مشتق و کاربردهایش

در هر مورد با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $y = f(x)$ را در $x = x_۰$ بیابید:

۱) $f(x) = x^۲,$ $\qquad x_۰ = -\sqrt{۲},$

۲) $f(x) = \sqrt{x},$ $\qquad x_۰ = ۴,$

۳) $f(x) = \cot x,$ $\qquad x_۰ = \frac{\pi}{۲},$

۴) $f(x) = \arcsin x,$ $\qquad x_۰ = \frac{۱}{۲},$

۵) $f(x) = \frac{۱}{x},$ $\qquad x_۰ = ۱,$

۶) $f(x) = \frac{x+۱}{x-۱},$ $\qquad x_۰ = -۱,$

۷) $f(x) = x^۲ \sin(x-۲),$ $\qquad x_۰ = ۲,$

۸) $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x+۱}},$ $\qquad x_۰ = ۲,$

۹) $f(x) = \frac{\cos x}{۲\sin^۲ x},$ $\qquad x_۰ = \frac{\pi}{۴},$

۱۰) $f(x) = \sqrt{\frac{۱+x^۳}{۱-x^۳}},$ $\qquad x_۰ = ۰.$

مطلوب است مشتق $y = f(x)$ نسبت به x، مشروط به آنکه

۱) $y\sin x + x\sin y = ۱$ $\qquad$ ۲) $x^۲ + y^۲ = \tan(x+y)$

۳) $x^y + y^x = xy$ ۴) $\ln(x + ۲y) = ۲x + y$

مطلوب است مشتق $y = f(x)$ نسبت به x در نقطهٔ M، مشروط به آنکه

۵) $x^۲ \sin y^۲ - y^۲ \cos x^۲ = \pi,$ $M = (\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi})$

۶) $(x + y)^{x-y} + (x - y)^{(x+y)} = ۴,$ $M = (۲, ۱)$

در صورتی که a و b اعداد مثبت باشند، مشتق y نسبت به x را محاسبه کنید:

۱) $x = \sin^۲ t,$ $y = \cos^۲ t$

۲) $x = a\cos t,$ $y = b\sin t + t^۲$

۳) $x = a(t - \sin t),$ $y = at(۱ - \cos t)$

۴) $x = \arcsin\left(\frac{t}{\sqrt{۱ + t^۲}}\right),$ $y = \arccos\left(\frac{۱}{\sqrt{۱ + t^۲}}\right)$

در هر یک از موارد زیر، مشتق مرتبهٔ nام تابع $y = f(x)$ را بدست آورید:

۱) $y = \sqrt{x},\ \ n = ۱۰$ ۲) $y = \frac{e^x}{x},\ \ n = ۷$

۳) $y = \frac{x^۲}{۱ - x},\ \ n = ۸$ ۴) $y = x^۲ \sin x,\ \ n = ۳۰$

۵) $y = \sin^۲ x \ln x,\ \ n = ۴$ ۶) $y = \frac{\cos(۳x)}{\sqrt[۳]{۱ - ۳x}},\ \ n = ۳$

در هر یک از موارد زیر، مشتق از مرتبهٔ nام را محاسبه کنید

۷) $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ ۸) $y = \frac{۱}{\sqrt{۱ - ۲x}}$

۹) $y = x\sin x$ ۱۰) $y = \sin(ax)\cos(ax)$

۱۱) $y = (x^۲ + x)e^{-x}$ ۱۲) $y = \frac{۱}{x(x - ۱)}$

در هر یک از موارد زیر، مشتق مرتبهٔ n ام تابع $y = f(x)$ را بدست آورید:

۱۳) $xy^{۲} + x^{۲}y + x - y, \qquad n = ۳$

۱۴) $y = x^y + y^x - x^{۲} + y^{۲}, \qquad n = ۲$

۱۵) $\sin(x+y) + \cos(x-y) - xy, \qquad n = ۲$

۱۶) $x = a(t - \sin t), \quad y = a(۱ - \cos t), \qquad n = ۲$

۱۷) $x = \sin t, \quad y = \cos t, \qquad n = ۳$

۱۸) $x = \arcsin t, \quad y = \arccos(t^{۲}), \qquad n = ۳$

۱۹) ثابت کنید که $f^{(n)}(۰)$ وجود دارد، ولی $f^{(n+۱)}(۰)$ موجود نیست

$$f(x) = \begin{cases} x^{۲n}\sin(۱/x) & \text{اگر } x \neq ۰ \\ ۰ & \text{اگر } x = ۰ \end{cases}$$

