

مسایلی در اعداد مختلط

ردیف	سوالات
۱	اگر z و \bar{z} دو عدد مختلط باشند، عبارت زیر را محاسبه کنید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران ۶۳/۹/۲۴) $A = (z - \bar{z})(z^2 - \bar{z}^2)(z^3 - \bar{z}^3) \dots (z^n - \bar{z}^n)$
۲	معادله $2z^3 + (\bar{z})^3 = 3$ را حل کنید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران ۶۳/۹/۲۴)
۳	ثابت کنید: $ z_1 + z_2 \leq z_1 + z_2 $
۴	فرض کنید $w = \frac{az + b}{cz + d}$ که در آن a و b و c و d اعداد حقیقی می باشند، نشان دهید $w - \bar{w} = \frac{(ad - bc)(z - \bar{z})}{ cz + d ^2}$. سپس چنانچه $ad - bc > 0$ باشد ثابت کنید قسمت های موهومی z و w هم علامت هستند. (دانشکده فنی دانشگاه تهران - خرداد ماه ۶۴)
۵	معادله زیر را حل کنید: $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$
۶	کلیه z های مختلطی را بیابید که داشته باشیم $e^z = -1$ (دانشکده فنی دانشگاه تهران - دی ماه ۶۶)
۷	نشان دهید $\cos(x + iy) = \cos x \cosh y - i \sinh y \sin x$ (دانشکده فنی دانشگاه تهران ۶۷/۱۰/۲۵)
۸	اگر $z = 1 + i$ ریشه معادله $z^7 + az^5 + b = 0$ باشد، a و b را به دست آورید. (دانشگاه علم و صنعت - بهمن ماه ۶۹)
۹	ریشه های چهارم عدد مختلط $z = -\sqrt{3} - i$ را حساب کنید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران - ۷۱/۶/۷)
۱۰	اعداد مختلط z و w مفروض اند و داریم $ z = 1$. نشان دهید: $ 1 - \bar{z}w = z - w $
۱۱	مکان هندسی نقاطی از صفحه مختلط را که در رابطه زیر صدق کند به دست آورید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران - ۷۱/۴/۳) $\left \frac{z+1}{z-1} \right \leq 2.$
۱۲	معادله $z^4 = \frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}$ را حل کنید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران - ۷۲/۴/۱)
۱۳	اگر $m > 1$ عدد درست باشد، معادله $(z-i)^m + (z+i)^m = 0$ را در میدان اعداد مختلط C حل کنید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران - دی ماه ۷۲)
۱۴	ناحیه زیر را در صفحه مختلط رسم کنید: $3 < z-i + z+i < 5$ (دانشکده فنی دانشگاه تهران ۷۲/۴/۱)
۱۵	ریشه های سوم عدد مختلط z را پیدا کنید. $z = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}-i\sqrt{2}} \right)^{15}$ (دانشکده فنی دانشگاه تهران - تابستان ۷۳)

۱۶	هر گاه z یک عدد مختلط باشد به طوری که $ z =1$ یعنی $z\bar{z}=1$ ، در این صورت عبارت $ 1+z ^2 + 1-z ^2$ را خلاصه کنید.
۱۷	با استفاده از خواص اعداد مختلط عبارت زیر را به صورت مجموع دو مربع کامل بنویسید. $A = (a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)$ (دانشکده فنی دانشگاه تهران - میان ترم - نیمسال اول ۷۳-۷۴)
۱۸	اگر w, z اعداد مختلط باشند به قسمی که $\left \frac{z + \bar{w}}{\bar{z} - w} \right = 1$ ، نشان دهید که قسمت حقیقی zw برابر صفر است. $\text{Re}(zw) = 0$ (دانشکده فنی دانشگاه تهران - خرداد ماه ۷۳)
۱۹	اگر z_3, z_2, z_1 اعداد مختلط با کالبد واحد باشند و داشته باشیم $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ نشان دهید. $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} = 0$ و سپس با استفاده از این رابطه نشان دهید: $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$ (دانشکده فنی دانشگاه تهران - ۷۴/۲/۲۴)
۲۰	معادله روبرو را حل کنید. $z^5 = -\sqrt{3} - i$ (دانشکده فنی دانشگاه تهران ۷۴/۵/۲۸)
۲۱	تمام ریشه های معادله $z^4 + 4z^2 + 16 = 0$ را بیابید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران - ۷۲/۸/۲۰)
۲۲	اگر β, α ریشه های معادله $z^2 - 2z + 4 = 0$ باشند، نشان دهید: (دانشکده فنی دانشگاه تهران - ۷۵/۲/۱۱) $\alpha^n + \beta^n = 2^{n+1} \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$
۲۳	با استفاده از خواص اعداد مختلط ثابت کنید در هر متوازی الاضلاع مجموع مربعات طول اقطار برابر است با مجموع مربعات طول اضلاع. (دانشکده فنی دانشگاه تهران - ۷۵/۸/۲۲)
۲۴	اگر z_2, z_1 دو عدد مختلط باشند و $ z_1 - z_2 = z_1 + z_2 $ باشد نشان دهید: $ \text{Arg} z_1 - \text{Arg} z_2 = \frac{\pi}{2}$
۲۵	هر گاه a, c دو عدد حقیقی بوده و b عددی مختلط باشد. نشان دهید که معادله $az\bar{z} + b\bar{z} + \bar{b}z + c = 0$ که در آن $a \neq 0$ و $z = x + iy$ می باشد نمایشگر دایره ای است در صفحه xy . (دانشکده فنی دانشگاه تهران ۷۲/۲/۱۰)
۲۶	نشان دهید: $(1 + \cos \theta + i \sin \theta)^n + (1 + \cos \theta - i \sin \theta)^n = 2^{n+1} \cos^n \frac{\theta}{2} \cos \frac{n\theta}{2} \quad (n \in \mathbb{N})$
۲۷	با استفاده از بسط دو جمله ای $(1+i)^n$ نشان دهید: الف- $C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \dots = 2^{n/2} \cos \frac{n\pi}{4}$ ب- $C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \dots = 2^{n/2} \sin \frac{n\pi}{4}$ (دانشکده فنی دانشگاه تهران - آبان ۷۷)

