل مرتبه اول تقسیم مي کنیم. به این صورت، یک دستگاه معادلات دیفرانسیل بدست مي آید.

  تعداد معادلات، به تعداد مرتبه معادله اولیه خواهد بود.

- سپس دستگاه معادلات دیفرانسیل حاصل را با استفاده از یکي از روشهاي حل *BVP* حل مي کنیم.

روش *Shooting* :

- در این روش، مساله را به یک مساله مقدار اولیه (IVP) تبدیل مي کنیم تا بتوانیم از روشهاي مورد استفاده براي مسائل مقدار مرزي استفاده نماییم.

- از آنجایي که برخي از شرایط مرزي در نقطه نهایي بودند، لذا باید براي توابعي که شرط مرزي آنها در نقطه انتهایي است، مقدار اولیه را حدس زد.

- به این شکل، با استفاده از شرایط حدس زده شده، مساله را به صورت یک مساله مقدار اولیه حل مي کنیم تا در نقطه نهایي به جواب توابع برسیم. آنگاه این جوابها را با مقادیر واقعی مقایسه می کنیم و در

- در صورتي که جواب حاصل از حدس دوم هم درست نبود، با استفاده از روش قطاع، حدس سوم را انتخاب مي کنیم:

اگر حدس اول y_1 به جواب y_{f1} و حدس دوم y_2 به جواب y_{f2} برسد، مي توانیم بر اساس این مقادیر به یک رابطه خطي بین حدسهاي اولیه و جوابها برسیم:

[redacted]

که در آن y_f، مقدار تابع در نقطه نهایي و y حدس جدید است.

[redacted]

حال اگر مقدار مورد نظر y_f را (مقداري كه مي خواهيم به
آن برسيم)، در رابطه بالا قرار دهيم، به مقداري براي y
براي حدس اوليه جديد دست پيدا خواهيم كرد.

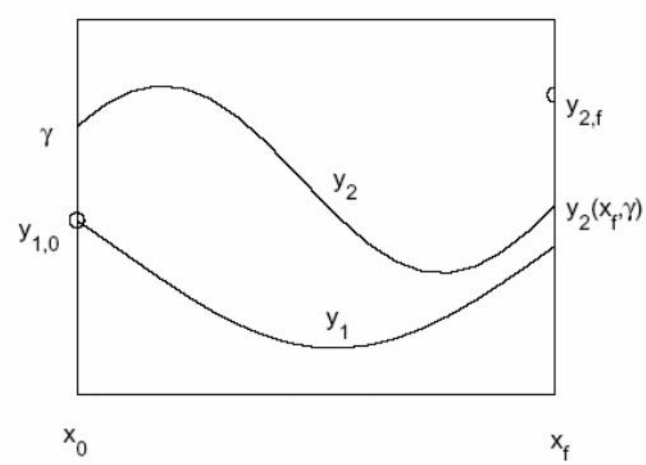


Figure 5.5 Forward integration using a guessed initial condition γ.
The ◦ designates the known boundary points.

روش $Finite\ Difference$:

- در این روش، به جاي مشتق هاي موجود در معادلات ديفرانسيل، مقدار تفاضل محدود آنها را (كه در فصل 6 با آنها آشنا شديم)، قرار مي دهيم. به اين ترتيب به دستگاهي از معادلات ديفرانسيل خواهيم رسيد كه بايد به كمك روش هاي بحث شده در فصل 8 (مانند روش نيوتن) آنها را حل كنيم.

- براي مثال، با همان دستگاه دو معادله اي شروع مي كنيم:

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2)$$

$$\frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2)$$

شرايط مرزي به شكل زير است:

$$y_1(x_0) = y_{1,0}$$

$$y_2(x_f) = y_{2,f}$$

حال مشتق ها را به كمك فرمول هاي مشتق تفاضل محدود پيش رو باز مي كنيم:

$$\frac{dy_{1,i}}{dx} = \frac{1}{h}(y_{1,i+1} - y_{1,i}) + O(h)$$

$$\frac{dy_{2,i}}{dx} = \frac{1}{h}(y_{2,i+1} - y_{2,i}) + O(h)$$

- اگر معادلات مشتق تفاضل محدود با خطاي مرتبه يک را جايگزين مشتقات موجود در معادلات ديفرانسيل دستگاهمان كنيم، خواهيم داشت:

$$y_{1,i+1} - y_{1,i} = hf_1(x, y_{1,i}, y_{2,i})$$

$$y_{2,i+1} - y_{2,i} = hf_2(x, y_{1,i}, y_{2,i})$$

- در اين مرحله، بازه انتگرال گيري (يا همان بازه حل مساله) را به n قسمت مساوي تقسيم مي كنيم. اين تقسيم بندي با توجه به گام *(Step size)* مورد نظر براي حل مساله خواهد بود.

- به اين ترتيب معادلات جديد را در n نقطه، يعني $i=0,1,\ldots,n-1$ مي نويسيم. در اين صورت $2n$ معادله داريم كه مجموعا داراي $2n+2$ مجهولند (نقاط ابتدايي، انتهايي و مياني بازه). با توجه به اينكه مقدار يكي از توابع در نقطه ابتدايي و مقدار تابع ديگر در نقطه انتهايي مشخص است، دو معادله ديگر هم به معادلات ما اضافه مي شود. حال مي توان دستگاه را كه تعداد معادلات و مجهولاتش $2n+2$ است، با روش هاي حل دستگاه هاي معادلات جبري غير خطي حل كرد.

- براي دقت بيشتر، مي توان از تفاضل محدود هايي با مرتبه خطاي بالاتر (مثل (O(h2) استفاده كرد:

$$\frac{dy_i}{dx} = \frac{1}{h}(y_{i+1} - y_i) - \frac{1}{2h}(y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i) + O(h^2)$$
$$= \frac{1}{2h}(-y_{i+2} + 4y_{i+1} - 3y_i) + O(h^2)$$

- بنابراين خواهيم داشت:

$$\frac{1}{2h}(-y_{i+2} + 4y_{i+1} - 3y_i) = f_1(x, y_1, y_2)$$

براي تابع دوم هم به همين شكل خواهد بود.

- بايد توجه داشت كه در صورت استفاده از مشتق با مرتبه خطاي 2، در نقطه ماقبل آخر بايد از تفاضل مركزي استفاده كرد.

فصل یازده

معادله هاي ديفرانسيل پاره ای

مقدمه

• در فرمول‌بندي ديفرانسيلي معمولا به‌علت تعدد متغيرهاي مستقل، نتيجة فرمول‌بندي منجر به معادله‌هاي ديفرانسيل جزيي(PDE) مي‌شود.

انواع معادله‌هاي ديفرانسيل جزيي

- معمولاً نتيجة فرمول‌بندي قانون‌هاي عمومي و ويژه در مدل‌سازي ديفرانسيلي سيستم‌هاي مهندسي شيمي به معادله‌هاي ديفرانسيل مرتبة دوم منجر مي‌شود.

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}) \quad (1\text{-}6)$$

- اين نوع معادله‌ها برحسب پارامتر $\Delta=b^2-4ac$ به سه گروه تقسيم مي‌شوند:

- معادله‌هاي بيضي‌گون (*elliptic*): چنانچه $0 > \Delta$ باشد.

- معادله‌هاي سهمي‌گون (*parabolic*): چنانچه $0 = \Delta$ باشد.

- معادله‌هاي هذلولي (*hyperbolic*): چنانچه $0 < \Delta$ باشد.

- درصورتي كه در يك معادلة ديفرانسيل $b=0$ باشد، نوع معادله براساس علامت ac مشخص مي‌شود :

- اگر a و c هم‌علامت باشند، معادله بيضوي است.

معادلة بيضي‌گون: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

- اگر a يا c صفر باشد، معادله سهمي‌گون است.

معادلة سهمي‌گون: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial u}{\partial t}$

- اگر a يا c هم‌علامت نباشند، معادله هذلولي است.

معادلة هذلولي: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

- در مدل‌سازي‌هاي مهندسي شيمي، معادله‌هاي بيضي‌گون معمولاً در شرايط پايا و معادله‌هاي سهمي‌گون در شرايط گذرا (ناپايا) حاصل مي‌شوند.

روش حل معادله‌هاي ديفرانسيل جزيي

- **تحليلي**
- **عددي**

• روش‌هاي تحليلي معمولاً مبتني بر كاهش تعداد متغيرهاي مستقل و تبديل يك PDE به دو يا چند ODE است.

• روش‌هاي تحليلي مورد استفاده عبارت‌اند از:

- **جداسازي متغيرها (*Separation of variables*)**
- **تركيب متغيرها (*Combination of variables*)**
- **تبديل لاپلاس (*Laplace transformation*)**
- **انتگرال فوريه (*Fourier integration*)**
- **تابع گرين (Green's function)**

• روش‌هاي عددي با كمك رايانه اجرا مي‌شود.

روش جداسازي متغيرها

• **متداول‌ترين روش حل معادله‌هاي ديفرانسيل جزيي، انتخاب تابع به‌صورت حاصل‌ضرب چند تابع مستقل و تبديل يك معادله به چند معادلة ديفرانسيل معمولي است. شرط استفاده از اين روش وجود خاصيت تعامد است.**

خاصيت تعامد (Orthogonality)

- بنابر تعريف، دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ را درصورتي متعامد گويند كه ضرب داخلي اين دو بردار صفر باشد، يعني:

$$\vec{A}.\vec{B} = 0 \qquad (2\text{-}6)$$

- اگر بردارهاي $\vec{A}$ و $\vec{B}$ در يك فضاي سه‌بعدي باشند، داراي سه مؤلفه خواهند بود كه نتيجة ضرب داخلي آنها به صورت زير است:

$$\vec{A}.\vec{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 \qquad (3\text{-}6)$$

- چنانچه فرض شود، بردارهاي $\vec{A}$ و $\vec{B}$ در يك فضاي N بعدي هستند، در صورت متعامد بودن اين دو بردار، رابطة زير برقرار خواهد بود:

$$\sum_{i=1}^{N} A_iB_i = 0 \qquad (4\text{-}6)$$

- اين خاصيت را مي‌توان درمورد دو تابع متعامد $A(x)$ و $B(x)$ براي $x \in (a,b)$ نيز درنظرگرفت، با اين تذكر كه اگر تعداد مؤلفه‌ها به سمت بي‌نهايت ميل كند، علامت مجموع به انتگرال تبديل شود و رابطة زير برقرار مي‌گردد:

$$\int_a^b A(x)B(x)dx = 0 \qquad (5\text{-}6)$$

- به‌اين ترتيب هرگاه انتگرال دو تابع $A(x)$ و $B(x)$ در بازه $[a\text{-}b]$ صفر باشد، اين دو تابع را متعامد مي‌گويند.

• از طرف ديگر حاصل‌ضرب داخلي هر بردار غيرصفر درخودش، غيرصفر و مقدار آن برابر با مجذور اندازة بردار است، يعني:

$$\vec{A}.\vec{A} = A^2$$

(6-6)

• با تعميم اين تعريف براي تابع غير صفر حاصل مي‌شود:

$$\int_a^b [A(x)]^2 dx = \delta\,, \quad \delta \neq 0$$

(7-6)

$\vec{A}$

• مقدار δ بستگي به نوع تابع $A(x)$ دارد. اگر بردار بردار يكه (يا يگاني) باشد، اين حاصل‌ضرب برابر با يك مي‌شود. دراين صورت تابع $A(x)$ ($\varphi(x)$) را نرمال گويند.