۲۰) نشان دهید که تابع زیر از هر مرتبهٔ دلخواهی مشتقپذیر است

$$f(x) = \begin{cases} e^{-۱/x^{۲}} & \text{اگر } x \neq ۰ \\ ۰ & \text{اگر } x = ۰ \end{cases}$$

هر یک از موارد زیر را ثابت کنید:

۲۱) $\left(x^{n-۱}e^{۱/x}\right)^{(n)} = \dfrac{(-۱)^n}{x^{n+۱}}e^{۱/x}, \quad (x \neq ۰)$

۲۲) $(x^n \ln x)^{(n)} = n!\left(\ln x + \sum_{k=۱}^{n}\dfrac{۱}{k}\right), \quad (x > ۰)$

۲۳) $\left(\dfrac{۱}{x^{۲}+۱}\right)^{(n)} = \dfrac{(-۱)^n n!}{(x^{۲}+۱)^{(n+۱)/۲}}\sin\{(n+۱)\operatorname{arccot} x\}$

۲۴) نشان دهید که شرط لازم و کافی برای $f'(x) = f(x)$، آن است که به ازای عدد ثابت A ای $f(x) = Ae^x$.

اکسترمومهای هر یک از توابع زیر را بیابید:

۱) $f(x) = (x-۱)^{۳}$ ۲) $f(x) = (x-۱)^{۴}$

۳) $f(x) = (x+1)^{10} e^{-x}$

۴) $f(x) = \sqrt{x}\ln x$

۵) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x + 1}$

۶) $f(x) = e^x \sin x$

۷) $f(x) = |x| e^{-|x-1|}$

۸) $f(x) = x(x-1)^2(x-2)^3$

۹) $f(x) = \cos x + \dfrac{1}{2}\cos(2x)$

۱۰) $f(x) = x^m (1-x)^n, \quad ; n, m \in \mathbb{N}$

در هر یک از موارد، اکسترمومهای تابع $y = f(x)$ را بر بازهٔ I بیابید:

۱) $f(x) = x^2 - 4x + 6, \qquad I = [-3; 10]$

۲) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}, \qquad I = \left[\dfrac{1}{1000}; 1000\right]$

۳) $f(x) = \sqrt{5 - 4x}, \qquad I = [-1; 1]$

۴) $f(x) = x^2(x-1)^3, \qquad I = [-1; 2]$

هر یک از نامساویهای زیر را با بکارگیری روش محاسبهٔ اکسترموم مطلق تابعی مناسب بر بازه‌ای مناسب، ثابت کنید:

۵) اگر $p > 1$ و $0 \leq x \leq 1$، آنگاه

$$\frac{1}{2^{p-1}} \leq x^p + (1-x)^p \leq 1$$

۶) اگر $m, n > 0$ و $0 \leq x \leq 1$، آنگاه

$$x^m (a-x)^n \leq \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}} a^{m+n}$$

۷) به ازاء هر a و هر b ای $|a\sin x + b\cos x| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$.

۸) به ازاء هر x ای $\dfrac{2}{3} \leq \dfrac{x^2+1}{x^2+x+1} \leq 2$.

۹) نشان دهید که $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ با $ad \neq bc$ نه ماکزیموم دارد و نه مینیموم.

۱۰) ضرایب p و q در $x^3 + px + q$ را طوری تعیین کنید که مینیمومی برابر ۵ در نقطهٔ $x = 3$ داشته باشد.

۱۱) نشان دهید که $f(x) = \begin{cases} 1/x^3 & x > 0 \text{ اگر } \\ 3x^3 & x \leq 0 \text{ اگر } \end{cases}$ در نقطهٔ $x = 0$ مینیموم دارد، در حالی که علامت $f'(x)$ در دو طرف $x = 0$ یکی است.

---

۱) نشان دهید $xe^x = 2$ در بازهٔ $(0; 1)$ تنها یک جواب دارد.

۲) درستی قضیهٔ رول را برای $f(x) = x^3 + 4x^2 - 7x - 10$ و بازهٔ $[-1; 2]$ تحقیق کنید.

۳) درستی قضیهٔ رول را برای $f(x) = \ln(\sin x)$ و بازهٔ $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$ تحقیق کنید.

