دنباله و سری عددی

دنباله

با استفاده از تعریف حد دنباله، نشان دهید

$$۱)\quad \lim_{n\to\infty} \frac{۲n^۲ - n + ۱}{n^۲ + ۲n + ۳} = ۲$$

$$۲)\quad \lim_{n\to\infty} \frac{۱ + ۲ + \cdots + n}{n^۲} = \frac{۱}{۲}$$

$$۳)\quad \lim_{n\to\infty} \frac{۱}{n} \cos\left(\frac{n\pi}{۲}\right) = ۰$$

$$۴)\quad \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{۲n + ۳} - \sqrt{۲n - ۱}\right) = ۰$$

حد هر یک از دنباله‌های زیر را محاسبه کنید:

$$۵)\quad \frac{۴n^۲ - ۴n + ۳}{۲n^۳ + ۳n - ۱} \qquad ۶)\quad \frac{۵n^۳ + ۲n^۲ - ۳n + ۷}{۴n^۳ - n^۲ + n + ۱}$$

$$۷)\quad \frac{۱ + ۲^۲ + \cdots + n^۲}{۵n^۳ + n + ۱} \qquad ۸)\quad \frac{۳n^۲ + n + ۲}{۴n^۲ + ۲n + ۷}$$

$$۹)\quad \sqrt[n]{n^۶} \qquad ۱۰)\quad \sqrt[n]{۶n + ۳}$$

$$۱۱)\quad \sqrt[۳]{n^۲ - n^۳} + n \qquad ۱۲)\quad \frac{\sqrt{n^۲ + ۱} + \sqrt{n}}{\sqrt[۴]{n^۳ + n} - \sqrt{n}}$$

$$۱۳)\quad \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n + ۱} + \sqrt{n}} \qquad ۱۴)\quad \sqrt[۳]{۱ - n^۳} + n$$

۱۵) $\dfrac{\cos(n^{۳})}{۲n} - \dfrac{۳n}{۶n+۱}$ ۱۶) $\dfrac{\sqrt[۳]{n^{۲}}\sin(n!)}{n+۱}$

۱۷) $\sqrt{۲}\sqrt[۴]{۲}\sqrt[۸]{۲}\cdots\sqrt[۲^n]{۲}$ ۱۸) $\dfrac{n}{۲^n}$

۱۹) $\dfrac{۱}{n}\log_a n \quad (a > ۱)$ ۲۰) $\dfrac{۱}{\sqrt[n]{n!}}$

۲۱) $\dfrac{۱}{۲} \times \dfrac{۳}{۴} \times \cdots \times \dfrac{۲n-۱}{۲n}$

۲۲) $\dfrac{۱}{n^{۲}} + \dfrac{۲}{n^{۲}} + \cdots + \dfrac{n-۱}{n^{۲}}$

۲۳) $\dfrac{۱-۲+۳-\cdots-۲n}{\sqrt{n^{۲}+۱}+\sqrt{۴n^{۲}-۱}}$

۲۴) $\dfrac{۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\cdots+\frac{۱}{۲^n}}{۱+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۹}+\cdots+\frac{۱}{۳^n}}$

۲۵) $\sqrt[۳]{(n+۱)^{۲}} - \sqrt[۳]{(n-۱)^{۲}}$

۲۶) $\dfrac{۱}{۱\times۲} + \dfrac{۱}{۲\times۳} + \cdots + \dfrac{۱}{n(n+۱)}$

۲۷) ثابت کنید حد دنباله در صورت وجود یکتا است.

به روش بالا ثابت کنید که هر یک از دنباله‌های زیر همگرا هستند. در صورت امکان حد آنها را محاسبه کنید:

۱) $x_n = \dfrac{x_{n-۱}}{a+x_{n-۱}}, \qquad x_۰ = a > ۱$

۲) $x_n = \dfrac{n^{۲}}{n^{۲}-۱}, \qquad n > ۱$

۳) $x_n = \dfrac{۲^n}{(n+۲)!}$ ۴) $x_n = \dfrac{n!}{n^n}$

۵) $x_n = ۲ + \dfrac{۱}{۲!} + \dfrac{۱}{۳!} + \cdots + \dfrac{۱}{n!}$

۶) $x_n = \dfrac{۱۰}{۱} \times \dfrac{۱۱}{۳} \times \cdots \times \dfrac{n+۹}{۲n-۱}$

۷) $x_n = \dfrac{۱}{۵+۱} + \dfrac{۱}{۵^{۲}+۱} + \cdots + \dfrac{۱}{۵^n+۱}$

۸) $x_n = \frac{1}{3+1} + \frac{1}{3^2+2} + \cdots + \frac{1}{3^n+n}$

۹) $x_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$

۱۰) $x_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$

۱۱) در صورتی که $e^x := \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$، نشان دهید $\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n} = e^x$.