• چنانچه تابعي مانند به‌صورت زير

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x)$$

(8-6)

• براي تحقيق در خاصيت تعامد توابع $\varphi_k(x)$ ها با يكديگر مي توان هريك از توابع را به‌منزلة يك بردار در نظرگرفت، آنگاه خاصيت تعامد در اين دستگاه توابع با روابط زير مشخص شود:

$$\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = 0$$

اگر $m \neq n$ (9-6)

$$\int_a^b \varphi_n^2(x)dx \neq 0$$

اگر $m=n$ (10-6)

• به اين مفهوم كه انتگرال حاصل‌ضرب توابع φ_k مختلف صفر، ولي انتگرال هر تابع در خودش غيرصفر است.

- **از آن‌جا که مفهوم انتگرال معین، مساحت زیر منحني است، با توجه به معادلة (9) لازم است به ازاي نواحي بالاي محور x ها، ناحیه‌هایي زیر محور x ها وجودداشته باشد که در مجموع باعث صفرشدن این انتگرال شود. به این دلیل نتیجه مي‌شود که توابعي مي‌توانند خاصیت تعامد داشته باشند که نوساني باشند.**

<u>توابع متعامد با فاکتور وزني</u>

- برخي از توابع نوساني در ابتدا خاصیت تعامد ندارند، ولي با ضرب شدن دریك فاکتور وزني (*weight factor*)، متعامد مي‌شوند. در این‌صورت خاصیت تعامد در تابع مورد نظر به‌صورت انتگرال زیر تحقیق م

$$\int_a^b w(x)\varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = 0 \qquad n \neq m \qquad (11\text{-}6)$$

- $w(x)$ فاکتور وزني است که سبب متعامد شدن تابع‌هاي φ شده‌است.
- براي توابعي که از ابتدا متعامد هستند، فاکتور وزني یك است. توابع سینوسي و کسینوسي به‌صورت سري فوریه و تابع لژاندر از این دسته‌اند.
- توابع بسل نوع اول و دوم، $J(x)$ و $Y(x)$ به‌کمك یك تابع وزني متعامد مي‌شوند . اما توابع بسل تغییریافته، یعني $I(x)$ و $K(x)$ ، توابع لگاریتمي و نمایي داراي خاصیت تعامد نیستند و با هیچ فاکتور وزني متعامد نمي‌شوند، زیرا این توابع ماهیت نوساني ندارند

روش تشخيص توابع متعامد

- در حل معادلـه‌هـاي ديفرانـسيل جزيـي بـه روش جداسـازي متغيرها، تعدادي معادلـه‌هـاي ديفرانـسيل معمـولي بـا شـرايط مرزي حاصل مي‌شود.
- شرط اينكه مسئله از راه جداسازي متغيرها حل شود اين است كه تابع‌هاي اوليه خاصيت تعامد داشته باشند، و شرط داشـتن خاصـيت تعامـد ايـن اسـت كـه يـك يـا چنـد معادلـة ديفرانسيل معمـولي حاصل، قابـل تبـديل بـه مـسئلة اشـتورم-ليوويل (Sturm-Liouville problem) باشد.

مسئله اشتورم - ليوويل

- عبارت است از يک مسئله شرط مرزي از نوع معادلة ديفرانسيل همگن مرتبة دوم با شرايط مرزي همگن در فاصلة معين ،به شكل كلي زير:

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right]+\left[q(x)+\lambda^2 w(x)\right]y=0 \qquad (12\text{-}6)$$

- شرايط مرزي

$$\begin{cases}\alpha_1 y(a)+\alpha_2 y'(a)=0 & (13\text{-}6)\\ \beta_1 y(b)+\beta_2 y'(b)=0 & (14\text{-}6)\end{cases}$$

- $\alpha_1 , \alpha_2 , \beta_1 , \beta_2$ مقادير ثابت و معلوم‌اند، به‌طوري‌كه α_1 و α_2 ، همچنين β_1 و β_2 نمي‌توانند همزمان صفر باشند.
- اگردر معادلـه (12)، $p(x)$, $q(x)$, $w(x)$ تـوابعي پيوسته و $p(x)$, $w(x)$ نيزدر بـازه (a و b) مثبـت باشـند، در صـورتي كـه پـارامتر λ بتوانـد مقـادير مختلفـي ($\lambda_1<\lambda_2<...,<\lambda_n<,...$) داشته باشد، اين معادله نيز جواب‌هاي مختلفي خواهد داشت (y_n) كه داراي خاصيت تعامد هستند.
- بـه پـارامتر λ_n مقـدار ويـژه (*eigen value*) وبـه تـابع (y_n) تـابع ويـژه (*eigen function*) متنـاظر گويند. در نهايت جـواب عمومي مـسئله، تركيـب خطـي از اين جواب‌هاي متعامد است.

يعني:

$$y=\sum_{1}^{\infty} A_n y_n$$

قضيه

- **هرگاه يك معادلة ديفرانسيل معمولي همراه با شرايط مرزي آن قابل تبديل به مسئلة اشتورم - ليوويل، يعني معادلة همگن و خطي(12)، با شرايط مرزي همگن (13 و 14) باشد ، جواب‌هاي آن معادله نسبت به تابع وزني w(x) خاصيت تعامد دارند.**

اثبات

- فرض مي‌شود به ازاي مقادير λ_n و λ_m ، به‌ترتيب y_n و y_m جواب‌هاي معادلة (12) باشند. بنابراين با جايگزين كردن هريك از مقادير بالا در معادلة (12)، معادله‌هاي زير حاصل مي‌شوند:

$$\frac{d(p(x)y_n')}{dx}+\left[q(x)+\lambda_n^2 w(x)\right]y_n=0 \qquad (15\text{-}6)$$

$$\frac{d(p(x)y_m')}{dx}+\left[q(x)+\lambda_m^2 w(x)\right]y_m=0 \qquad (16\text{-}6)$$

- با ضرب كردن اولين معادله در y_m و دومي در y_n و سپس كم كردن دو معادله از يكديگر نتيجه مي‌شود:

$$(\lambda_n^2-\lambda_m^2)w(x)y_m y_n=y_m\frac{d(p(x)y_n')}{dx}-y_n\frac{d(p(x)y_m')}{dx} \qquad (17\text{-}6)$$

- باتوجه به اينكه $\lambda_n \neq \lambda_m$ است، با انتگرال‌گيري از دوطرف معادلة (17)، چنانچه ثابت شود رابطة $\int_a^b w(x)y_m y_n=0$ برقرار است، خاصيت تعامد وجود دارد.

- بنابراين:

$$\Delta=\int_a^b y_n\frac{d}{dx}\left[p(x)y_m'\right]dx-\int_a^b y_m\frac{d}{dx}\left[p(x)y_n'\right]dx \qquad (18\text{-}6)$$

• بـراي تعيـين هريـك از جملـه‌هـا بـه‌روش جـزء بـه جـزء انتگرال‌گيري مي‌شود.

$$\int_a^b y_n \frac{d}{dx}[p(x)y'_m]dx = p(x)y_n y'_m\Big|_a^b - \int_a^b p(x)y'_n y'_m dx \qquad (19\text{-}6)$$

$$\int_a^b y_m \frac{d}{dx}[p(x)y'_n]dx = p(x)y_m y'_n\Big|_a^b - \int_a^b p(x)y'_m y'_n dx \qquad (20\text{-}6)$$

• بـا كـم كـردن معادلـة (19) و (20) از يكـديگر نتيجـه مي‌شود:

$$\Delta = p(x)\left(y_m y'_n - y_n y'_m\right)\Big|_a^b \qquad (21\text{-}6)$$

• همچـنين شـرايط مـرزي (13) و (14) بـه‌صـورت زيـر نوشته مي‌شود:

$$y'(a) = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2}y(a) \qquad (22\text{-}6)$$

$$y'(b) = -\frac{\beta_1}{\beta_2}y(b) \qquad (23\text{-}6)$$

• پـس از جـاي‌گـذاري $y'(b), y'(a)$ در معادلـة (21) نتيجه مي‌شود كه رابطة زير برابر با صفر است.

(24-6)

$$\Delta = p(b)\left[-y_m(b)\frac{\beta_1}{\beta_2}y_n(b) + y_n(b)\frac{\beta_1}{\beta_2}y_m(b)\right] - p(a)\left[-y_m(a)\frac{\alpha_1}{\alpha_2}y_n(a) + y_n(a)\frac{\alpha_1}{\alpha_2}y_m(a)\right]$$

• بنـابراين انتگـرال سـمت چـپ معادلـة (17) صـفر مي‌شود.

$$(\lambda_n^2 - \lambda_m^2)\int_a^b w(x)y_m y_n = 0 \qquad (25\text{-}6)$$

• چون $(\lambda_m{}^2 - \lambda_n{}^2) \neq 0$ ، بنابراين:

$$\int_a^b w(x)y_m y_n = 0 \qquad (26\text{-}6)$$

• مـي‌تـوان نتيجـه گرفـت جـواب‌هـاي معادلـه بـا اعمـال فـاكتور وزنـی $w(x)$ متعامد هستند

- شرایط مرزي ارائه شده، (13 و 14)، مي‌تواند به‌صورت يکي از انواع سه شرط مرزي زير ارائه گردد:
- **شرط مرزي نوع اول: در حالتي محقق مي‌شود که يا صفر باشند، يعني:**

$y(a)=0$ و $y(b)=0$

- **شرط مرزي نوع دوم: در حالتي محقق مي‌شود که يا صفر باشند، يعني:**

$y'(a)=0$ و $y'(b)=0$

- **شرط مرزي نوع سوم: درحالتي که هيچيك از پارامترهاي ، يا و صفر نباشند، محقق مي‌شود.**

$$\begin{cases}\alpha_1 y(a)+\alpha_2 y'(a)=0\\ \beta_1 y(b)+\beta_2 y'(b)=0\end{cases}$$

<u>جداسازي متغيرها در معادلة سهمي‌گون</u>

- ساده‌ترين PDE سهمي‌گون با دو متغير مستقل، به‌صورت زير نوشته مي‌شود:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial u}{\partial t}$$

(27-6)

- همراه با دو شرط مرزي نوع اول و يك شرط اوليه:

$$\begin{cases}u(0,t)=0\\ u(L,t)=0\end{cases}$$

(28-6)

$$u(x,0)=u_0$$

(29-6)

- معادله و شرايط مرزي همگن‌اند و فقط يك شرط اولية ناهمگن وجود دارد.
- ابتدا تابع $u(x,t)$ به‌صورت حاصل‌ضرب دو t $u(x,t)=X(x)\tau(t)$ معرفي مي‌شود:

(30-6)

- با قراردادن رابطة (30) در معادلة (27) و جداسازي تا $\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}=\frac{1}{\alpha\tau}\frac{\partial \tau}{\partial t}$

• جداسازي متغيرها، بايد براي شرايط مرزي مسئله نيز اعمال شوند.

$$X(0)\tau(t)=0 \Rightarrow X(0)=0 \quad (32\text{-}6)$$

$$X(L)\tau(t)=0 \Rightarrow X(L)=0 \quad (33\text{-}6)$$

• براي اينكه معادلة (31) برقرار باشد، لازم است كه اين معادله برابر با صفر يا يك عدد ثابت باشد.

• انتخاب عدد صفر سبب مي‌شود كه در نهايت تابع $u(x,t)$ صفر شود كه جواب غيرمنطقي است. بنابراين حالت ديگر يعني انتخاب عدد مثبت يا منفي بررسي مي‌شود.

- **حالت اول** - مقدار مثبت ($+\lambda^2$)

$$\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}=\frac{1}{\alpha\tau}\frac{\partial \tau}{\partial t}=+\lambda^2 \quad (34\text{-}6)$$

• در اين حالت هر معادله به‌طور جداگانه حل مي‌شود و پس از تعيين تابع $X(x)$ و، تابع $u(x,t)$ به‌دست مي‌آيد.