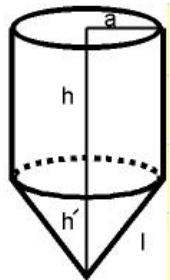
۲۸	معادله $z^4 + 1 = 0$ را حل کنید و با استفاده از جواب های آن چند جمله ای $x^4 + 1 = 0$ را به حاصل ضرب دو چند جمله ای دوم با ضرایب حقیقی تجزیه کنید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران – آبان ماه ۷۷)
۲۹	معادله زیر را حل کنید: (دانشکده فنی دانشگاه تهران – میان ترم نیمسال دوم ۷۷) $z^6 - z^5 + z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$
۳۰	نشان دهید: $\frac{1 + \sin \theta + i \cos \theta}{1 + \sin \theta - i \cos \theta} = \sin \theta + i \cos \theta$ و سپس با استفاده از آن عبارت زیر را حساب کنید. $\left(1 + \sin \frac{\pi}{5} + i \cos \frac{\pi}{5}\right)^{10} + \left(1 + \sin \frac{\pi}{5} - i \cos \frac{\pi}{5}\right)^{10}$ (دانشکده فنی دانشگاه تهران ۷۸/۸/۲۹)
۳۱	فرض کنیم z_1 و z_2 و z_3 سه عدد مختلط باشند به طوری که: $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ ، $ z_1 = z_2 = z_3 = 1$ ، ثابت کنید که این سه عدد راس های یک مثلث متساوی الاضلاع می باشند که در دایره به شعاع واحد به مرکز مبدا مختصات محاط شده است.
۳۲	ریشه های معادله $z^5 + z^3 + z = 0$ را به دست آورید.
۳۳	اگر داشته باشیم $1 + z + z^2 + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$ نشان دهید: $\sin \theta + \sin 2\theta + \dots + \sin n\theta = \frac{\sin \frac{(n+1)\theta}{2} \sin \frac{n\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} .$

مسایلی در حد و پیوستگی

ردیف	سوالات
۱	حد روبرو را حساب کنید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران - خرداد ماه - ۱۳۶۴) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$
۲	حد روبرو را حساب کنید. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[x]{\cos(\sqrt{x})}$
۳	حد روبرو را به دست آورید. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(x) \ln(1-x)$
۴	حد روبرو را حساب کنید. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cot(x))^{\sin(x)}$
۵	حد روبرو را حساب کنید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران ۶۹/۱۰/۲۵) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{\sin x} \right]$
۶	حد روبرو را حساب کنید. (دانشکده علم و صنعت - بهمن ماه ۶۹) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{x^x}$
۷	حد دنباله با جمله عمومی زیر را به دست آورید. که در آن $[x]$ جزء صحیح x است. $U_n = \frac{[x] + [2x] + \dots + [nx]}{n^2} \quad (n \rightarrow \infty)$ (دانشکده فنی دانشگاه تهران - شهریور ماه ۷۰)
۸	فرض کنید $f(x) = a_1 \sin(x) + a_2 \sin(2x) + \dots + a_n \sin(nx)$ که در آن a_1 و a_2 و \dots و a_n اعداد حقیقی ثابتی هستند و $n \in \mathbb{N}$. می دانیم که برای هر x حقیقی $ f(x) \leq \sin(x) $. (دانشکده فنی دانشگاه تهران - آبان ماه ۷۲) نشان دهید که: $ a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + na_n \leq 1$
۹	حد عبارت روبرو را حساب کنید. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + a \tan^2(x))^{\frac{1}{x \sin(x)}}$
۱۰	حد روبرو را به دست آورید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران ۷۳/۲/۶) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x) \cdot \cos(2x) \cdot \dots \cdot \cos(nx)}{x^2}$
۱۱	حد روبرو را به دست آورید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران تیر ماه ۷۳) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\cot(x) - \frac{1}{x} \right)$
۱۲	حد روبرو را حساب کنید. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt[x]{a} + \sqrt[x]{b}}{2} \right)^x$
۱۳	c را طوری پیدا کنید که: (دانشکده فنی دانشگاه تهران - تابستان ۷۳) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+c}{x-c} \right)^x = 4$
۱۴	حد روبرو را حساب کنید. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2^{\sin(x)} - 1) \ln(1 + \sin(2x))}{x \operatorname{Arc tan}(x)}$