۱۲) فرض کنید دنبالهٔ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ چنان است که به ازای آن $\lim_{n\to\infty} nx_n = \ell$. در این صورت نشان دهید $\lim_{n\to\infty}(1+x_n)^n = e^{\ell}$. راهنمایی: از تمرین ۱۱ استفاده کنید.

۱۳ فرض کنید $a > 1$ و $b > 1$، در این صورت نشان دهید که $\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{ab} - 1\right) = \ln a + \ln b$.

در هر مورد نشان دهید که دنبالهٔ داده شده کوشی است و در نتیجه همگرا می‌باشد:

۱) $x_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \cdots + \frac{\sin n}{2^n}$

۲) $x_n = \frac{\cos 1!}{1\times 2} + \frac{\cos 2!}{2\times 3} + \cdots + \frac{\cos n!}{n(n+1)}$

۳) $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$

۴) $x_n = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}$

۵) فرض کنید $0 < w < 1$، $x_1 = a$، $x_2 = b$ و $x_{n+2} = wx_{n+1} + (1-w)x_n$ به ازاء هر $n \geq 1$. نشان دهید که دنبالهٔ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ کوشی، و در نتیجه همگرا می‌باشد.

٦) در نمایش اعداد بجای ۱۰ از هر عدد طبیعی $k > 1$ می‌توان استفاده کرد. حکم مشابهی در مورد نمایش اعداد بر پایهٔ k وجود دارد. ضمن بیان صورت این حکم، آن را ثابت کنید (به قسمت (۱) از ؟؟ مراجعه کنید).

۷) فرض کنید $x_۱ = a > ۰$ و به ازاء هر $n \geq ۱$ ای $x_{n+۱} = ۳ + ۴/x_n$. تحقیق کنید که به ازاء کدام مقادیر از a دنبالهٔ $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ همگرا است.

در هر مورد نشان دهید که دنبالهٔ داده شده منقبض است و بنابراین همگرا می‌باشد:

۱) $x_n = \frac{۴^n}{n!}$ ۲) $x_n = \frac{(n!)^۲}{(۲n)!}$

۳) $x_n = ۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} - \cdots + \frac{(-۱)^n}{۲^n}$

۴) $x_n = \frac{۱}{۳+۱} + \frac{۱}{۳^۲+۱} + \cdots + \frac{۱}{۳^n+۱}$

---

۱) نشان دهید که اگر $a > ۱$، آنگاه دنبالهٔ $\frac{n^۲}{a^۲}$ به صفر همگرا است.

هر یک از تساویهای زیر را نشان دهید:

۲) $\lim_{n\to\infty} \frac{۱^p + ۲^p + \cdots + n^p}{n^{p+۱}} = \frac{۱}{p+۱}$

۳) $\lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{۱^p + ۲^p + \cdots + n^p}{n^p} - \frac{n}{p+۱} \right\} = \frac{۱}{۲}$

۴) $\lim_{n\to\infty} \frac{۱^p + ۳^p + \cdots + (۲n-۱)^p}{n^{p+۱}} = \frac{۲^p}{p+۱}$

در همگرایی هر یک از دنباله‌های زیر بحث کنید:

۱) $x_n = \sqrt[n]{۵n}$ ۲) $x_n = \frac{(n!)^۲}{(۲n)!}$ ۳) $x_n = \frac{۳^n}{n^۳}$

در هر یک از موارد ۴ تا ۷، یا با ذکر دلیل ادعای مطرح شده را اثبات و یا با ارائهٔ یک مثال، غلط بودن آن را نشان دهید:

۴) اگر $\sum x_n$ همگرا باشد، آنگاه $\sum ۱/x_n$ واگرا است.

۵) اگر $\sum x_n$ همگرا باشد، آنگاه $\sum x_n^۲$ نیز همگرا است.

۶) اگر $\sum x_n^۲$ همگرا باشد، آنگاه $\sum |x_n|$ نیز همگرا است.

۷) اگر $\sum x_n$ همگرا باشد، آنگاه $\sum x_n/n$ نیز همگرا است.

۸) نشان دهید $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{(n+۱)(n+۲)\cdots(۲n)}}{n} = \dfrac{۴}{e}$.