• باتوجه به همگن بودن معادله و شرايط مرزي ، انتخاب مقدار مثبت صحيح نيست، زيرا معادله قابل تبديل به مسئلة اشتورم - ليوويل نيست. بنابراين جواب ها خاصيت تعامد نخواهندداشت. چنانچه اين امر تشخيص داده نشود، مي‌توان با همين شرايط مسئله را حل كرد، كه در اين‌صورت جواب منطقي حاصل نمي‌شود. همان‌طوركه در زير ملاحظه مي‌شود:

$$\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}=+\lambda^2 \quad (35\text{-}6)$$

(36-6) $$\frac{1}{\alpha\tau}\frac{\partial\tau}{\partial t} = +\lambda^2$$

نتيجة حل معادلة (35) $$X = Ae^{-\lambda x} + Be^{+\lambda x}$$

نتيجة حل معادلة (36) $$\tau = Ce^{\alpha\lambda^2 t}$$

با اعمال شرط مرزي (32) در معادلة (35):

$$B = -A$$

با اعمال شرط مرزي (33) در معادلة (35):

$$exp(2\lambda L) = 1 \quad \Rightarrow \lambda = 0$$

- كه باعث جواب غيرمنطقي ميشود.

- حالت دوم - مقدار منفي ($-\lambda^2$)

(37-6) $$\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha\tau}\frac{\partial\tau}{\partial t} = -\lambda^2$$

- دراين حالت باتوجه به اينكه معادلة مربوط به قابل $X(x)$ تطبيق به مسئلة اشتورم - ليوويل است ، مجموعه تابع $X(x)$ خاصيت تعامد دارد و مسئله بهروش جداسازي متغيرها داراي جواب منطقي است.

(38-6) $$\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\lambda^2$$

(39-6) $$\frac{1}{\alpha\tau}\frac{\partial\tau}{\partial t} = -\lambda^2$$

- نتيجة حل معادلة (38):

$$X(x) = A sin(\lambda x) + B cos(\lambda x)$$

• باتوجه به شرايط مرزي (معادله‌هاي (32) و (33)) نتيجه مي‌شود:

$$B = 0$$

$$sin(\lambda L) = 0$$

(40-6)

(41-6)

• از معادلة (41) مقدار ويژه ي λ به‌دست مي‌آيد كه بي‌نهايت جواب دارد، به‌صورت زير:

$$\lambda_k = \frac{k\pi}{L} \text{ و } k = 1, \ldots, n$$

(42-6)

$$\tau(t) = Ce^{-\alpha\lambda^2 t}$$

با حل معادلة (39) تابع زير حاصل مي‌شود:

(43-6)

• براي حل معادلة (43) بايد از شرط اولية مسئله استفاده كرد، ولي چون شرط اوليه ن... $u(x,t)$ كه از حاصلض... جاي‌گذاري كرد.

$$u(x,t) = X(x).\tau(t) = De^{-\alpha\lambda^2 t} sin(\lambda x)$$

$$D = AC$$

• با توجه به اينكه براي مقدار ويژة λ، تعداد جواب‌هاي بي‌شماري وجود دارد، تابع $u(x,t)$ نيز داراي جواب‌هاي بي‌شمار است و ثابت انتگرال(D) نيز مختلف است .مثلا براي k:

$$\lambda_k = \frac{k\pi}{L} \Rightarrow u_k(x,t) = X_k(x)\tau_k(t) = D_k e^{-\alpha\lambda_k^2 t} sin(\lambda_k x) \quad (45\text{-}6)$$

• بنابراين جواب عمومي ... (37) ... تركيب خطي اين جواب‌ها

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k e^{-\alpha\lambda_k^2 t} sin(\lambda_k x)$$

(46-6)

• در اين مرحله با اعمال شرط اوليه(29)، م... ثابت D_k را به‌دست آورد.

$$u_0 = \sum_{k=0}^{\infty} D_k \, sin(\lambda_k x)$$

(47-6)

- چندجملهاي حاصل سري فورية سينوسي است كه با استفاده از خاصيت تعامد ثابت Dk تعيين ميشود. به اين منظور طرفين معادله در $\sin(\lambda_\kappa x)$ ضرب و در محدودة صفر تا L انتگرالگيري ميشود. در اينصورت دو دسته انتگرال بهصورت زير پديد ميآيد:

$$\int_0^L sin(\lambda_k x)\, sin(\lambda_n x)dx \begin{cases} =0 & n \neq k \\ \neq 0 & n = k \end{cases}$$

- با كمك اين خاصيت، ثابت Dk با رابطة زير بهدست ميآيد:

$$D_k = \frac{u_0 \int_0^L sin(\lambda_k x)dx}{\int_0^L sin^2(\lambda_k x)dx} \qquad (48\text{-}6)$$

- چون $\lambda_k = \frac{k\pi}{L}$ و $(\lambda_\kappa L)$ مضرب صحيحي از π يا $\frac{\pi}{2}$ ميباشد (k عدد صحيح است)، انتگرال مخرج كسر برابر با $\frac{L}{2}$ ميشود. انتگرال صورت كسر نيز بهراحتي قابل محاسبه است، بنابراين:

$$D_k = \frac{2u_0}{L}\int_0^L sin(\lambda_k x)dx = \frac{2u_0}{k\pi}(1 - cos\, k\pi) \qquad (49\text{-}6)$$

- اگر k = عدد زوج (k=2n): $D_k = 0$

- اگر k = عدد فرد (k=2n+1): $D_k = \frac{4u_0}{(2n+1)\pi}$

- بنابر اين جواب نهايي مسئله، بهصورت زير حاصل ميشود:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4u_0}{(2n+1)\pi} e^{-\alpha \frac{(2n+1)^2\pi^2}{L^2}t} sin\frac{(2n+1)\pi}{L}x \qquad (50\text{-}6)$$

خلاصة مراحل روش جداسازي متغيرها

- تعريف تابع به‌صورت حاصل‌ضرب چند تابع مستقل از هم.
- جاي‌گذاري تابع جديد در معادلة ديفرانسيل جزيي، جداكردن تابع‌هاي مستقل، تبديل آنها به چند معادلة ديفرانسيل معمولي و مساوي قراردادن هريك با پارامتر ثابت كه بر حسب شرايط مرزي موجود $+\lambda^2$ يا $-\lambda^2$ انتخاب مي‌شود.
- جاي‌گذاري تابع‌هاي جديد در شرايط مرزي همگن مسئله و تعيين شرط مرزي براي هريك از معادله‌هاي ديفرانسيل حاصل.
- حل معادله‌هاي ديفرانسيل معمولي حاصل، تعيين جواب‌هاي عمومي و تعيين مقدار ويژه ي (λ_κ).
- تركيب هريك از توابع مستقل و تعيين شكل عمومي تابع

- **مسئله 6-5-** معادلة (27) را با شرايط مرزي زيرحل كنيد:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial u}{\partial t} \qquad (27\text{-}6)$$

$$\begin{cases} u(0,t)=0 & (51\text{-}6) \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t)=u(L,t) & (52\text{-}6) \end{cases}$$

حل مسئله

- مراحل حل مسئله تا رسيدن به جواب‌هاي عمومي توابع $X(x)$ و با مسئلة قبل يكسان است، بنابراين: $X(x) = A\sin(\lambda x)$

$\tau(t) = Ce^{-\alpha\lambda^2 t}$

- با كمك جداسازي متغيرها، معادلة (52) به‌صورت زير تبديل مي‌شود:

$$\tau(t)\frac{\partial X(L)}{\partial x} = \tau(t)X(L) \Rightarrow \frac{\partial X(L)}{\partial x} = X(L) \qquad (53\text{-}6)$$

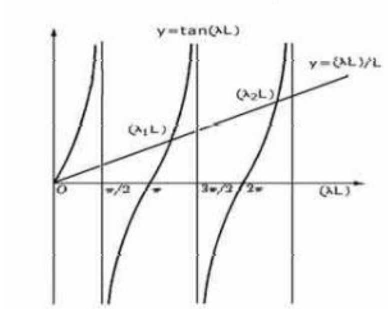
- با اعمال اين شرط در تابع $X(x)$ ، مقدار ويژة λ تعيين مي‌گردد:

$$\lambda L\cos(\lambda L) = L\sin(\lambda L) \qquad (54\text{-}6)$$

$$\tan(\lambda L) = \frac{(\lambda L)}{L}$$

- با تقسيم طرفين معادلة (54) بر رابطة زير حاصل

- با رسم $\tan(\lambda L)$ تابع و $\frac{(\lambda L)}{L}$ تابع برحسب (λL)، از محل تلاقي دو تابع مي‌توان جواب‌هاي (λ) را به‌دست آورد. شكل (1-6) به‌طور تقريبي نشان‌دهندة حل معادلة (55) است. باتوجه به شكل، جواب‌هاي بي‌شمار براي λ_k حاصل مي‌شود. درنهايت جواب عمومي تابع $u(x,t)$ به‌صورت معادلة (46) به



$\frac{(\lambda L)}{L}$ $\tan(\lambda L)$

شكل (1-6) تعيين مقادير ويژه (λL) از تقاطع دو تابع

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty} D_k e^{-\alpha\lambda_k^2 t}\sin(\lambda_k x)$$ (46-6)

- با اعمال شرط اولية ناهمگن (معادلة (29)):

$$u_0=\sum_{k=0}^{\infty} D_k \sin(\lambda_k x)$$ (47-6)

- باتوجه به خاصيت تعامد ثابت به‌دست مي‌آيد:

(48-6)
$$D_k=\frac{u_0\int_0^L \sin(\lambda_k x)dx}{\int_0^L \sin^2(\lambda_k x)dx}$$

- تفاوت اين مسئله با مثال قبلي، در مقدار و است. باتوجه به اينكه (λL) مضرب صحيحي از يا نيست، نتيجة انتگرال‌گيري از مخرج معادلة (48) به‌صورت زير حاصل مي‌شود:

$$\int_0^L \sin^2(\lambda_k x)dx=\frac{L}{2}-\frac{\sin(\lambda_k L)\cos(\lambda_k L)}{2\lambda_k}$$

(56-6)

- صورت كسر نيز با توجه به اينكه (λL_k) مضرب صحيحي از π نيست، به‌صورت زير باقي مي‌ماند:

(57-6)
$$u_0\int_0^L \sin(\lambda_k x)dx=\frac{u_0}{\lambda_k}[1-\cos(\lambda_k L)]$$

- بنابراين ثابت ب

$$D_k=\frac{u_0[1-\cos(\lambda_k L)]}{\lambda_k L-\sin(\lambda_k L)\cos(\lambda_k L)}$$

• **مسئلة (6-7)-** معادلة زير يك PDE سهمي‌گون در مختصات استوانه‌اي است. باتوجه به شرايط مرزي و اولية موجود معادله راحل كنيد.

(87-6)

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial u}{\partial t}$$

(88-6)

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial r}(0,t)=0 \quad \text{يا} \quad u(0,t)=\text{متناهي}\\ u(r_0,t)=0\\ u(r,0)=u_0\end{cases}$$

• در مركز استوانه همواره به دليل تقارن شرط مرزي همگن نوع دوم برقرار است. اما در اين نوع مسائل مي‌توان به‌جاي استفاده از شرط مرزي نوع دوم، از متناهي بودن تابع در مركز استوانه كمك گرفت . زيرا متغيرهاي فيزيكي مطرح در مهندسي معمولاً در مرزهاي سيستم داراي مقدار محدودي‌اند و نمي‌توانند نامتناهي باشند، بنابراين خواهيد ديد از اين خاصيت مي‌توان جواب خصوصي معادله را راحت‌تر به‌دست آورد

حل مسئله

• با توجه به همگن بودن معادله و شرايط مرزي مسئله مي‌توان از روش جداسازي متغيرها استفاده كرد.

$$u(r,t)=R(r)\tau(t) \tag{89-6}$$

$$R(r_0)=0 \qquad \frac{\partial R(0)}{\partial r}=0 \quad \text{يا} \quad R(0)\ \text{متناهي} \tag{90-6}$$

• پس از جاي‌گذاري معادلة (89) در معادلة (87) و جداكردن متغيرها:

$$\frac{1}{rR}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial R}{\partial r}\right)=\frac{1}{\alpha\tau}\frac{\partial \tau}{\partial t} \tag{91-6}$$

• براي برقراري رابطة (91) بايد اين معادله با مقداري مثبت يا منفي برابر باشد.