۱۵	تابع f در فاصله $[0, \frac{\pi}{2}]$ پیوسته است و به ازای هر x در این فاصله داریم $0 \leq f(x) \leq 1$. ثابت کنید حداقل یک $x_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ وجود دارد به طوری که $f(x_0) = \sin(x_0)$ (راهنمایی: فرض کنید $g(x) = f(x) - \sin(x)$) (دانشکده فنی دانشگاه تهران ۷۴/۸/۲۰)
۱۶	مطلوب است: (از مسائلی امتحانی دانشکده فنی دانشگاه تهران) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2} \right)$
۱۷	حد روبرو را به دست آورید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران - ۷۵/۲/۱۱) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin(x) + \cos(x))^{\tan(x)}$
۱۸	حد زیر را حساب کنید. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} [Ln(1 + \sin^2(x)) + \cot(x) Ln^2(1 + x)]$
۱۹	حد روبرو را حساب کنید. $\lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{1}{x} \right]$
۲۰	حد روبرو را حساب کنید. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^{\cot(x)}$
۲۱	نشان دهید که معادله $x = a \sin(x) + b$ که در آن $0 < a < 1$, $b > 0$ می باشد، فقط یک ریشه مثبت نابیشتر از $a + b$ دارد. (دانشکده فنی دانشگاه تهران - آبان ماه - ۸۰)
۲۲	حد روبرو را به دست آورید. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\cos\left(\sqrt{\frac{2a}{x}}\right) \right)^x, (a > 0)$
۲۳	فرض کنید تابع f در فاصله $[a, b]$ پیوسته و α, β دو عدد حقیقی مثبت باشند، نشان دهید لااقل یک عدد حقیقی c در فاصله $[a, b]$ وجود دارد به قسمی که: $\alpha f(a) + \beta f(b) = (\alpha + \beta) f(c)$
۲۴	ثابت کنید: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\text{Arc tan } \frac{1}{2} + \text{Arc tan } \frac{1}{8} + \dots + \text{Arc tan } \frac{1}{2n^2} \right) = \frac{\pi}{4}$
۲۵	حد روبرو را حساب کنید: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh(x) - \sin x}{\cosh(x) - \cos x}$
۲۶	الف - فرض کنید f تابعی پیوسته در فاصله $[0, 1]$ باشد به طوری که داشته باشیم $f(0) = f(1)$ ثابت کنید برای بعضی مقادیر $a \in [0, \frac{1}{2}]$ داریم: $f(a) = f(a + \frac{1}{2})$ راهنمایی: قرار دهید: $g(x) = f(x + \frac{1}{2}) - f(x)$

مسایلی در کاربرد مشتق ۱

ردیف	سوالات
۱	بر کره ای به شعاع ثابت R مخروط قائم دایره با حجم می نیم محیط کنید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران ۷۱/۶/۷ - ۷۰/۱/۳۱)
۲	n عدد حقیقی a_1, a_2, \dots, a_n داده شده اند. ثابت کنید که مجموع $\sum_{k=1}^n (x - a_k)^2$ وقتی می نیم است که x میانگین حسابی اعداد a_1, a_2, \dots, a_n باشد.
۳	حجم بزرگترین مخروط قائمی را که بتوان در یک کره به شعاع R محاط کرد را بیابید. (دانشگاه شهید چمران اهواز ۶۶/۹/۱۲)
۴	اگر y, x اضلاع مثلث قائم الزاویه با وتر ۱ باشند بزرگترین مقدار $w = 2x + y$ را به دست آورید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران - آذر ماه ۷۰)
۵	گوشه پائینی سمت راست یک صفحه کاغذ طوری تا شده که به لبه سمت چپ رسیده است. اگر پهنای کاغذ ۶ سانتی متر باشد طول کوتاهترین خط تاخوردگی را به دست آورید. این خط حداقل چه زاویه ای با لبه راست کاغذ می سازد. فرض کنید صفحه آن قدر طویل باشد که چین خوردگی به بالای صفحه نرسد.
۶	دو کشتی A و B در یک زمان بندری را ترک کرده و به طرف شرق حرکت می کنند. سرعت کشتی A بیست کیلومتر در ساعت و سرعت کشتی B بیست و پنج کیلومتر در ساعت است. پس از پیمودن ۱۰ کیلومتر، کشتی A به طرف شمال تغییر مسیر می دهد و کشتی B به مسیر حرکت خود ادامه می دهد. ۴ ساعت پس از ترک بندر، کشتی های A, B با چه سرعتی از هم دور می شوند.
۷	می خواهیم یک منبع آب به شکل مقابل بسازیم اگر شعاع استوانه a و حجم منبع V هر دو ثابت باشند و هزینه هر متر مربع ساخت برای مخروط دو برابر استوانه باشد، آنگاه ابعاد لازم را طوری به دست آورید که هزینه ساخت حداقل گردد. (از ضخامت منبع و ضایعات صرفنظر می شود) (دانشکده فنی دانشگاه تهران - آبان ماه ۷۲)
	
۸	یک استوانه از دوران مستطیلی حول محور x ها به دست آمده است. قاعده مستطیل بر محور x ها و تمامی آن در ناحیه اول بین منحنی $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ و محور x ها قرار دارد. ماکزیم حجم استوانه را حساب کنید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران ۷۱/۵/۲۰)