در صورتی که $a > ۰$ و $b > ۰$، مقدار هر یک از حدود زیر را محاسبه کنید:

۱) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^۲+۳n-۱}{۲n^۲-n+۱}$

۲) $\lim\limits_{n\to\infty} n\tan\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$

۳) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{۲}-۱\right)$

۴) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{a-۱+\sqrt[n]{b}}{a}\right)^n$

۵) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{۲}\right)^n$,

۶) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+۲}{n+۳}\right)^n$

۷) $\lim\limits_{n\to\infty} \cos^n\left(\dfrac{۲}{\sqrt{n}}\right)$

۸) $\lim\limits_{n\to\infty} n^۲\left(\sqrt[n]{۲}-\sqrt[n+۱]{۲}\right)$

۹) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^۲-۱}{n^۲+۱}\right)^{\frac{n-۱}{n+۱}}$

۱۰) $\lim\limits_{n\to\infty} \tan^n\left(\dfrac{\pi}{۴}+\dfrac{۱}{n}\right)$

۱۱) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{۲^n-۲^{-n}}{۲^n+۲^{-n}}$

۱۲) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+۲}{۲n-۱}\right)^{n^۲}$

۱۳) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(۱+\dfrac{(-۱)^n}{n}\right)^{\csc\left(\pi\sqrt{۱+n^۲}\right)}$

۱۴) $\lim\limits_{n\to\infty} \left\{\sqrt[m]{(n+a_۱)\cdots(n+a_m)}-n\right\}$

۱۵) نشان دهید که $\lim\limits_{x\to ۰} \sin(۱/x)$ وجود ندارد.

سری

حد مجموع سریهای زیر را محاسبه کنید:

$$۱)\ \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۲n-۱}{n^۲(n+۱)^۲}$$

$$۲)\ \sum_{n=۰}^{\infty} e^{-n\alpha}\cos(n\alpha), \qquad (\alpha\in\mathbb{R})$$

$$۳)\ ۱-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}-\cdots+\frac{(-۱)^n}{۲^n}+\cdots$$

$$۴)\ \frac{۱}{۲}+\frac{۳}{۴}+\frac{۵}{۸}+\cdots+\frac{۲n-۱}{۲^n}+\cdots$$

$$۵)\ \frac{۱}{۱\times۴}+\frac{۱}{۴\times۷}+\cdots+\frac{۱}{(۳n-۲)(۲n+۱)}+\cdots$$

$$٦)\ \frac{۱}{۱\times۲\times۳}+\frac{۱}{۲\times۳\times۴}+\cdots+\frac{۱}{n(n+۱)(n+۲)}$$

$$۷)\ \sum_{n=۱}^{\infty}\left(\sqrt{n+۲}-۲\sqrt{n+۱}+\sqrt{n}\right)$$

$$۸)\ q\sin\alpha+q^۲\sin(۲\alpha)+\cdots+q^n\sin(n\alpha)+\cdots$$

کدام یک از سریهای زیر همگرایند؟ کدامیک واگرا هستند؟

$$۹)\ \sum_{j=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^j}{j+۱} \qquad ۱۰)\ \sum_{k=۰}^{\infty}\frac{k^۲}{۲^k}$$

$$۱۱)\ \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{\sqrt{n(n+۱)}} \qquad ۱۲)\ \sum_{n=۰}^{\infty}\frac{۲^n}{n!}$$

$$۱۳)\ \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(n!)^۲}{(۲n)!}$$

$$۱۴)\ \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{\sqrt{(۲n-۱)(۲n+۱)}}$$

$$۱۵)\ ۱+\frac{۱}{۳^۲}+\frac{۱}{۵^۲}+\cdots+\frac{۱}{(۲n-۱)^۲}+\cdots$$

$$۱٦)\ ۱+\frac{۲}{۳}+\frac{۳}{۵}+\cdots+\frac{n}{۲n-۱}+\cdots$$

۱۷) هر گاه $P(x)$ یک چند جمله‌ای درجهٔ k ام بوده و a یک عدد حقیقی دلخواه باشد، مقدار سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P(n)}{n!} a^n$ را محاسبه کنید.

در همگرایی و واگرایی هر یک از سریهای زیر بحث کنید:

۱) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1/n}}{(n+1/n)^n}$,

۲) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^5}{2^n+3^n}$,

۳) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n^3+2n+1}$,

۴) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n-1}{3^n-2^n}$,

۵) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+(-1)^n}{2^{n+1}}$,

۶) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100}$,

۷) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$,

۸) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{1-(1/3)^n}$,

۹) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n^2]{n}}$,

۱۰) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}$,

۱۱) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^n \sin(1/n)}{n}$,

۶) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}\right)$,

۱۳) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)\{\ln(\ln n)\}}$,

۱۴) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)\{\ln(\ln 2^n)\}^2}$.