- **حالت اول** - مقدار مثبت ($+\lambda^2$)

- باتوجه به همگن بودن شرايط مرزي در تابع $R(r)$ بايد معادلهٔ ديفرانسيل مرتبهٔ دوم حاصل به شكل اشتورم - ليوويل نوشته و خاصيت تعامد در آن تحقيق شود، بنابراين:

$$\frac{1}{rR}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial R}{\partial r}\right)=\lambda^2 \qquad (92\text{-}6)$$

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)-\lambda^2 rR=0 \qquad (93\text{-}6)$$

- چنانچه مسئلهٔ كلي اشتورم - ليوويل براساس تابع نوشته شود معادلهٔ (94) حاصل مي‌گردد.

$$\frac{d}{dr}\left[p(r)\frac{dR}{dr}\right]+\left[q(r)+\lambda^2\omega(r)\right]R=0 \qquad (94\text{-}6)$$

- با تطبيق اين مسئله با معادلهٔ (93) نتيجه مي‌شود:

$p(r)=r$ و $q(r)=0$ $\quad w(r)=-r$

- ملاحظه مي‌شود تابع $w(r)$ در بازه $(0\text{-}r_0)$ منفي است، بنابراين خاصيت تعامد در جواب‌هاي $R(r)$ وجود ندارد. از سوي ديگر جواب معادله (93) از نوع $I_0(\lambda r)$ است كه غير نوساني است و امكان بر قراري شرايط تعامددر جواب ها را ندارد. در اين‌صورت حالت دوم را بايد بررسي كرد.

- **حالت دوم** - مقدار منفي ($-\lambda^2$)

- در اين حالت معادلهٔ ديفرانسيل مرتبهٔ دوم به شكل زير حاصل مي‌شود:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{dR}{dr}\right]+\lambda^2 rR=0 \qquad (95\text{-}6)$$

- در اين‌صورت $w(r)=r$ و در بازه$(0\text{-}r_0)$ مثبت است ،بنابراين معادلهٔ (95) با شرايط مرزي همگن خود قابل تطبيق به مسئلهٔ اشتورم - ليوويل است و خاصيت تعامد دارد.

- معادلهٔ (95) منطبق با شكل كلي معادله‌هاي بسل است، بنابراين باتوجه به جدول (3-4):

$\alpha=1,\beta=1,\nu=0,\gamma^2=\lambda^2$

- بنابراين جواب عمومي تابع $R(r)$ به‌دست مي‌آيد.

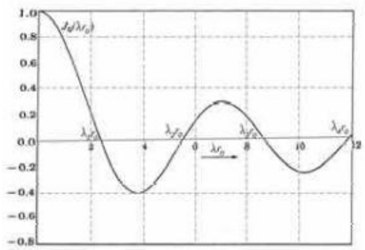
$$R(r)=AJ_0(\lambda r)+BY_0(\lambda r) \qquad (96\text{-}6)$$

- با توجه به شرط مرزي متناهي بودن تابع در $r=0$، تابع بسل نوع دوم (Y) را نمي‌توان جواب قابل قبول معادلهٔ (96) دانست، پس بايد ضريب B صفر باشد.

• با اعمال شرط مرزي $R(r_0)$، مقدار ويژه ي λ به‌دست مي‌آيد.

$$J_0(\lambda r_0)=0 \qquad (97\text{-}6)$$

• با محاسبة ريشه‌هاي معادلة (97) مقدار (λr_0) و درنتيجه λ تعيين مي‌شود. براي حل اين معادله، به روش ترسيمي، تابع (λr_0) J_0برحسب λr_0 رسم مي‌شود. در اين‌صورت از محل تقاطع آن با محور افقي ريشه‌هاي معادله به‌دست مي‌آيند. در شكل (6-2) معادلة (97) ترسيم شدها



شكل (6-2) تعيين ريشه‌هاي تابع $J_0(\lambda r_0)$

• مطابق شكل λ، داراي جواب‌هاي بي‌شمار $(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_k)$ است، بنابراين تابع نيز جواب‌هاي بي‌شمار خواهد داشت.

• در مرحلة بعد تابع $\tau(t)$ عيين مي‌شود. باتوجه به معادلة (91) و برابري آن با مقدار ثابت $(-\lambda^2)$ نتيجه مي‌شود.

$$\frac{1}{\alpha\tau}\frac{\partial\tau}{\partial t}=-\lambda^2 \qquad (98\text{-}6)$$

$$\tau(t)=Ce^{-\alpha\lambda^2 t} \qquad (99\text{-}6)$$

• پس از تعيين توابع $R(r)$ و، تابع به‌دست مي‌آيد و با توجه به جواب‌هاي بي‌شمار نتيجه مي‌شود.

$$u(r,t)=\sum_{k=1}^{\infty}D_k e^{-\alpha\lambda_k^2 t}J_0(\lambda_k r) \qquad (100\text{-}6)$$

• براي تعيين ثابت D_k از شرط مرزي ناهمگن مسئله و سپس خاصيت تعامد استفاده مي‌شود.

$$u_0=\sum_{k=1}^{\infty}D_k J_0(\lambda_k r) \qquad (101\text{-}6)$$

• براي متعامد كردن تابع بسل نوع اول طرفين معادله در فاكتور وزني ضرب مي‌شود. بنابراين:

$$u_0 r=\sum_{k=1}^{\infty}D_k r J_0(\lambda_k r) \qquad (102\text{-}6)$$

- در اين حالت طرفين معادلة (102) در ضرب و در فاصلة 0 تا r=0 انتگرال‌گيري مي‌شود.

(103-6)

$$D_k = \frac{u_0 \int_0^{r_0} rJ_0(\lambda_k r)dr}{\int_0^{r_0} rJ_0^2(\lambda_k r)dr}$$

- انتگرال صورت و مخرج معادلة بالا با توجه به خواص توابع بسل، به‌ترتيب به‌كمك معادله‌هاي (3-127) و (3-128) و (3-129) جاي‌گذاري مي‌گردد. به‌طوري‌كه:

(129-3)

$$\int mr^{v} J_{v-1}(mr)dr = r^{v} J_{v}(mr)$$

- اگر $m=\lambda_k$, $v=1$ باشد، در دو حد $(0,r_0)$ نتيجه مي‌شود:

(104-6)

$$\int_0^{r_0} rJ_0(\lambda_k r)dr = \frac{r_0}{\lambda_k} J_1(\lambda_k r_0)$$

$$\int rJ_v^2(mr)dr = \frac{1}{2m^2}\left\{(m^2r^2 - v^2)J_v^2(mr) + \left[rJ'_v(mr)\right]^2\right\}$$

(128-3)

- اگر $m=\lambda_k$, $v=1$ باشد، در دو حد $(0,r_0)$ نتيجه مي‌شود:

$$\int_0^{r_0} rJ_0^2(\lambda_k r)dr = \frac{1}{2\lambda_k^2}\left\{(\lambda_k^2 r_0^2)J_0^2(\lambda_k r_0) + \left[r_0 J'_0(\lambda_k r_0)\right]^2\right\}$$

- رابطة مشتق تابع بسل:

$$J'_0(mr) = -mJ_1(mr)$$

(127-3)

- اگر: نتيجه مي‌شود:

$$J'_0(\lambda_k r) = -\lambda_k J_1(\lambda_k r)$$

(105-6)

$$\int_0^{r_0} rJ_0^2(\lambda_k r)dr = \frac{r_0^2}{2} J_1^2(\lambda_k r_0)$$

- بنابراين با جاي‌گذاري معادله‌هاي (104) و (105) در (103) ثابت Dk به‌دست مي‌آيد:

$$D_k = \frac{2u_0}{(\lambda_k r_0)J_1(\lambda_k r_0)}$$

• **مسئلة6-9-** معادلـة زيـر يـك PDE سـهمي‌گـون در مختـصات كـروي بـا شـرايط مـرزي همگـن است. بـا توجـه بـه اينكـه شـرط مـرزي درسـطح كـره يـك شـرط مـرزي همگـن نـوع سـوم اسـت، مسئلـه را حل كنيد (b عدد ثابت است)

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial u}{\partial r})=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial u}{\partial t} \quad (118\text{-}6)$$

$\frac{\partial u}{\partial r}(0,t)=0 \qquad u(0,t)$ متنـاهي

$$\frac{\partial u}{\partial r}(r_0,t)=bu(r_0,t) \quad (119\text{-}6)$$

$$u(r,0)=u_0 \quad (120\text{-}6)$$

حل مسئله

• چنانچه ملاحظه مي‌شود، معادله و شرايط مرزي همگن‌اند. بنـابراين از روش جداسازي متغيرها مي‌توان مسئله را حل كرد.

$$u(r,t)=R(r)\tau(t)$$

• بنابراين:

$$\frac{1}{r^2R}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial R}{\partial r})=\frac{1}{\alpha\tau}\frac{\partial\tau}{\partial t} \quad (121\text{-}6)$$

• با مساوي قراردادن اين دو معادله بايك عدد مثبت يا منفي ،دومعادلـه ODE حاصل مي‌شود كه بايد معادلة مربوط به $R(r)$ قابل تطبيق با مسئلة اشتورم - ليوويل باشد. در صـورت انتخـاب مقدارمنفي ($-\lambda^2$) :

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial R}{\partial r})+\left[\lambda^2 r^2\right]R=0 \quad (122\text{-}6)$$

• شرايط مرزي $\frac{\partial R}{\partial r}(0)=0 \qquad R(0)$ = متناهي

$$\frac{\partial R}{\partial r}(r_0)-bR(r_0)=0 \quad (123\text{-}6)$$

- از تطبيق معادلة (122) با مسئله اشتورم - ليوويل و شرايط مرزي آن نتايج زير حاصل مي‌شود،كه نشان‌دهندة برقراري خاصيت تعامد درجواب‌هاي $R(r)$ است.

$$p(r)=r^2,\ q(r)=0,\ w(r)=r^2$$

$$\begin{cases}\alpha_1=0, \alpha_2=1\\ \beta_1=-b, \beta_2=1\end{cases}$$

- جواب معادلة (122) به‌كمك جدول (3-4) تعيين مي‌شود.

$$\alpha=2, \beta=2, \gamma^2=\lambda^2$$

$$v=-\frac{1}{2}, \mu=1, \frac{v}{\mu}=-\frac{1}{2}$$

- در نتيجه تابع $R(r)$ تعيين مي‌شود.

$$R(r)=Ar^{\frac{-1}{2}}J_{\frac{1}{2}}(\lambda r)+Br^{\frac{-1}{2}}J_{-\frac{1}{2}}(\lambda r) \qquad (124\text{-}4)$$

- با توجه به معادله‌هاي (3-138) و (3-139) رابطة $J_{\frac{1}{2}}(\lambda r)$ و $J_{-\frac{1}{2}}(\lambda r)$ برحسب توابع مثلثاتي ارائه شده است. پس از جاي‌گذاري، معادلة (124) به‌صورت زير تبديل مي‌شود.

$$R(r)=\frac{A}{r}sin(\lambda r)+\frac{B}{r}cos(\lambda r) \qquad (125\text{-}6)$$