۴) آیا تابع $f(x) = |x|$ و بازهٔ $[-1; 2]$ دارای شرایط قضیهٔ رول هستند؟ چرا؟

۵) بدون محاسبهٔ مشتق تابع $f(x) = 1 + x^m(x-1)^n$ که در آن $n, m \in \mathbb{N}$، ثابت کنید که مشتق این تابع لااقل در بازهٔ $(0; 1)$ یک ریشه دارد.

۶) فرض کنید تابع $y = f(x)$ دارای مشتق متناهی در هر نقطه از بازهٔ $(a; b)$ است و همچنین $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = \lim\limits_{x \to b-} f(x)$. ثابت کنید که در این صورت $c \in (a; b)$ ای وجود دارد که $f'(c) = 0$.

۷) ثابت کنید که تمام ریشه‌های n **امین چند جمله‌ای لژاندر** حقیقی و محصور در بازهٔ $(-1; 1)$ می‌باشند:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d}{dx^n} \{(x^2 - 1)^n\}$$

*۸) ثابت کنید که تمام ریشه‌های n **امین چند جمله‌ای چبیشف** حقیقی می‌باشند:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x^2}\right)$$

۹) ثابت کنید ریشه‌های مشتق تابع

$$f(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 5x + 6)$$

همگی حقیقی هستند.

۱۰) نشان دهید که اگر تابعی دارای مشتقات مرتبهٔ اول و دوم پیوسته باد، آنگاه بین هر دو نقطهٔ اکشترمومش دارای لااقل یک نقطهٔ عطف است.

---

۱) قضیهٔ لاگرانژ را برای $f(x)=\ln x$ و بازهٔ $[1;e]$ تحقیق کنید.

۲) قضیهٔ لاگرانژ را برای تابع $f(x)=\arcsin x$ و بازهٔ $[0;1]$ تحقیق کنید.

۳) قضیهٔ لاگرانژ را برای تابع

$$f(x)=\begin{cases}(3-x^2)/2 & \text{اگر } 0\le x\le 1\\ 1/x & \text{اگر } 1<x\end{cases}$$

و بازهٔ $[0;2]$ تحقیق کنید.

در تمرینات ۴ تا ۸، هر یک از نامساویها را با استفاده از قضیهٔ لاگرانژ ثابت کنید:

۴) اگر $x>y>0$ و $p>0$، آنگاه

$$py^{p-1}(x-y)\le x^p-y^p\le px^{p-1}(x-y)$$

۵) به ازای هر a و b ای $|\arctan a-\arctan b|\le|a-b|$.

٦) اگر $a>b>0$ آنگاه $\dfrac{b-a}{a}<\ln\left(\dfrac{b}{a}\right)<\dfrac{b-a}{b}$.

۷) اگر $\dfrac{\pi}{2}>\alpha\ge\beta>0$ آنگاه

$$\frac{\alpha-\beta}{\cos^2\beta}\le\tan\alpha-\tan\beta\le\frac{\alpha-\beta}{\cos^2\alpha}$$

۸) توضیح دهید که چرا قضیهٔ لاگرانژ برای تابع $f(x)=\sqrt[3]{x}$ و بازهٔ $[-1;1]$ صحیح نیست.

۹) آیا تابع $f(x)=\begin{cases}x & \text{اگر } 0\le x<1\\ 1/x & \text{اگر } 1\le x\end{cases}$ و بازهٔ $[0;2]$ در شرایط قضیهٔ لاگرانژ صدق می‌کنند؟

---

۱) قضیهٔ کوشی را برای توابع $f(x)=x^3$، $g(x)=\dfrac{1}{x}$ و بازهٔ بستهٔ $[1;3]$ تحقیق کنید.

۲) ثابت کنید که اگر $\text{۰} \le x \le \text{۱}$، آنگاه

$$\arctan x \le \arcsin x$$

۳) توضیح دهید که چرا قضیهٔ کوشی برای توابع $f(x) = x^{\text{۲}}$ و $g(x) = x^{\text{۳}}$ و بازهٔ بستهٔ $[-\text{۱}; \text{۱}]$ قابل اجرا نیست؟