۹	می خواهیم پنجره ای متشکل از یک مستطیل و یک نیمدایره در بالای آن بسازیم که قطر نیمدایره مساوی قاعده مستطیل باشد، بخش مستطیلی شکل، از شیشه (بی رنگ) شفاف بوده و قسمت نیمه مستدیر از شیشه رنگی است. به طوری که در هر سانتی متر مربع فقط به اندازه نصف شیشه شفاف نور عبور می دهد. محیط کل پنجره برابر طول ثابت p است. ابعاد پنجره را بر حسب p طوری تعیین کنید که حداکثر نور را از خود عبور دهد.
۱۰	گلوله ای با سرعت اولیه $50 \frac{m}{s}$ از نقطه A روی سطح زمین به طور قائم پرتاب می شود. اگر چهار ثانیه پس از پرتاب از نقطه B به فاصله 600 متر از A در روی سطح زمین ردیابی شود میزان تغییرات θ را در نقطه B و همچنین میزان تغییرات R را پس از چهار ثانیه بیابید. ($g = 10 \frac{m}{s^2}$) (دانشکده فنی دانشگاه تهران ۷۲/۲/۱۹)
۱۱	فرض کنیم که توابع g, f تعریف شده روی تمام اعداد حقیقی باشند، به طوری که در سه شرط زیر صدق کنند (به ازاء هر (y, x)) (دانشکده فنی دانشگاه تهران ۷۳/۲/۳) $a) g(x) = xf(x) + 1 \quad b) g(x + y) = g(x)g(y) \quad c) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ $g'(x)$ را بر حسب $g(x)$ حساب کنید.
۱۲	با فرض $0 < x < \frac{\pi}{2}$ نامساوی های زیر را ثابت کنید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران ۷۳/۲/۶) $a) \sin(x) < x \quad b) x - \frac{x^3}{6} < \sin(x)$
۱۳	نشان دهید که اگر m عدد صحیح و مثبت باشد و $x > 0$ ، آنگاه داریم: $(1 + \frac{x}{m})^m < e^x$ (دانشکده فنی دانشگاه تهران - ۷۳/۲/۳)
۱۴	نشان دهید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران - تابستان ۷۳) $(x > 0) \quad \frac{x}{x^2 + 1} < \text{Arc tan}(x) < x$
۱۵	نقاط $M \begin{vmatrix} x & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix}, B \begin{vmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{vmatrix}, A \begin{vmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{vmatrix}$ مفروضند. x را طوری پیدا کنید که زاویه \hat{AMB} ماکزیمم شود ($a, b > 0$) (دانشکده فنی دانشگاه تهران - میان ترم - نیمسال اول ۷۳-۷۴)
۱۶	فرض کنیم $f(x) = (x - a)\varphi(x)$ که در آن φ تابعی پیوسته در نقطه a می باشد. نشان دهید که تابع f در نقطه a مشتق پذیر است، و سپس $f'(a)$ را حساب کنید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران ۷۴/۸/۲۰)
۱۷	یک کیف با حجم ثابت باید به شکل یک مخروط مستدیر قائم باشد. اگر بخواهیم در ساختن کیف کمترین مقدار جنس مصرف شود، نسبت ارتفاع به شعاع قاعده آن چه عددی باید باشد.
۱۸	فرض کنید $f(x) = 5x^2 + Ax^{-5}$ ($x > 0$) که در آن A مقداری ثابت و مثبت می باشد. کوچکترین مقدار A را پیدا کنید، به طوری که به ازاء هر $x > 0$ داشته باشیم. $f(x) \geq 24$. (دانشکده فنی دانشگاه تهران - ۷۴/۵/۲۸)

۱۹	ارتفاع مخروط مستدیر قائمی ۱۲ و شعاع قاعده اش ۶ سانتی متر می باشد. مخروط دیگری را در این مخروط چنان محاط می کنیم که راس آن در مرکز قاعده مخروط اول قرار گیرد و قاعده اش موازی با قاعده آن باشد. مطلوب است ابعاد چنین مخروط محاطی که بیشترین حجم را دارا باشد. (دانشکده فنی دانشگاه تهران - ۷/۲/۲۴)
۲۰	مثلث قائم الزاویه متغیر ABC در صفحه xy در راس B قائمه است. راس A در مبدا مختصات ثابت است و راس C بر سهمی $y = 1 + \frac{7x^2}{36}$ قرار دارد. نقطه B در لحظه $t = 0$ از نقطه $(0,1)$ شروع به حرکت کرده و با سرعت ثابت ۲ سانتی متر بر ثانیه در امتداد محور y ها بالا می رود. سرعت افزایش مساحت مثلث در لحظه $t = \frac{7}{2}$ چقدر است؟ (دانشکده فنی دانشگاه تهران - ۷۵/۲/۱۱)
۲۱	مثلث متساوی الساقین ABC ($AB = AC$) در یک دایره به شعاع R محاط شده است. اگر $0 \leq A \leq \frac{\pi}{2}$ باشد. ماکزیمم و می نیمم اندازه محیط مثلث را پیدا کنید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران ۷۵/۸/۲۲)
۲۲	نشان دهید: (دانشکده فنی دانشگاه تهران - ۷۵/۲/۱۱) $(x > 0) \quad \frac{1}{x + \frac{1}{2}} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$
۲۳	مشتق پذیری تابع زیر را در مبدا بررسی کنید. $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$
۲۴	تعداد ریشه های معادله روبرو را به دست آورید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران - آبان ماه ۷۷) $x^2 - x \sin(x) - \cos(x) = 0$
۲۵	مخروط مستدیر قائمی به شعاع R و ارتفاع h مفروض است. شعاع و ارتفاع استوانه مستدیر قائمی که بیشترین سطح جانبی را دارد و قابل محاط شدن در این مخروط باشد بیابید؟ (دانشکده فنی دانشگاه تهران - میان ترم نیمسال دوم ۷۷)
۲۶	یک مخزن آب به شکل مخروط مستدیر قائمی است که راس آن به طرف پایین است، ارتفاع آن ۱۰ متر و شعاع قاعده آن ۱۵ متر است. آب به میزان ثابت ۱ مترمکعب در دقیقه از ته مخزن خارج و به میزان C متر مکعب در دقیقه وارد آن می شود. C را طوری بیابید که سطح آب در لحظه ای که عمق آن ۲ متر است، به میزان ۴ متر در دقیقه در حال بالا آمدن باشد. (دانشکده فنی دانشگاه تهران ۷۸/۸/۲۹)
۲۷	فرض کنید $x > 0$ ، نشان دهید: (دانشکده فنی دانشگاه تهران - میان ترم نیمسال دوم ۷۷) $1 - \frac{1}{x} < \ln(x) < x - 1$
۲۸	نشان دهید که به ازای هر $0 < x < \frac{\pi}{2}$ نامساوی روبرو برقرار است: (دانشکده فنی دانشگاه تهران - ۷۸/۸/۲۹) $\sin(x) + \tan(x) > 2x$