- با توجه به شرط مرزي مسئله كه در r=0 مقدار تابع $R(r)$ معين است، نتيجه مي‌شود كه ثابت B بايد صفر باشد. زيرا عبارت دوم در r=0 نامعين است، ولي عبارت اول در مبهم بوده كه پس از رفع ابهام مقدار معيني مي‌شود، بنابراين:

$$R(r)=\frac{A}{r}sin(\lambda r) \qquad (126\text{-}6)$$

- براي تعيين مقدار ويژة از شرط مرزي نوع سوم معادلـة (123) استفاده مـيشـود كـه بـا جـايگذاري آن در معادلـة (126) رابطة زير حاصل

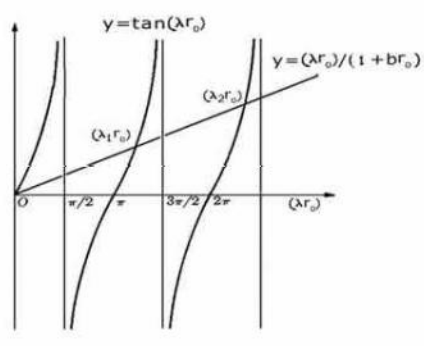
$$\left[-\frac{1}{r_0^2}sin(\lambda r_0)+\frac{\lambda}{r_0}cos(\lambda r_0)\right]=\frac{b}{r_0}sin(\lambda r_0)$$

$$\lambda cos(\lambda r_0)=(b+\frac{1}{r_0})sin(\lambda r_0) \qquad (127\text{-}6)$$

- از تقسيم طرفين بر نتيجه ميشود:

$$tan(\lambda r_0)=\frac{\lambda r_0}{1+br_0} \qquad (128\text{-}6)$$

- بـا رسـم دو معادلة $y_1=tan(\lambda r_0)$ و $y_2=\frac{\lambda r_0}{1+br_0}$ برحسب λr_0 و از تقـاطع ايـن دو تـابع مقـدار بـهدسـت مـيآيـد. تـابع برحسب علامت و مقدار b ممكن است داراي شيب مثبت يـا منفي باشد. در شكل (6-3) اين دو تابع بهطور تقريبي رسم شدهاند.



شكل (6-3) تعيين مقادير ويژه ($\lambda_k r_0$)ازتقاطع دوتابع

- باتوجـه بـه شـكل (3) بـراي λ جـوابهـاي بـيشـمار ($\lambda_k,...,\lambda_2,\lambda_1$) بـهدسـت مـيآيـد. بنـابراين تعـداد جـوابهـاي قابـل قبـول نيـز بـيشـمار است. پس از حل تابع $\tau(t)$ جواب عمومي بهدست ميآيد:

$$u(r,t)=R(r)\tau(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{D_n e^{-\alpha\lambda_n^2 t}}{r}sin(\lambda_n r) \qquad (129\text{-}6)$$

- با اعمال شرط اولیه، یعني معادلة (120):

$$u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n}{r} sin(\lambda_n r) \qquad (130\text{-}6)$$

- با ضرب كردن طرفين معادلـة (130) در r ، سري فوريـة سينوسـي حاصـل مـيشـود كـه خاصـيت تعامـد دارد و با استفاده از اين خاصيت، D_n بهدست ميآيد:

$$D_n = \frac{u_0 \int_0^{r_0} r\, sin(\lambda_n r) dr}{\int_0^{r_0} sin^2(\lambda_n r) dr} \qquad (131\text{-}6)$$

- **نتيجهگيري: براي اعمال روش جداسازي متغيرها، بايد خاصيت تعامد برقرار باشد. براي اطمينان از اين مسئله بايد اولاً معادلـة ديفرانسيل همگن باشد، ثانياً فقط يك شرط ناهمگن وجود داشتهباشد. در معادلـههاي ديفرانسيل سهميگون، شرط ناهمگن، شرط اوليه است.**
- **توابعي كه خاصيت تعامد نشان ميدهند، نوسانياند، مانند توابع سينوسي، كسينوسي، توابع بسل نوع اول و دوم و توابع لژاندر.**

جداسازي متغيرها در معادلة بيضي‌گون

- در مدل‌سازي جرم و انرژي و اندازة حركت در شرايط پايا كه در آن عبارت‌هاي نفوذ وجود دارد، معادله‌هاي PDE بيضي‌گون حاصل مي‌شوند.
- PDE زير را با توجه به شرايط مرزي ارائه شده حل مي كنيم.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad (132\text{-}6)$$

$$\begin{cases} u(0,y)=u(l,y)=0 \\ u(x,0)=0, u(x,L)=u_0 \end{cases} \qquad (133\text{-}6)$$

- معادله و شرايط مرزي مسئله همگن است، به‌جز يك شرط غير همگن در $y=L$ ، بنابراين روش جداسازي متغيرها را

حل مسئله

$$u(x,y)=X(x)Y(y)$$

$$\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}=-\frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} \qquad (134\text{-}6)$$

- معادلة (134) بايد مساوي با $(+\lambda^2)$ يا $(-\lambda^2)$ قرار گيرد. باتوجه به شرايط مرزي كه داراي دو شرط همگن براي تابع $X(x)$ است لازم است مقدار ويژه طوري انتخاب شود كه شكل اين تابع نوساني باشد تا جواب‌هاي آن متعامد باشند، در نتيجه با انتخاب اين شرط حاصل مي‌شود.

$$\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}=-\lambda^2 \qquad (135\text{-}6)$$

$$X(x)=A\sin(\lambda x)+B\cos(\lambda x) \qquad (136\text{-}6)$$

$$\begin{cases} X(0)=0 \\ X(l)=0 \end{cases}$$

- شرايط مرزي
- بنابراين

$$B=0 \qquad Z(z)=C' \sinh(\lambda z) \qquad (137\text{-}6)$$

- همچنين

$$\sin(\lambda l)=0 \qquad \lambda_k=\frac{k\pi}{l}, k=1,2,3,...$$

- از قسمت دوم مسئله نتيجه مي‌شود:

$$\frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}=\lambda^2 \qquad (138\text{-}6)$$

$$Y(y)=Ce^{\lambda y}+De^{-\lambda y} \qquad (139\text{-}6)$$

- با اعمال شرط مرزي نتيجه مي‌شود:

$$D=-C \qquad (140\text{-}6)$$

$$Y(y)=C(e^{\lambda y}-e^{-\lambda y})=C' \sinh(\lambda y)$$

- با اعمال شرط مرزي ناهمگن، ثابت نهايي مسئله تعيين مي‌شود. به‌اين منظور ابتدا جواب كلي نوشته مي‌شود.

$$u_k(x,y)=X_k(x)Y_k(y)=E_k \sinh(\lambda_k y)\sin(\lambda_k x) \qquad (1\text{-}6)$$

- جواب عمومي، تر

$$u(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty} E_k \sinh(\lambda_k y)\sin(\lambda_k x) \qquad (142\text{-}6)$$

- باتوجه به شرط مرزي

$$u_0=\sum_{k=1}^{\infty} E_K \sinh(\lambda_k L)\sin(\lambda_k x) \qquad (143\text{-}6)$$

• با توجه به خاصيت تعامد در سري فورية سينوسي، از اين خاصيت در تعيين ثابت E_k استفاده مي‌شود.

$$E_k\,sinh(\lambda_k L)=\frac{u_0\int_0^l sin(\lambda_k x)dx}{\int_0^l sin^2(\lambda_k x)dx} \qquad (144\text{-}6)$$

• بنابراين

$$E_k=\frac{2u_0\left[1-cos(k\pi)\right]}{k\pi\,sinh(k\pi L/l)}$$

- اگر k عددزوج باشد **(k=2n)**
- اگر k عدد فرد باشد **(k=2n+1)**

$$\begin{cases} E_k=0 \\ E_k=\dfrac{4u_0}{(k\pi)\,sinh(k\pi L/l)} \end{cases}$$

• **بنابراين:**

$$u(x,y)=\frac{2u_0}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1-cos\,k\pi)}{k\,sinh(k\pi L/l)}sinh(\frac{k\pi}{l}y)\,sin(\frac{k\pi}{l}x) \qquad (145\text{-}6)$$

• **چنانچه يک *PDE* بيضي‌گون سه متغيري باشد، مي‌توان از روش حاصل‌ضرب جواب‌ها استفاده کرد. به اين ترتيب دو مسئلة *PDE* دوبعدي را جداگانه حل کرده و جواب معادله اصلي به‌صورت حاصل‌ضرب جواب‌ها تعيين مي‌شود.**

• **مسئلة6-11-** *PDE* زیر را با روش حاصل‌ضرب جواب‌ها حل کنید.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \qquad (146\text{-}6)$$

$$\begin{cases} u(0,y,z)=u(l,y,z)=0 \\ u(x,0,z)=u(x,L,z)=0 \\ u(x,y,0)=0,\ u(x,y,h)=u_0 \end{cases} \qquad (147\text{-}6)$$

حل مسئله

• **به‌جاي مسئلة بالا،ابتدا دو *PDE* زير با شرايط همگن حل مي‌شوند:**

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \quad u(0,z)=u(l,z)=u(x,0)=0 & \textbf{(148-6)} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \quad u(0,z)=u(L,z)=u(x,0)=0 & \textbf{(149-6)} \end{cases}$$

• **بايد در هر معادله عبارت مربوط به متغير z وجود داشته‌باشد، زيرا شرط ناهمگن مسئله در *z=h* تعريف شده است.**

- نتايج حل عمومي دو معادلة حاصل به‌صورت زيراست:

(150-6)

$$u(x,z)=\sum_{k=1}^{\infty}E_k \sinh(\lambda_k z)\sin(\lambda_k x)$$

(151-6)

$$u(y,z)=\sum_{n=1}^{\infty}F_n \sinh(\gamma_n z)\sin(\gamma_n y)$$

- با به‌كار بردن روش حاصل‌ضرب، جواب معادلة (146) به‌صورت زير حاصل مي‌شود:

(152-6)

$$u(x,y,z)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}D_{k,n}\sinh(\sqrt{\lambda_k^2+\gamma_n^2}\,z)\sin(\lambda_k x)\sin(\gamma_n y)$$

- براي تعيين $D_{k,n}$ ثابت بايد از خاصيت تعامد استفاده كرد. بـا اعمـال شـرط مـرزي نـاهمگن در $z=h$ تـابع u نتيجـه مي‌شود.

$$u_0=\sum_k\sum_n D_{k,n}\sinh(\sqrt{\lambda_K^2+\gamma_n^2}\,h)\sin(\lambda_k x)\sin(\gamma_n y) \qquad (153\text{-}6)$$

- بـــا ضــــرب كـــــردن دو طــــرف معادلـــــة (153) در $\sin(\gamma_n y)$ ،
در بازة x ،

$$D_{k,n}\sinh(\sqrt{\lambda_k^2+\gamma_n^2}\,h)=\frac{u_0\int_0^l \sin(\lambda_k x)dx\int_0^L \sin(\gamma_n y)dy}{\int_0^l \sin^2(\lambda_k x)dx\int_0^L \sin^2(\gamma_n y)dy} \qquad (154\text{-}6)$$

- و از اين رابطه $D_{k,n}$ تعيين

$$D_{k,n}=\frac{4u_0[1-\cos(\lambda_k l)][1-\cos(\gamma_n L)]}{(\lambda_k l)(\gamma_n L)\sinh(\sqrt{\lambda_k^2+\gamma_n^2}\,h)}$$

• اگر $\lambda_k=k\pi/L$ و $\gamma_n=n\pi/L$ باشد

(155-6)

$$D_{k,n}=\frac{4u_0[1-cos(k\pi)][1-cos(n\pi)]}{(kn)\,sinh\left[\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{L^2}+\frac{k^2\pi^2}{l^2}}\,h\right]}$$

• اگر n یا k زوج باشند، مقدار $D_{k,n}$ صفر خواهد بود. بنابراين معادلة (155) براي n و k فرد به‌صورت عدد غير صفر به‌دست مي‌آيد.