نمودار هر یک از توابع زیر را با استفاده از روش شرح داده شده در بالا، ترسیم کنید:

$$\text{۱)}\ f(x) = \text{۳}x - x^{\text{۳}}, \qquad \text{۲)}\ f(x) = \frac{x - \text{۲}}{\sqrt{x^{\text{۲}} + \text{۱}}},$$

$$\text{۳)}\ f(x) = \left(\frac{\text{۱} + x}{\text{۱} - x}\right)^{\text{۴}}, \qquad \text{۴)}\ f(x) = \frac{\cos x}{\cos(\text{۲}x)},$$

$$\text{۵)}\ f(x) = \text{۲}x - \tan x, \qquad \text{۶)}\ f(x) = e^{\text{۲}}x - x^{\text{۲}},$$

$$\text{۷)}\ f(x) = \frac{e^x}{\text{۱} + x}, \qquad \text{۸)}\ f(x) = \sin x + \frac{\sin(\text{۳}x)}{\text{۳}},$$

$$\text{۹)}\ f(x) = x^x, \qquad \text{۱۰)}\ f(x) = \frac{x}{(\text{۱} + x)(\text{۱} - x^{\text{۲}})},$$

$$\text{۱۱)}\ f(x) = \arcsin\left(\frac{\text{۲}x}{\text{۱} + x^{\text{۲}}}\right). \qquad \text{۱۲)}\ f(x) = \sqrt[\text{۳}]{x^{\text{۲}}} - \sqrt[\text{۳}]{x^{\text{۲}} + \text{۱}},$$

$$\text{۱۳)}\ f(x) = (\text{۱} + x)^{\text{۱}/x}\cos(\text{۲}x), \qquad \text{۱۴)}\ f(x) = \sqrt{(x - \text{۱})(x - \text{۲})(x - \text{۳})},$$

ثابت کنید که:

۱) اگر $x > \text{۰}$، آنگاه $e^x > \text{۱}$.

۲) اگر $x > \text{۰}$، آنگاه $x > \ln(x + \text{۱})$.

۳) اگر $x > ۱$، آنگاه $\ln x > \frac{۲(x-۱)}{x+۱}$.

۴) اگر $x \neq ۰$، آنگاه $\cosh x > ۱ + \frac{x^{۲}}{۲}$.

۵) به ازاء هر x ای $|\sin x| \leq |x|$.

۶) اگر $x > ۰$، آنگاه $۱ + ۲\ln x \leq x^{۲}$.

۷) به ازاء هر x ای $\ln(۱+x^{۲}) \leq ۲x \arctan x$.

۸) به ازاء هر x ای $\sqrt{۱+x^{۲}} \leq ۱ + x\ln\left(x+\sqrt{۱+x^{۲}}\right)$.

۹) اگر $\frac{\pi}{۲} > x > ۰$، آنگاه $x > \sin x > x - \frac{x^{۳}}{٦}$.

۱۰) اگر $x > ۰$، آنگاه $\left(۱+\frac{۱}{x}\right)^{x+۱} > e > \left(۱+\frac{۱}{x}\right)^{x}$.

۱۱*) اگر $\alpha > ۱$ و $x > ۱$، آنگاه $x^{\alpha} - ۱ > \alpha(x-۱)$.

۱۲) اگر $n \in \mathbb{Z}$ و $x > a > ۰$، آنگاه $\sqrt[n]{x-a} \geq \sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}$.

---

۱) ثابت کنید که اگر $m, n \in \mathbb{N}$، $n > ۱$ و $x_۱$، $x_۲$، … و x_n اعداد مثبت دلخواهی باشند، در این صورت

$$n^{m-۱}\left(x_۱^m + x_۲^m + \cdots + x_n^m\right) \geq (x_۱ + x_۲ + \cdots + x_n)^m$$
$$\left(x_۱^m + x_۲^m + \cdots + x_n^m\right) n^{m-۱} \geq (x_۱ + x_۲ + \cdots + x_n)^m$$

۲) ثابت کنید که اگر $n \in \mathbb{N}$ و $x_۱, x_۲, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$، آنگاه

$$e^{x_۱} + e^{x_۲} + \cdots + e^{x_n} \geq n\, e^{(x_۱+x_۲+\cdots+x_n)/n}$$
$$e^{x_۱} + e^{x_۲} + \cdots + e^{x_n} \geq n \exp\left(\tfrac{x_۱+x_۲+\cdots+x_n}{n}\right)$$

---

۱) عدد ۸ را به صورت مجموع دو عدد چنان بنویسید که مجموع مکعبات آنها کوچکترین مقدار ممکن باشد.