۲۹	تحقیق کنید: (دانشکده فنی دانشگاه تهران تابستان ۸۰)	$\frac{d^n}{dx^n}(f \cdot g) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{d^{n-k} f}{dx^{n-k}} \cdot \frac{d^k g}{dx^k}$
۳۰	اگر $0 < x < \frac{\pi}{2}$ باشد، نشان دهید: (دانشکده فنی دانشگاه تهران تابستان ۸۰)	$\frac{2}{\pi} < \frac{\sin(x)}{x} < 1$
۳۱	نشان دهید: (دانشکده فنی دانشگاه تهران – آبان ماه ۸۱)	$1 + x \sinh^{-1}(x) \geq \sqrt{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$
۳۲	اولا ثابت کنید اگر $0 \leq p \leq 1$, $x > 0$ باشد داریم: ثانیا اگر $a > 0$, $b > 0$ باشد، نشان دهید: (دانشکده فنی دانشگاه تهران ۸۱/۲/۵)	$(1+x)^p \leq 1+x^p$ $(a+b)^p \leq a^p + b^p$
۳۳	تابع f به صورت مقابل تعریف می شود: الف) ثابت کنید f محدب است. ب) سپس نامساوی روبرو را نتیجه بگیرید. $\log\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \sqrt{(\log a)(\log b)}$ که در آن a, b دو عدد حقیقی بزرگتر از ۱ می باشند.	$f(x) = -\log(\log(x)) , \quad (x > 1)$
۳۴	اگر تابع f با دامنه اعداد حقیقی در رابطه $ f(x) - f(y) \leq (x - y)^2$ صدق کند، نشان دهید که تابع f در هر نقطه x_0 دارای مشتق صفر است.	
۳۵	یک استخر به شکل مستطیل دارای ۸ متر عرض و ۲۰ متر طول است. قسمت کف استخر به صورت سطح مورب می باشد. کم عمق ترین قسمت استخر یک متر و عمیق ترین ناحیه آن دارای ۳ متر عمق می باشد. آب به میزان یک متر مکعب در دقیقه از کف آن در حال خروج از استخر است. سطح آب در لحظه ای که عمق آب الف – ۱ متر، ب- ۲/۵ متر می باشد با چه سرعتی در حال پایین رفتن است.	
۳۶	یک تانک سوخت شامل یک استوانه و دو نیکمره در دو انتهای آن می باشد. قیمت هر واحد مساحت نیمکره ها دو برابر قیمت مساحت واحد استوانه است. شعاع قاعده و ارتفاع استوانه را طوری پیدا کنید که هزینه کل حداقل بشود.	

مسایلی در کاربرد مشتق 2 فضایی رل - لاگرانژ - کوشی

ردیف	سوالات
1	<p>نشان دهید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران دی ماه 1366)</p> $ \operatorname{Arc\,tan}(x_1) - \operatorname{Arc\,tan}(x_2) \leq x_2 - x_1 $
2	<p>نام مساوی روبرو را ثابت کنید:</p> $ \sin(b) - \sin(a) \leq b - a $
3	<p>فرض کنید C_n, \dots, C_1, C_0 اعداد حقیقی ثابتی باشند به طوری که $\sum_{k=0}^n C_k = 0$. ثابت کنید معادله زیر در فاصله $(0,1)$ لااقل دارای یک جواب است. (دانشکده فنی دانشگاه تهران - 70/1/31)</p> $(n+1)C_n x^n + nC_{n-1} x^{n-1} + \dots + 2C_1 x + C_0 = 0.$
4	<p>اگر $\frac{a_0}{1} + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \dots + \frac{a_n}{n+1} = 0$ باشد، برای بعضی مقادیر x در $[0,1]$ نشان دهید:</p> <p>(دانشکده فنی دانشگاه تهران - آذر ماه 70)</p> $a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n = 0$
5	<p>ثابت کنید $\frac{b-a}{1+b^2} < \tan^{-1}(b) - \tan^{-1}(a) < \frac{b-a}{1+a^2}$ ($a < b$) (دانشکده فنی دانشگاه تهران - 71/5/20)</p> <p>راهنمایی: $f(x) = \tan^{-1}(x)$</p>
6	<p>فرض می‌کنیم تابع f روی فاصله بسته $[1,2]$ پیوسته و در فاصله باز $(1,2)$ مشتق پذیر باشد و $f(x) = 1$ و $f(2) = 2$. ثابت کنید نقطه ای مانند x_0 در فاصله باز $(1,2)$ موجود است که مماس بر منحنی f در x_0 از مبدا می‌گذرد.</p> <p>راهنمایی: از تابع $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ می‌توانید استفاده کنید (دانشکده فنی دانشگاه تهران 71/8/24)</p>
7	<p>با استفاده از قضیه رول نشان دهید هر گاه داشته باشیم:</p> $f(x) = (x^2 - 4)(x^2 - 1)(x + 3)(x - 7)$ <p>آنگاه $f'(x)$ دارای 5 ریشه حقیقی متمایز است.</p>
8	<p>با در نظر گرفتن تابع $f(x) = \operatorname{Ln}(\cos(x))$ ثابت کنید: (دانشکده فنی دانشگاه تهران 72/2/19)</p> $(a-b)\tan(b) < \operatorname{Ln}\left(\frac{\cos(b)}{\cos(a)}\right) < (a-b)\tan(a) \quad 0 < a < b < \frac{\pi}{2}$
9	<p>نشان دهید (دانشکده فنی دانشگاه تهران - 73/2/3)</p> $(0 < a < b) \quad \frac{b-a}{b} < \operatorname{Ln}\left(\frac{b}{a}\right) < \frac{b-a}{a}$