• **مسئلة6-12-** معادلة زير را كه يك PDE بيضي‌گون در مختصات استوانه‌اي است،در دو حالت مختلف، با توجه به شرايط مرزي ارائه شده حل كنيد.

(156-6)

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u}{\partial r})+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

- الف - شرايط مرزي در r_0 و r=0 همگن است.

$$\frac{\partial u}{\partial r}(0,z)=0 \qquad u(0,z)=\text{متنا}$$

$$u(r_0,z)=0$$
$$u(r,0)=0$$
$$u(r,L)=u_0$$

(157-6)

حل مسئله

- به‌علت وجودشرایط مرزي همگن در مرزهاي r ، بایدجواب‌هاي تابع u در جهت r متعامد باشند، بنابراین مسئله به‌صورت زیر حل مي‌شود:

$$u(r,z)=R(r)Z(z)$$

$$\frac{1}{rR}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial R}{\partial r})=-\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}$$

(158-6)

- باید جواب $R(r)$ نوساني باشد، بنابراین با برابر قراردادن معادلة (158) با $-\lambda^2$ ، جواب تابع $R(r)$ به‌صورت $\frac{1}{rR}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial R}{\partial r})=-\lambda^2$ ظاهر مي‌شود.

(159-6)

$$-\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}=-\lambda^2$$

(160-6)

$$R(r)=AJ_0(\lambda r)+BY_0(\lambda r)$$

- نتیجة حل معادلة (159) باتوجه به جدول (3-4) خواهدبود:

- با توجه به متناهي بودن تابع در ($r=0$) باید مقدار B صفر باشد. با اعمال شرط مرزي در ($r=r_0$) مقدار ویژة به‌دست مي‌آید.

$$R(r_0)=0 \Rightarrow J_0(\lambda r_0)=0$$

- بنابراین λ_k از حل معادلة بالا به روش ترسیمي مطابق شکل(6-2) به‌دست مي‌آید.
- نتیجة حل معادلة (160) نیز به‌صورت زیر است:

$$Z(z)=Ce^{\lambda z}+De^{-\lambda z}$$

- با اعمال شرط مرزي همگن در $z=0$ نتیجه مي‌شود:

$$Z(0)=0 \Rightarrow D=-C$$

$$Z(z)=C' sinh(\lambda z)$$

- به این‌ترتیب تابع u به‌دست مي‌آید.

(127-6)

$$u(r,z)=\sum_{k=1}^{\infty}E_k\, sinh(\lambda_k z)J_0(\lambda_k r)$$

• باتوجه به شرط مرزي ناهمگن

$$u_0=\sum_{k=1}^{\infty}E_k\, sinh(\lambda_k L)J_0(\lambda_k r)$$

• باكمك خاصيت تعامد ثابت E_k به‌دست مي‌آيد.

(161-6)

$$E_k=\frac{u_0\int_0^{r_0} rJ_0(\lambda_k r)dr}{sinh(\lambda_k L)\int_0^{r_0} rJ_0^2(\lambda_k r)dr}$$

• **نتيجه‌گيري: در حل معادلـه‌هـاي بيضـي‌گـون بـا روش جداسـازي متغيرهـا، همـواره بايـد تابع مورد نظر نسبت به متغيري كـه داراي شرايط مرزي همگن است، خاصيت تعامـد داشته و تابعي نوساني باشد.**

معادله‌هاي ناهمگن

- در معادله‌هاي همگن در ميان شرايط مرزي و اوليه فقط يك شرط ناهمگن وجود داشت. به‌طوري‌كه در معادله‌هاي بيضي‌گون فقط يك شرط مرزي ناهمگن و در معادله‌هاي سهمي‌گون فقط يك شرط اولية ناهمگن وجودداشت. به‌اين ترتيب مسائل مطرح‌شده مستقيماً با كمك روش جداسازي متغيرها قابل حل بودند.
- ناهمگني در يك مسئله ممكن است دراثر ناهمگن بودن معادلة ديفرانسيل يا ناهمگن بودن شرايط مرزي مسئله باشد. به اين ترتيب بايد از روش جمع آثار استفاده كرد. با اين روش مسئلة ناهمگن به چند زيرمسئلة همگن تفكيك مي‌شود و امكان حل معادله‌ها به‌روش جداسازي متغيرها فراهم مي‌گردد.

روش جمع آثار (Superposition)

- برخي از مسايل ناهمگن را مي‌توان باكمك اين روش به مسئلة همگن تبديل و هريك را با روش جداسازي متغيرها حل نمود. ساده‌ترين مثال براي روش جمع آثار، اعمال يك تغيير متغير ساده است كه با اين عمل معادلة ناهمگن به همگن تبديل مي‌شود.
- **مثال6-14-** معادلة ديفرانسيل زير را همراه با شرايط مرزي آن حل مي كنيم.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\alpha(T-T_\infty)=0 \qquad (184\text{-}6)$$

$$\begin{cases} T(0,y)=T_\infty, T(l,y)=T_\infty \\ T(x,0)=T_0, T(x,L)=T_\infty \end{cases} \qquad (185\text{-}6)$$

حل مسئله

- در مسئلة بالا، با يك تغيير متغير ($\theta = T - T_\infty$) معادله و شرايط مرزي همگن خواهند شد. بنابراين مسئلة ناهمگن فوق به مسئلة همگن زير تبديل مي‌شود:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}+\alpha\theta=0 \qquad (186\text{-}6)$$

$$\begin{cases}\theta(0,y)=0, \theta(l,y)=0 & (187\text{-}6)\\ \theta(x,0)=T_0-T_\infty, \theta(x,L)=0 & (188\text{-}6)\end{cases}$$

- اين مسئله را مي‌توان از روش جداسازي متغيرها حل نمود.

- براي آشنايي با روش جمع آثار از روش حل يك معادلة ODE ناهمگن استفاده مي‌شود. همواره دريك معادلة ناهمگن به‌شكل زير:

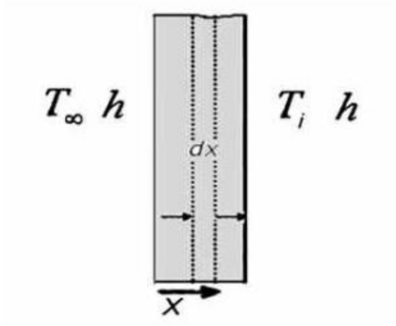
$$y''+f_1(x)y'+f_2(x)y=f_3(x) \qquad (189\text{-}6)$$

جواب معادله، به‌صورت مجموع دو جواب عمومي (همگن) و جواب خصوصي (ناهمگن) درنظر گرفته مي‌شود.

$$y=y_H+y_P$$

- در واقع معادلة (189) به دو معادلة جداگانه، يكي به‌صورت معادلة همگن و ديگري به‌صورت معادلة ناهمگن تفكيك مي‌شود و هريك به‌طور جداگانه حل مي‌شوند و جواب نهايي عبارت از مجموع هريك از جواب‌هاي حاصل

• **مسئلة6-15-** يك صفحة تخت، مطابق شكل (6-4)، به ضخامت L وضريب هدايت حرارتي k از دو محيط با دماهاي T_∞ و T_i جدا مي‌شود. در اين صفحه انرژي يكنواخت با نرخ (u''') در واحد حجم توليد مي‌شود. تغييرات دماي اين صفحه را در شرايط پايا به‌دست آوريد.



شكل(6-4) صفحه تخت با انتقال حرارت

حل مسئله

• معادلة ديفرانسيل حاصل از فرمول‌بندي مسئله:

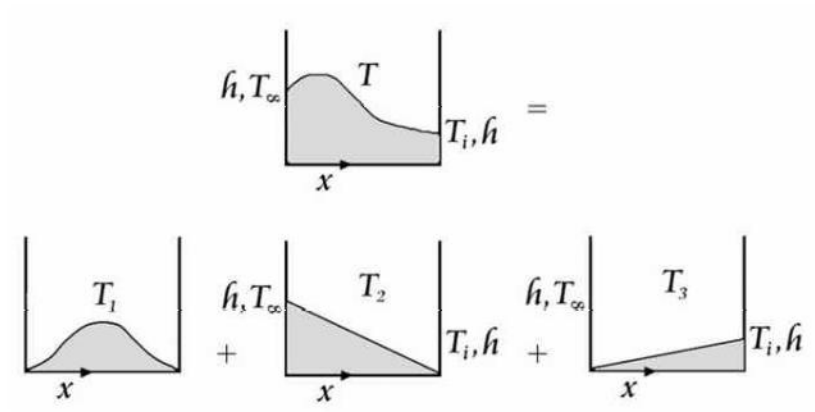
$$\frac{d^2T}{dx^2}+\frac{u'''}{k}=0 \qquad (6\text{-}190)$$

• شرايط مرزي

$$\begin{cases} k\,\dfrac{\partial T_{(0)}}{\partial x}=h\left[T_{(0)}-T_\infty\right] & (6\text{-}191)\\[2ex] -k\,\dfrac{\partial T_{(L)}}{\partial x}=h\left[T_{(L)}-T_i\right] & (6\text{-}192)\end{cases}$$

• در اين مسئله، معادله و شرايط مرزي ناهمگن هستند، پس سه معادلة ناهمگن در مسئله وجود دارد. بنابراين مي‌توان مسئله را به سه مسئلة ساده‌تر تفكيك كرد، به‌شرط اينكه از مجموع معادله‌هاي آن سه زيرمسئله، معادله مسئلة اصلي حاصل شود.

• بنابراین با توجه به شکل (5-6):



شکل (5-6) تفکیک یک مسئلهٔ ناهمگن به سه زیرمسئلهٔ همگن

• دماي T بەصورت مجموع سه دماي T_3, T_2, T_1 با شرايط زير در نظرگرفته ميشود:

$$T(x) = T_1(x) + T_2(x) + T_3(x)$$

الف –$T_1(x)$ در معادلـهٔ ديفرانـسيل نـاهمگن بـا شـرايط مـرزي همگن صـدق ميكند.

$$\frac{d^2T_1}{dx^2} + \frac{u'''}{k} = 0 \qquad k\frac{\partial T_1(0)}{\partial x} = hT_1(0) \qquad -k\frac{\partial T(L)}{\partial x} = hT(L)$$

ب – $T_2(x)$ در معادلهٔ ديفرانسيل همگن، با يك شرط مرزي ناهمگ... صدق

$$\frac{d^2T_2}{dx^2} = 0 \qquad k\frac{\partial T_2(0)}{\partial x} = h\left[T_2(0) - T_\infty\right] \qquad -k\frac{\partial T_2(L)}{\partial x} = hT_2(L)$$

ج - $T_1(x)$ درمعادلهٔ ديفرانسيل همگن ،با يك شرط مرزي ناهمگ... x−L

$$\frac{d^2T_3}{dx^2} = 0 \qquad k\frac{\partial T_3(0)}{\partial x} = hT_3(0) \qquad -k\frac{\partial T_3(L)}{\partial x} = h\left[T_3(L) - T_i\right]$$

بەاين ترتيب مسئله به سه مسئلهٔ سادهتر تفكيك شده است كه در هريك فقط يك معادلهٔ ناهمگن وجود دارد.