در همگرایی و واگرایی هر یک از سریهای زیر بحث کنید:

۱) $1000 + \frac{1000^2}{2!} + \frac{1000^3}{3!} + \cdots + \frac{1000^n}{n!} + \cdots$

۲) $\frac{(۱!)^۲}{۲!}+\frac{(۲!)^۲}{۴!}+\frac{(۳!)^۲}{۶!}+\cdots+\frac{(n!)^۲}{(۲n)!}+\cdots$

۳) $\frac{۲\times ۱!}{۱}+\frac{۲^۲\times ۲!}{۲^۳}+\frac{۲^۳\times ۳!}{۳^۳}+\cdots+\frac{۲^n n!}{n^۳}+\cdots$

۴) $\frac{۳\times ۱!}{۱}+\frac{۳^۲\times ۲!}{۲^۲}+\frac{۳^۳\times ۳!}{۳^۳}+\cdots+\frac{۳^n n!}{n^n}+\cdots$

۵) $\frac{(۱!)^۲}{۲}+\frac{(۲!)^۲}{۲^۴}+\frac{(۳!)^۲}{۲^۹}+\cdots+\frac{(n!)^۲}{۲^{n^۲}}+\cdots$

۶) $\frac{۱۰۰۰}{۱}+\frac{۱۰۰۰\times ۱۰۰۱}{۱\times ۳}+\frac{۱۰۰۰\times ۱۰۰۱\times ۱۰۰۲}{۱\times ۳\times ۵}+\cdots$

۷) $\frac{۴}{۲}+\frac{۴\times ۷}{۲\times ۶}+\frac{۴\times ۷\times ۱۰}{۲\times ۶\times ۱۰}+\frac{۴\times ۷\times ۱۰\times ۱۳}{۲\times ۶\times ۱۰\times ۱۴}+\cdots$

۸) $\sum_{n=۲}^{\infty}\frac{۱}{\sqrt[n]{\ln(n)}}$, ۹) $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{n^۳(\sqrt{۲}+(-۱)^n)^n}{۳^n}$,

۱۰) $\sum_{n=۱}^{\infty}\left(\frac{۱+\cos n}{۲+\cos n}\right)^{۲n-\ln(n)}$, ۱۱) $\sum_{n=۰}^{\infty}e^{-\sqrt[۲]{n}}$,

۱۲) $\sum_{n=۱}^{\infty}n^۲e^{-\sqrt{n}}$, ۱۳) $\sum_{n=۲}^{\infty}\frac{n^{\ln(n)}}{(\ln(n))^n}$,

۱۴) $\sum_{n=۱}^{\infty}n^{\frac{۱}{n^۲+۱}}-۱$, ۱۵) $\sum_{n=۱}^{\infty}\ln\left(\frac{\cosh\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}\right)$.

فرض کنید a و p اعداد حقیقی دلخواهند، در این صورت در همگرایی هر یک از سریهای داده شده بحث کنید:

۱) $\sum_{n=۰}^{\infty}a^n$, ۲) $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^a}$, ۳) $\sum_{n=۲}^{\infty} \frac{۱}{n(\ln(n))^p}$,

۴) $\sum_{n=۲}^{\infty} \frac{۱}{n\ln(n)\ln(\ln(n))}$,

۵) $\sum_{n=۰}^{\infty} \left\{\arctan\left(\frac{۱}{n}\right)\right\}^۲$,

۶) $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n\sqrt{n^۴+n^۲-۱}}$.

به کمک آزمون آبل، همگرایی هر یک از سریهای زیر را نشان دهید:

۱) $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{n-۱}{n+۱}n^{-۱/۱۰۰}$

۲) $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{n+۱}{n!}$

۳) $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{p(p+۱)\cdots(p+n-۱)}{n!} \times \frac{۱}{n^p}$

۴) $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{n^۵}{۳^n+۲^n}$

تمرینات دنباله ها

۱- آیا دنباله $\{a_n\}$ با جمله عمومی $a_n = \log_2(\log_2 n); \quad n = 2, 3, \ldots$ کراندار است؟ چرا؟

۲- فرض کنید $A = \left\{ n \sin\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n}\cos n\pi \mid n \in N \right\}$ ، در مورد کرانداری A بحث کنید.