10	<p>نشان دهید: (دانشکده فنی دانشگاه تهران - 72/6/4)</p> $pb^{p-1}(a-b) < a^p - b^p < pa^{p-1}(a-b) \quad 0 < a < b, \quad p < 1$
11	<p>با استفاده از قضیه رول نشان دهید معادله زیر در بازه (0,1) دارای جواب است. $\tan(x) = 1 - x$</p>
12	<p>نشان دهید: (دانشکده فنی دانشگاه تهران - نیمسال اول 73-74 - میان ترم)</p> $(x - \frac{\pi}{2}) \cot(x) \leq \ln(\sin(x)) \leq 0$ <p>با شرط $\frac{\pi}{2} \leq x < \pi$</p>
13	<p>فرض کنیم $f'(x) = \frac{x}{1+x^2}$، ثابت کنید به ازای هر b, a متمایز داریم: (دانشکده فنی دانشگاه تهران 74/8/20)</p> $ f(b) - f(a) \leq \frac{1}{2} b - a $
14	<p>نشان دهید: (دانشکده فنی دانشگاه تهران 74/2/24)</p> $(x > 0) \quad \frac{x}{x+1} < \ln(1+x) < x$
15	<p>نشان دهید: (دانشکده فنی دانشگاه تهران 74/5/28)</p> $(x > 0) \quad \frac{x}{x+1} < \ln(1+x) < \frac{1}{x}$
16	<p>فرض کنیم تابع f در فاصله $[a, b]$ پیوسته و f'' در فاصله (a, b) همواره موجود و مثبت باشد. نشان دهید:</p> <p>(دانشکده فنی دانشگاه تهران 75/8/22)</p> $\forall x, y \in [a, b] \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}[f(x) + f(y)]$
17	<p>تابع f روی بازه $[a, b]$ پیوسته و روی بازه (a, b) مشتق پذیر است و مشتق دوم دارد. پاره خط واصل بین نقاط $(a, f(a))$ و $(b, f(b))$ نمودار f را در نقطه سومی چون $c \in (a, b)$ قطع می کند. ثابت کنید به ازای حداقل یک نقطه مانند t در (a, b) داریم: (دانشکده فنی دانشگاه تهران - 75/5/1)</p> $f''(t) = 0$
18	<p>نشان دهید: (دانشکده فنی دانشگاه تهران - 76/2/10)</p> $\frac{\pi}{4} + \frac{3}{25} < \arctan\left(\frac{4}{3}\right) < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}$
19	<p>اگر f بر بازه بسته $[0, 1]$ پیوسته و $f(0) = 0$ و اگر $f'(x)$ بر بازه باز $(0, 1)$ موجود و صعودی باشد، نشان دهید که $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ نیز بر بازه $(0, 1)$ صعودی است. (دانشکده فنی دانشگاه تهران - آبان 77)</p>
20	<p>اگر $0 < a < b$ باشد، نشان دهید:</p>

	$\left(\frac{b}{a}\right)^a < e^{b-a} < \left(\frac{b}{a}\right)^b$ <p>و از نامساوي فوق نتيجه بگيريد:</p> $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad (n > 0)$ <p>(دانشکده فني دانشگاه تهران - آبان ماه 79)</p>
21	<p>ثابت کنيد بـه ازاي هر x در فاصله $(0,1]$ داريم:</p> $\text{Arc sin}(x) \leq \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
22	<p>فرض کنيد:</p> $f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$ <p>الف) نشان دهيد: $f'(0) = 1$</p> <p>ب) نشان دهيد در هر فاصله شامل $x=0$، نقاطي وجود دارد که: $f'(x) < 0$</p>