- **نتیجه‌گیري:** در روش جمع آثار آنچه در حل مسئله مهم است، فرمول‌بندي است. در واقع باید فرمول‌بندي مسئله به روشي نوشته شود که از مجموعة تعدادي فرمول‌هاي ساده‌تر فرمول‌بندي کلي مسئله حاصل شود. بنابراین یك مسئله به چند زیرمسئله تفکیك مي‌شود، به‌طوري‌که جواب نهایي مجموع جواب‌هاي هریك از مراحل ساده شده است. در این نوع مسائل، به تعداد ناهمگني‌هاي موجود در مسئلة اصلي، باید فرمول‌بندي جدید ایجاد کرد.
- مسائل ناهمگن ممکن است داراي حالت‌هاي مختلفي باشند. براي اعمال روش جمع آثار حالت‌هاي مختلف ناهمگني را مي‌توان به‌صورت زیر دسته‌بندي کرد:

- معادلة دیفرانسیل ناهمگن با شرایط همگن

- معادلة دیفرانسیل همگن با شرایط ناهمگن

- معادلة دیفرانسیل ناهمگن با شرایط ناهمگن

معادلة ناهمگن با شرایط همگن

- در این قسمت دو مثال مطرح مي‌شود که یك مثال براي PDE بیضي‌گون و دیگري براي PDE سهمي‌گون است.
- **مسئلة16-6-** PDE بیضي‌گون زیر را با شرایط ارائه شده حل کنید.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+a=0 \qquad (193\text{-}6)$$

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}(0,y)=0\\ u(L,y)=0\end{cases} \qquad (194\text{-}6)$$

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial y}(x,0)=0\\ u(x,l)=0\end{cases} \qquad (195\text{-}6)$$

حل مسئله

• معادلة (193) به‌علت داشتن ثابت مستقل a ناهمگن است و قابل جداسازي نيست. بنابراين بايد ابتدا با تعريف تابع u(x,y) به‌صورت مجموع دو تابع همگن و ناهمگن، آن را به‌صورت معادلة زير نشان داد:

$$u(x,y)=\psi(x,y)+\varphi(x)$$

(196-6)

يا

$$u(x,y)=\psi(x,y)+\varphi(y)$$

(197-6)

• مي‌توان يكي از دو حالت بالا را برگزيد. به‌اين ترتيب (x,y) مجموع دو تابع ψ و φ است. كه تابع دومتغيري است، بايد در يك معادلة ديفرانسيل همگن صدق كند، ولي تابع φ كه فقط تابع يك متغير است، بايد در قسمت ناهمگن مسئله صدق كند. در اين جا با انتخاب حالت اول و جايگزين كردن مع درمعادلة (196)، معادله‌هاي زير حاصل م

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+a=0$$

• شرايط مرزي

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\psi}{\partial x}(0,y)+\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(0)=0 & (199\text{-}6)\\ \psi(L,y)+\varphi(L)=0 & (200\text{-}6)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\psi}{\partial y}(x,0)=0 & (201\text{-}6)\\ \psi(x,l)+\varphi(x)=0 & (202\text{-}6)\end{cases}$$

• معادلة (198) را مي‌توان به‌صورت دو معادلة مستقل، يكي برحسب و ديگري برحسب نوشت، φ(x) به‌صورت زير:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0 & (203\text{-}6)\\ \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+a=0 & (204\text{-}6)\end{cases}$$

- به همين ترتيب شرايط مرزي نيز قابل تفكيك است. از معادله‌هاي (199) و (200) معادله‌هاي زير حاصل مي‌شود:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\psi}{\partial x}(0,y)=0 & (205\text{-}6) \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(0)=0 & (206\text{-}6) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \psi(L,y)=0 & (207\text{-}6) \\ \varphi(L)=0 & (208\text{-}6) \end{cases}$$

- معادلهٔ (201) تغييري نمي‌كند و به‌صورت يك شرط مرزي در y=0 به‌كار مي‌رود. معادلهٔ (202) نيز به‌صورت زير نوشته مي‌شود كه يك شرط مرزي ناهمگن است.

$$\psi(x,l)=-\varphi(x) \qquad (209\text{-}6)$$

- با اين ترتيب معادلهٔ (193) و شرايط مرزي آن به‌صورت دو زيرمسئله تفكيك مي‌شوند كه اين دو مسئله مجدداً همراه با شرايط مرزي خود جداگانه حل مي‌شوند.

- **زيرمسئلهٔ اول:**

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0 \qquad (203\text{-}6)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\psi}{\partial x}(0,y)=0 & (205\text{-}6) \\ \psi(L,y)=0 & (207\text{-}6) \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial y}(x,0)=0 & (201\text{-}6) \\ \psi(x,l)=-\varphi(x) & (209\text{-}6) \end{cases}$$

- **جواب زيرمسئلهٔ اول:**
- مطابق روش جداسازي متغيرها جواب معادلهٔ (203) با اعمال شرايط مرزي همگن مسئله حاصل مي‌شود.

$$\psi(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}E_n\cos(\lambda_n x)\cosh(\lambda_n y) \qquad (210\text{-}6)$$

- به‌طوري‌كه:

$$\lambda_n=\frac{(2n+1)\pi}{2L}$$

- **زيرمسئلهٔ دوم:**

(204-6) $$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+a=0$$

(206-6) (208-6)
$$\begin{cases}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(0)=0\\ \varphi(L)=0\end{cases}$$

- تابع $\psi(x,y)$ با جداسازي متغيرها حل مي‌گردد و$\varphi(x,y)$ نيز به‌روش عملگر مشتق تعيين مي‌شود. اين دوزير مسئله در شرط مرزي (209) به‌هم مربوط مي‌شوند.
- **جواب زيرمسئلهٔ دوم:**
- جواب معادلهٔ ديفرانسيل (204) با اعمال شرايط مرزي مي‌شود:

(211-6) $$\varphi(x)=\frac{aL^2}{2}\left[1-(\frac{x}{L})^2\right]$$

- در مرحلهٔ آخر دو زيرمسئلهٔ بالا در شرط مرزي (209) در آن اعمال

$$\sum_{n=0}^{\infty}E_n\cos(\lambda_n x)\cosh(\lambda_n l)=-\frac{aL^2}{2}\left[1-(\frac{x}{L})^2\right]$$

- با اعمال خاصيت تعامد در معادلهٔ (212)، E_n به‌دست مي‌آيد.

(213-6) $$E_n=\frac{-\dfrac{aL^2}{2}\displaystyle\int_0^L\cos(\lambda_n x)\left[1-(\frac{x}{L})^2\right]dx}{\cosh(\lambda_n l)\displaystyle\int_0^L\cos^2(\lambda_n x)dx}=\frac{-2a(-1)^n}{\lambda_n L\cosh(\lambda_n l)}$$

- بنابراين تابع $u(x,y)$ به‌صورت مجموع تابع $\psi(x,y)$ و $\varphi(x)$ به‌دست مي‌آيد.

(214-6) $$u(x,y)=-\frac{2a}{L}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\lambda_n\cosh(\lambda_n l)}\cosh(\lambda_n y)\cos(\lambda_n x)+\frac{aL^2}{2}\left[1-(\frac{x}{L})^2\right]$$

معادلة همگن با شرايط ناهمگن

- در مثال بعد يک PDE بيضي‌گون همگن با شرايط مرزي ناهمگن مطرح مي‌شود.
- **مسئلة6-18-** PDE بيضي‌گون زير را با شرايط مرزي ناهمگن حل كنيد.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad (223\text{-}6)$$

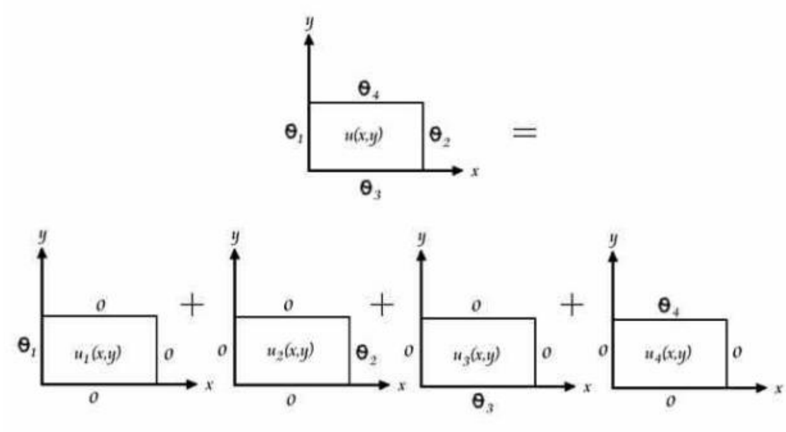
$$\begin{cases} u(0,y)=\theta_1 & (224\text{-}6) \\ u(L,y)=\theta_2 & (225\text{-}6) \\ u(x,0)=\theta_3 & (226\text{-}6) \\ u(x,l)=\theta_4 & (227\text{-}6) \end{cases}$$

حل مسئله

- اين مسئله را مي‌توان مانند توزيع دماي پايا در يك صفحه درنظر گرفت كه از هر چهار طرف در دماهاي ثابت و متفاوتي واقع شده است. در اين حالت كه شرايط مرزي مسئله ناهمگن است نمي‌توان ابتدا از خاصيت تعامد و جداسازي متغيرها استفاده كرد. بنابراين بايد ابتدا از روش جمع آثار استفاده شود، به‌طوري كه تابع $u(x,y)$ به‌صورت مجموع چهار تابع درنظر گرفته مي‌شود كه هريك فقط داراي يك شرط مرزي ناهمگن باشد. در اين‌صورت هرزير مسئله به‌طور جداگانه حل مي‌شود و درنهايت از جمع جواب‌هاي حاصل، تابع اصلي مسئله، مطابق شكل (6-6) به‌دست مي‌آيد.

روش حل

$$u(x,y)=u_1(x,y)+u_2(x,y)+u_3(x,y)+u_4(x,y) \qquad (228\text{-}6)$$



شکل (6-6) تفکیک مسئلهٔ ناهمگن به چهار زیرمسئلهٔ همگن

- **تعیین تابع $u_1(x,y)$:**

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}=0 \qquad (229\text{-}6)$$

$$\begin{cases} u_1(0,y)=\theta_1 \\ u_1(L,y)=0 \\ u_1(x,0)=0 \\ u_1(x,l)=0 \end{cases} \qquad (230\text{-}6)$$

- تابع $u_1(x,y)$ باتوجه به شرایط مرزي درجهت y سینوسي و درجهت x نمايي است. پس از حل معادلهٔ (229) نتیجه ميشود:

$$u_1(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} E_n \sin(\lambda_n y)[\cosh(\lambda_n x)-\coth(\lambda_n L)\sinh(\lambda_n x)] \qquad (231\text{-}6)$$

- بهطوريکه

$$\lambda_n=\frac{n\pi}{l}$$

- براي n = عدد فرد

$$E_n=\frac{\theta_1\int_0^l \sin(\lambda_n y)dy}{\int_0^l \sin^2(\lambda_n y)dy}=\frac{4\theta_1}{n\pi}$$

- تعيين تابع $u_2(x,y)$:

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}=0 \qquad (232\text{-}6)$$

$$\begin{cases} u_2(0,y)=0 \\ u_2(L,y)=\theta_2 \\ u_2(x,0)=0 \\ u_2(x,l)=0 \end{cases} \qquad (233\text{-}6)$$

- تابع $u_2(x,y)$ نيز باتوجه به شرايط مرزي درجهت y سينوسي و درجهت x نمايي است. با حل معادلة (232) نتيجه مي‌شود.

$$u_2(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}F_k\, sin(\beta_k y)\, sinh(\beta_k x) \qquad (234\text{-}6)$$

- به‌طوري‌كه

$$\beta_k=\frac{k\pi}{l}$$

- براي k = عدد فرد

$$F_k=\frac{4\theta_2}{(k\pi)\, sinh(k\pi)}$$

- تعيين تابع $u_3(x,y)$:

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2}=0 \qquad (235\text{-}6)$$

$$\begin{cases} u_3(0,y)=0 \\ u_3(L,y)=0 \\ u_3(x,0)=\theta_3 \\ u_3(x,l)=0 \end{cases} \qquad (236\text{-}6)$$