۳- در مورد یکنوایی و کرانداری $\{a_n\}$ بحث کنید.

$$a_n = n + \sqrt{a + \frac{1}{n^2}} \qquad n = 1, 2, \ldots \qquad , \qquad (a > 0)$$

۴- ثابت کنید دنباله $\{a_n\}$ با جمله عمومی زیر همگراست.

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^3}}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$$

۵- ثابت کنید دنباله $\{a_n\}$ با جمله عمومی $a_n = \frac{a^n}{n!}$ که در آن $a \in R^+$ ، همگرا به صفر است.

۶- ثابت کنید دنباله $\{a_n\}$ با جمله عمومی زیر همگراست.

$$a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

۷- نشان دهید دنباله $\{a_n\}$ با جمله عمومی $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2 + k}$ همگرا به صفر و دنباله $\{b_n\}$ با $b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}$ همگرا به یک است.

۸- ثابت کنید دنباله $\{a_n\}$ با جمله عمومی $a_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$ ، $(n = 1, \; 2, \; \ldots)$ همگراست.

۹- فرض کنید $a, b \in R$ $\quad b > 0, \; a > 1,$ و

$$a_1 = \frac{b}{a+b}, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{a + a_n} \qquad n = 1, \; 2, \; \ldots$$

ثابت کنید $\{a_n\}$ همگراست و حد آن را بیابید.

۱۰- فرض کنید α عددی حقیقی باشد و $a_n = \frac{[\alpha] + [2\alpha] + \ldots + [n\alpha]}{n^2}$. ثابت کنید $\{a_n\}$ همگراست و حد آن را بیابید.

۱۱- فرض کنید a عددی مثبت باشد. x_1 را بزرگ‌تر از $\sqrt{a}$ در نظرگرفته و داریم :

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right) \quad , \quad n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

ثابت کنید که $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\sqrt{a}$.

۱۲- دنباله $\{a_n\}$ در رابطه بازگشتی زیر صدق می‌کند:

$$a_{n+1}=(n+1)a_n+1,\ \ a_1=1,\ \ n\in N$$

در این صورت $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n!}$ را به دست آورید.

۱۳- اگر $a_n=\prod\limits_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}$ ، حاصل $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ را به دست آورید.

۱۴- با فرض $a_n=\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+a_k^2\right)$ و $a_1,\ a_2,\ \ldots,a_n=1$ ، حاصل $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}$ را بیابید.

۱۵- با استفاده از تعریف حد دنباله ها ثابت کنید که

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{3n^2-1}=\frac{1}{3}.$$

۱۶- ثابت کنید دنباله $(1-\frac{1}{n+2})\cos\frac{\pi}{n+2}$ کراندار و یکنوا است.

۱۷- ثابت کنید دنباله $\{a_n\}$ که در آن $a_1=\sqrt{3}$ و $a_{n+1}=\sqrt{3a_n+4}$ کراندار و صعودی است و سپس حد آن را به دست آورید.

۱۸- آیا دنباله $\left\{\sqrt{n}\right\}$ همگراست ؟ چرا؟

۱۹- نشان دهید که دنباله $\left\{\frac{1+3^n}{5+3^{n-1}}\right\}$ کراندار و صعودی است.

۲۰- دنباله $\left\{\frac{n^2+1}{n+5}+\frac{3-n^2}{n+1}\right\}$ مفروض است، اگر این دنباله همگرا باشد،حد آن را حساب کنید.

۲۱- با استفاده از تعریف حد دنباله ها ثابت کنید که

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3+1}=0.$$

۲۲- ثابت کنید دنباله $\{a_n\}$ که در آن $a_1=2\sqrt{3}$ و $a_{n+1}=\sqrt{12+a_n}$ کراندار و صعودی است و سپس حد آن را به دست آورید.

۲۳- با استفاده از قضایای حد دنباله ها، حد دنباله $\left\{\dfrac{5^{n+1}+2}{5^{n}+3}\right\}$ را حساب کنید.

۲۴- یکنوائی و کرانداری دنباله $\left\{\dfrac{1}{n+1}\sin\dfrac{\pi}{n}\right\}$ را بررسی کنید.

۲۵- حدود زیر را محاسبه نمائید:

الف) $(a>1)\quad \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{a^{n}}$ ،

ب) $a>0\quad \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}$ ،

ج) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$.

۲۶- ثابت کنید که دنباله $\{x_n\}$ با جمله عمومی

$$x_n=\begin{cases}1/n & , n=2k-1\\ n/(n+2) & , n=2k\end{cases}$$

دارای حد نمی باشد.