مسایلی در قضایای انتگرال و مجموع ریمن

ردیف	سوالات
۱	<p>اگر n عدد صحیح و مثبت باشد؛ با استفاده از قضیه مقدار میانگین وزن دار برای انتگرال ها نشان دهید که:</p> $\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin(t^2) dt = \frac{(-1)^n}{c} \quad \sqrt{n\pi} \leq c \leq \sqrt{(n+1)\pi}$
۲	<p>با استفاده از اتحاد $1+x^6 = (1+x^2)(1-x^2+x^4)$ و قضیه مقدار میانگین وزن دار برای انتگرال ها ثابت کنید به ازاء</p> $\frac{1}{1+a^6} \left(a - \frac{a^3}{3} + \frac{a^5}{5} \right) \leq \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \leq a - \frac{a^3}{3} + \frac{a^5}{5} \quad a > 0 \text{ داریم:}$
۳	<p>تابع f، پیوسته بر قسمت مثبت محور حقیقی، این خاصیت را دارد که به ازای هر $x > 0$ و $y > 0$ داشته باشیم:</p> $\int_1^{xy} f(t) dt = y \int_1^x f(t) dt + x \int_1^y f(t) dt$ <p>اگر $f(1) = 3$ باشد، $f(x)$ را به ازای هر $x > 0$ حساب کنید.</p>
۴	<p>تابع f، پیوسته بر قسمت مثبت محور حقیقی، دارای این خاصیت است که به ازای هر انتخاب $x < 0$ و $y > 0$ انتگرال</p> $\int_x^{xy} f(t) dt$ <p>از x مستقل (و در نتیجه فقط تابع y) می باشد. اگر $f(2) = 2$ باشد، مقدار انتگرال $A(x) \int_1^x f(t) dt$ را به ازای هر $x > 0$ حساب کنید.</p>
۵	<p>حد روبرو را حساب کنید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران - پاییز ۱۳۶۵)</p> $\lim_{n \rightarrow \infty} A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^k + 2^k + \dots + n^k}{n^{k+1}}$
۶	<p>حد روبرو را حساب کنید. (دانشکده خواجه نصیرالدین طوسی ۷۱/۱۰/۲۲) (دانشگاه امیرکبیر ۶۴/۱۱/۱۹)</p> $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$
۷	<p>از رابطه روبرو $\frac{dy}{dx}$ را حساب کنید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران خرداد ۶۴)</p> $\sin(y) \int_0^y e^{-t^2} dt + \int_{\cos(\frac{1}{x})}^{2^x} \sin^2(t) dt = 0$
۸	<p>اگر داشته باشیم $\int_0^1 \frac{e^t}{1+t} dt = A$ آنگاه $I = \int_{a-1}^a \frac{e^{-t}}{t-a-1} dt$ را برحسب A به دست آورید.</p> <p>(دانشکده فنی دانشگاه تهران ۶۴/۱۰/۲۴)</p>
۹	<p>نشان دهید: (دانشکده فنی دانشگاه تهران ۶۵/۲/۲۷)</p> $\left \int_1^{\sqrt{3}} \frac{e^{-x} \sin(x)}{x^2 + 1} dx \right \leq \frac{\pi}{12e}$

۱۰	با استفاده از اتحاد $\sqrt{1-x^2} = \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ نشان دهید: (دانشکده فنی دانشگاه تهران ۷/۴/۷۷)
	$\frac{11}{24} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2} dx \leq \frac{11}{24} \sqrt{\frac{4}{3}}$
۱۱	حد روبرو را حساب کنید. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[e^{\frac{\pi}{n}} + e^{\frac{2\pi}{n}} + \dots + e^{\frac{n\pi}{n}} \right]$
۱۲	حد روبرو را حساب کنید. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\int_0^{(x-2)^2} \cos(t^3) dt}{(x-2)^2}$
۱۳	نقاط ماکزیمم و می نیمم تابع روبرو را پیدا کنید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران - ۷۰/۱/۳۱) $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$
۱۴	تابع $f(x)$ را چنان تعیین کنید که داشته باشیم: (دانشکده فنی دانشگاه تهران - ۷۱/۵/۲۰) $\int_1^{\cos(x)} \frac{f(t)}{t^2} dt = \ln(\cos(x)) + \frac{1 - \cos(x)}{\cos(x)}$
۱۵	اگر $p > 1$ باشد، انگاه ثابت کنید تابع $f(x)$ در فاصله باز $(0, \infty)$ همواره نامنفی است. (p مقداریست ثابت) (دانشکده فنی دانشگاه تهران - ۷۱/۸/۲۴) $f(x) = x^p - 1 - \int_1^x \frac{dt}{t}$
۱۶	حد زیر را حساب کنید. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} \times \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{n} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^2} \times \dots \times \left(1 + \frac{n-1}{n}\right)^{\frac{1}{n} \left(1 + \frac{n-1}{n}\right)^2} \right]$
۱۷	فرض کنید به ازاء هر x در فاصله $[0, a]$ داریم $ f''(x) \leq m$ و f بیشترین مقدار خود را در یک نقطه درونی این فاصله بگیرد. نشان دهید: $ f'(0) + f'(a) \leq am$ تذکر - f'' در $[0, a]$ پیوسته است. (دانشکده فنی دانشگاه تهران - ۷۱/۶/۷)
۱۸	نشان دهید که به ازاء $0 < x < 1$ (دانشکده فنی دانشگاه تهران - تیر ماه ۷۲) (راهنمایی $(f(x) = x - \ln(1+x))$) $\frac{x^2}{4} < x - \ln(1+x) < \frac{x^2}{2}$
۱۹	تابع g که همه جا پیوسته است داده شده به طوری که $g(1) = 5$, $\int_0^1 g(t) dt = 2$ می باشد. فرض کنید $f(x) = \frac{1}{2} \int_0^x (x-t)^2 g(t) dt$. نشان دهید: $f(x) = x \int_0^x g(t) dt - \int_0^x t g(t) dt$ و سپس $f''(1)$ و $f'''(1)$ را حساب کنید.