- تابع $u_3(x,y)$ با توجه به شرايط مرزي، درجهت x سينوسي و درجهت y نمايي است. با حل معادلة (235) نتيجه مي‌شود

$$u_3(x,y)=\sum_{j=1}^{\infty}G_j\, sin(\gamma_j x)[cosh(\gamma_j y)-coth(\gamma_j l)\, sinh(\gamma_j y)] \qquad (237\text{-}6)$$

- به‌طوري‌كه

$$\gamma_j=\frac{j\pi}{L}$$

- براي j = عدد فرد

$$G_j=\frac{\theta_3\int_0^L sin(\gamma_j x)dx}{\int_0^L sin^2(\gamma_j x)dx}=\frac{4\theta_3}{j\pi}$$

- تعيين تابع $u_4(x,y)$:

$$\frac{\partial^2 u_4}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_4}{\partial y^2}=0 \qquad (238\text{-}6)$$

$$\begin{cases} u_4(0,y)=0 \\ u_4(L,y)=0 \\ u_4(x,0)=0 \\ u_4(x,l)=\theta_4 \end{cases} \qquad (239\text{-}6)$$

- تـابع باتوجـه بـه شـرايط مـرزي، درجهـت x سينوسـي و درجهـت y نمايي است. با حل معادلة (238) نتيجه ميشود:

$$u_4(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty} H_i \sin(v_i x)\sinh(v_i y) \qquad (240\text{-}6)$$

- بهطوريكه

$$v_i=\frac{i\pi}{L}$$

- براي i = عدد فرد

$$H_i=\frac{4\theta_4}{(i\pi)\sinh(i\pi)}$$

- بهاين ترتيب تـابع $u(x,y)$ از مجموع تـابعهـاي u_1 , u_2 , u_3 , u_4 بهصورت زير بهدست ميآيد:

$$u(x,y)=$$
$$=\frac{4\theta_1}{\pi}\sum_{n=1,3,5,...}^{\infty}\frac{1}{n}\sin(\frac{n\pi y}{l})\left[\cosh(\frac{n\pi x}{l})\sinh(\frac{n\pi L}{l})-\sinh(\frac{n\pi x}{l})\cosh(\frac{n\pi L}{l})\right]+$$
$$\frac{4\theta_2}{\pi}\sum_{k=1,3,5,...}^{\infty}\frac{1}{k}\sin(\frac{k\pi y}{l})\sinh(\frac{k\pi x}{l})+$$
$$\frac{4\theta_3}{\pi}\sum_{j=1,3,5,...}^{\infty}\frac{1}{j}\sin(\frac{j\pi x}{L})\left[\cosh(\frac{j\pi y}{L})\sinh(\frac{j\pi l}{L})-\sinh(\frac{j\pi y}{L})\cosh(\frac{j\pi l}{L})\right]+$$

$$\frac{4\theta_4}{\pi}\sum_{i=1,3,5,...}^{\infty}\frac{1}{i}\sin(\frac{i\pi x}{L})\sinh(\frac{i\pi y}{L}) \qquad (241\text{-}6)$$

- **مسئلة 6-19-** PDE بيضي‌گون زير را با شرايط مرزي ناهمگن حل كنيد:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0 \qquad (242\text{-}6)$$

$$\begin{cases} T(0,y)=f(y) \\ T(L,y)=T_0 \end{cases} \qquad (243\text{-}6)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T(x,0)}{\partial y}=q \\ \dfrac{\partial T(x,l)}{\partial y}=b\left[T(x,l)-T_\infty\right] \end{cases} \qquad (244\text{-}6)$$

<u>حل مسئله</u>

- چنانچه ملاحظه مي‌شود، در ابتدا نمي‌توان از روش جداسازي متغيرها استفاده كرد، مگر اينكه با كمك روش جمع آثار سه شرط مرزي همگن شوند و فقط يك شرط ناهمگن باقي بماند. ابتدا از يك تغيير متغير $\theta = T - T_\infty$. استفاده مي‌شود تا شرط مرزي نوع سوم همگن شود. نتيجة تغيير متغير به‌صورت زير است:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}=0 \qquad (245\text{-}6)$$

$$\begin{cases} \theta(0,y)=f(y)-T_\infty \\ \theta(L,y)=T_0-T_\infty \end{cases} \qquad (246\text{-}6)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \theta}{\partial y}(x,0)=q \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial y}(x,l)=b\theta(x,l) \end{cases} \qquad (247\text{-}6)$$

- بـه‌دليـل وجـود سـه شـرط نـاهمگن، بايـد تـابع را به‌صورت مجموع سه تابع درنظرگرفت كه در هريك فقط يك شرط ناهمگن وجود داشته باشد.

$$\theta(x,y)=\theta_1(x,y)+\theta_2(x,y)+\theta_3(x,y) \qquad (248\text{-}6)$$

- بـا جـاي‌گـذاري معادلـة (248) در شـرايط مـرزي معادله‌هاي زير حاصل مي‌شود:

$$\theta_1(0,y)+\theta_2(0,y)+\theta_3(0,y)=f(y)-T_\infty \qquad (249\text{-}6)$$

$$\theta_1(L,y)+\theta_2(L,y)+\theta_3(L,y)=T_0-T_\infty \qquad (250\text{-}6)$$

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial y}(x,0)+\frac{\partial\theta_2}{\partial y}(x,0)+\frac{\partial\theta_3}{\partial y}(x,0)=q \qquad (251\text{-}6)$$

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial y}(x,l)+\frac{\partial\theta_2}{\partial y}(x,l)+\frac{\partial\theta_3}{\partial y}(x,l)=b\theta_1(x,l)+b\theta_2(x,l)+b\theta_3(x,l) \qquad (252\text{-}6)$$

- براساس معادله‌هاي بالا مي‌توان سه زيرمسئلة تفكيك شده را به‌صورت زير به‌دست آورد:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2\theta_1}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\theta_1}{\partial y^2}=0\\ \theta_1(0,y)=0\\ \theta_1(L,y)=0\\ \dfrac{\partial\theta_1}{\partial y}(x,0)=q\\ \dfrac{\partial\theta_1}{\partial y}(x,l)=b\theta_1(x,l)\end{cases}\qquad
\begin{cases}\dfrac{\partial^2\theta_2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\theta_2}{\partial y^2}=0\\ \theta_2(0,y)=0\\ \theta_2(L,y)=0\\ \dfrac{\partial\theta_2}{\partial y}(x,0)=0\\ \dfrac{\partial\theta_2}{\partial y}(x,l)=b\theta_2(x,l)\end{cases}\qquad
\begin{cases}\dfrac{\partial^2\theta_3}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\theta_3}{\partial y^2}=0\\ \theta_3(0,y)=f(y)-T_\infty\\ \theta_3(L,y)=0\\ \dfrac{\partial\theta_3}{\partial y}(x,0)=0\\ \dfrac{\partial\theta_3}{\partial y}(x,l)=b\theta_3(x,l)\end{cases}$$

- در اين حالت مي‌توان هر زيرمسئله را بـه روش جداسـازي متغيرها حل نمود.

معادلة ناهمگن با شرايط ناهمگن

- درايـن‌صـورت، تـابع اصـلي ماننـد حالـت اول بـه صـورت مجمـوع دو يـا چنـد تـابع همگـن و نـاهمگن در نظـر گرفتـه مي‌شود. پس از آن، مانند حالت دوم، هر زيرمسئله باتوجه به شرايط مـرزي نـاهمگن خـود بـه چنـدين زيرمـسئلة ديگـر شكسته مي‌شود تا جايي كه امكان حل معادله‌هاي حاصل بـه روش جداسازي متغيرها ميسر شود.
- به طور مثـال در مـسئلة (21)، اگر در داخل جسم مكعب مـستطيل نـرخ حـرارت u'' در واحـد حجـم توليـد شـود، فرمـول‌بنـدي مـسئله و روش جمـع آثـار چگونـه انجـام مي‌شود.

حل مسئله

- مدل ديفرانسيلي مسئله به شكل زير به‌دست مي‌آيد:

(265-6)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{u''}{k} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

- شرايط مرزي و اوليه مانند مسئلة 21 است:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial x}(0, y, t) = 0 \\ K\dfrac{\partial T(L, y, t)}{\partial x} = q'' \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial y}(x, 0, t) = 0 \\ -K\dfrac{\partial T}{\partial y}(x, L, t) = h(T_{(x,L,t)} - T_\infty) \end{cases}$$

$$T(x, y, 0) = T_0$$

- در این مسئله پس از تغییر متغیر $\theta = T - T_\infty$ سه ناهمگني وجود دارد، یکي در معادلة دیفرانسیل (265)، دومي در شرط مرزي و سومي در شرط اولیه. در این صورت تابع θ به‌صورت جمع سه تابع $\psi(x,y,t)$ ، $\phi(x,y)$ و $\delta(x)$ یا $\delta(y)$ در نظر گرفته مي‌شود. در اینجا تابع δ را به‌صورت تابعي از x انتخاب مي‌کنیم: $\theta(x,y,t) = \psi(x,y,t) + \phi(x,y) + \delta(x)$

(266-6)

- پس از جاي‌گذاري در معادلة (265) و ایجاد سه زیر مسئله: $\frac{\partial^2\delta}{\partial x^2} + \frac{u''}{k} = 0$ $\quad \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0$ $\quad \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial t}$

(267-6)

- شرایط مرزي نیز تفکیک مي‌شوند:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}(0,y,t) + \frac{\partial\phi}{\partial x}(0,y) + \frac{\partial\delta}{\partial x}(0) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial\psi}{\partial x}(0,y,t) = 0 \\ \frac{\partial\phi}{\partial x}(0,y) = 0 \\ \frac{\partial\delta}{\partial x}(0) = 0 \end{cases} \qquad (268\text{-}6)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}(L,y,t) + \frac{\partial\phi}{\partial x}(L,y) + \frac{\partial\delta}{\partial x}(L) = \frac{q''}{k} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial\phi}{\partial x}(L,y,t) = 0 \\ \frac{\partial\phi}{\partial x}(L,y) = 0 \\ \frac{\partial\delta}{\partial x}(L) = \frac{q''}{k} \end{cases} \qquad (269\text{-}6)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}(x,0,t) + \frac{\partial\phi}{\partial y}(x,0) = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial\psi}{\partial y}(x,0,t) = 0 \\ \frac{\partial\phi}{\partial y}(x,0) = 0 \end{cases} \qquad (270\text{-}6)$$

$$-k\frac{\partial\psi}{\partial y}(x,L,t)-k\frac{\partial\phi}{\partial y}(x,L)=h[\psi(x,L,t)+\phi(x,L)+\delta(x)]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-k\dfrac{\partial\psi}{\partial y}(x,L,t)=h\psi(x,L,t)\\ -k\dfrac{\partial\phi}{\partial y}(x,L)=h\phi(x,L)+h\delta(x)\end{cases}\qquad(271\text{-}6)$$

- ملاحظه مي‌شود كه يك شرط مرزي نوع سوم غيرهمگن براي تابع $\phi(x,y)$ به‌دست آمده است.
- با اعمال شرط اوليه مسئله براي تابع θ شرط اوليه غير همگن زير برقرار مي‌شود:

$$T_0-T_\infty=\psi(x,y,0)+\phi(x,y)+\delta(x)\qquad(272\text{-}6)$$

$$\psi(x,y,0)=-\phi(x,y)-\delta(x)+T_0-T_\infty$$

- به اين ترتيب ابتدا تابع $\delta(x)$ با عملگر مشتق حل مي‌شود. سپس تابع $\phi(x,y)$ و بعد تابع $\psi(x,y,t)$ با كمك جداسازي متغيرها حل مي‌شوند و ثابت مجموعة متعامد از شرط اوليه آخر تعيين مي‌شود.