۲) از جمیع مستطیل‌های با مساحت مفروض S، آن یکی را که دارای کمترین محیط است تعیین کنید.

۳) منشور مثلث القائده‌ای را در نظر بگیرید که قائدهٔ آن متساوی الضلاع است، دارای حجم V است. طول ضلع قاعدهٔ آن چقدر باید باشد تا مساحت کل آن کمترین مقدار ممکن باشد؟

۴) در کره‌ای به شعاع R، استوانه‌ای با بیشترین حجم محاط کنید.

۵) یک قیف مخروطی با مولدی به طول ۲۰ سانتی‌متر باید ساخته شود. ارتفاع این مخروط چقدر باید باشد تا بزرگترین حجم ممکن حاصل شود؟

٦) مصرف سوخت یک کشتی بخار با مکعب سرعت آن متناسب است. می‌دانیم که در سرعت ۱۰ کیلومتر بر ساعت، قیمت سوخت ٦۰ تومان در ساعت است و مخارج دیگر (مستقل از سرعت) بالغ بر ۴۸۰ تومان در ساعت می‌شود. در چه سرعتی از کشتی مجموع مخارج در هر کیلومتر از سفر بهترین خواهد بود؟ مجموع کل مخارج در هر ساعت چقدر خواهد بود؟

۷) از نقطهٔ $P = (۱, ۴)$ خط راستی چنان رسم کنید که مجموع قطعات مثبتی را که روی محورهای مختصات جدا می‌کند کمترین باشد.

۸) یک قیف مخروطی با شعاع قاعدهٔ R و ارتفاع H پر از آب شده است. یک گلوله سنگین در این قیف می‌افتد. شعاع این گلوله چقدر باید باشد تا بزرگترین حجم ممکن آب، به سبب بخش غوطه‌ور شدهٔ این گلوله، از قیف نامبرده خارج شود؟

---

۱) بسط تیلور مرتبهٔ سوم $f(x) = \dfrac{x+۱}{x-۱}$ را در $x = ۲$ بدست آورید.

۲) بسط تیلور تا مرتبهٔ سوم تابع $f(x) = xe^x$ را در نقطهٔ $x = -۱$ بدست آورید.

۳) بسط مک لورن تابع $f(x) = \sqrt[۳]{\sin x^۳}$ تا مرتبهٔ دهم را بدست آورید.

۴) بسط مک لورن تابع $f(x)=\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ را تا مرتبهٔ ششم بدست آورید.

به کمک بسط مک لورن، هر یک از تساویهای زیر را اثبات کنید:

$$5)\quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + O\Big(x^n\Big)$$

$$6)\quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + O\Big(x^{2n+1}\Big)$$

$$7)\quad (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + O\Big(x^n\Big)$$

$$8)\quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + O\Big(x^n\Big)$$

$$9)\quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + O\Big(x^n\Big)$$

---

۱) بسط مک لورن مرتبهٔ دهم $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1}$ را بیابید.

۲) بسط مک لورن مرتبهٔ سیزدهم تابع $f(x)=\frac{x}{e^x-1}$ را بیابید.

۳) بسط مک لورن مرتبهٔ سوم تابع $f(x)=\sin(\sin x)$ را بیابید.

هر یک از عبارتهای تقریبی زیر را اثبات کنید:

$$4)\quad \frac{1}{R^2} - \frac{1}{(R+x)^2} \approx \frac{2x}{R^2} \qquad\qquad 5)\quad \sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}} - \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} \approx \frac{4}{3}x$$

$$6)\quad \frac{\ln 2}{\ln(1+x/100)} \approx \frac{70}{x}$$

در هر مورد بسط تیلور تا مرتبهٔ k ام تابع $y=f(x)$ در نقطهٔ $x=x_0$ را یافته و آنها را در یک همسایگی از $x=x_0$ ترسیم کنید:

$$1)\quad f(x) = x\sin x, \qquad\qquad x_0 = 0, \quad k = 4.$$

۲) $f(x) = x^{۳} - ۳x + ۱,\qquad x_{\circ} = ۱,\quad k = ۳.$

۳) $f(x) = x^{۲} - \sin x,\qquad x_{\circ} = ۰,\quad k = ۴.$

۴) $f(x) = \dfrac{x - ۱}{x + ۱},\qquad x_{\circ} = ۲,\quad k = ۲.$