۲۰	حد زیر را حساب کنید. (دانشکده صنعتی شریف - ۷۲/۸/۲۷) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{-\frac{3}{2}} (1 + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n})$
۲۱	حد مجموع زیر را حساب کنید: (دانشکده فنی دانشگاه تهران - ۷۲/۲/۱۹) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\sqrt[3]{n^2(n+1)}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n^2(n+2)}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{2n^3}} \right]$
۲۲	تابع f بر روی $[0, +\infty)$ مثبت و در هر نقطه پیوسته است. اگر داشته باشیم $\varphi(x) = \frac{\int_0^x t f(t) dt}{\int_0^x f(t) dt}$ ، نشان دهید که تابع φ بر روی $[0, +\infty)$ اکیدا صعودی است. سپس حساب کنید $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = ?$ (دانشکده فنی دانشگاه تهران - ابان ماه ۷۲)
۲۳	حد روبرو را بیابید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران - ۷۴/۲/۲۴) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n}{(n+1)^3} + \frac{2n}{(n+2)^3} + \frac{3n}{(n+3)^3} + \dots + \frac{1}{8n} \right]$
۲۴	نشان دهید: (دانشکده فنی دانشگاه تهران - ۷۴/۸/۲۰) $\frac{1}{3} \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{2 + \cos(x)} dx \leq \frac{1}{2}$
۲۵	تابع پیوسته $f(x)$ که همواره صفر نیست و $f'(x) \neq 0$ را چنان پیدا کنید که داشته باشیم: $[f(x)]^2 = \int_0^x f(t) \frac{e^t}{1 + e^{-t}} dt$ (دانشکده فنی دانشگاه تهران - ۷۵/۲/۱۱)
۲۶	تابع f را از رابطه زیر به دست آورید: (دانشکده فنی دانشگاه تهران - ۷۵/۸/۲۲) $f(x) = \sin(x) + \int_0^x f'(t) (2 \sin(t) - \sin^2(t)) dt$
۲۷	حد روبرو را حساب کنید: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right]$
۲۸	تابعی مانند f وجود دارد که در هر X حقیقی تعریف شده و پیوسته است و در معادله ای به شکل زیر صدق می کند که در آن C ثابت است. $A(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_x^1 t^2 f(t) dt + \frac{x^{16}}{8} + \frac{x^{18}}{9} + C$ برای $f(x)$ دستور صریحی یافته و مقدار ثابت C را پیدا کنید.
۲۹	نشان دهید: (راهنمایی: به ازای هر $x \geq 0$) $\int_0^x \frac{\sin(t)}{t+1} dt \geq 0$
۳۰	فرض کنید $f(x) = \int_0^x e^{2t} (3t^2 + 1)^{\frac{1}{2}} dt$ و $g(x) = x^c e^{2x}$. به ازاء مقدار معینی از C حد $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ وقتی $x \rightarrow +\infty$ متناهی و ناصفر است. C را تعیین و حد مذکور را حساب کنید (دانشکده فنی دانشگاه تهران ۷۱/۶/۷)

۳۱	تابع f که به ازاء هر x پیوسته و همه جا ناصفر نباشد را به قسمی پیدا کنید که داشته باشیم: (دانشکده فنی دانشگاه تهران ۷۱/۶/۷) $f^2(x) = \int_0^x f(t) \frac{\sin(t)}{2 + \cos(t)} dt$
۳۲	فرض کنید g' مشتق تابع g و تابع غیر صفر f توابعی پیوسته باشند به طوری که به ازای هر عدد حقیقی x داشته باشیم $f(x) = \int_0^x g'(t) f(t) dt$ اگر $g(1) = 0$ و $f(1) = 1$ باشند، تابع $g(x)$ را برحسب x به دست آورید. (دانشکده صنعتی شریف ۷۲/۸/۲۷)
۳۳	حد روبرو را حساب کنید. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 4} + \dots + \frac{n}{n^2 + n^2} \right]$
۳۴	حد روبرو را پیدا کنید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران – تابستان ۷۳) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (2^t - 2^{\sin(t)}) dt}{x^2}$
۳۵	حد زیر را حساب کنید. $\lim_{n \rightarrow \infty} A = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{-\frac{1}{n}} + 2e^{-\frac{2}{n}} + \dots + ne^{-\frac{n}{n}}}{n^2} \right]$
۳۶	اگر تابع f در هر حالت پیوسته بوده و در دستور داده شده به ازای هر $x \geq 0$ صدق کند، $f(2)$ را محاسبه نمایید. الف) $\int_0^{x^2} f(t) dt = x^2(1+x)$ ب) $\int_0^{x^2(1+x)} f(t) dt = x$
۳۷	حد روبرو را حساب کنید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران – آبان ماه ۷۲) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin t^3 dt}{x^2 \sin 3x^2}$
۳۸	حدود زیر را به دست آورید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران – میان ترم – نیمسال اول ۷۳-۷۴) الف) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\frac{1 + \sqrt{n}}{n^2 \sqrt{n}}} + \sqrt{\frac{\sqrt{2} + \sqrt{n}}{n^2 \sqrt{n}}} + \dots + \sqrt{\frac{\sqrt{n} + \sqrt{n}}{n^2 \sqrt{n}}} \right)$ ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2} dt \right)^2}{\int_0^x e^{2t^2} dt}$
۳۹	حد زیر را به دست آورید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران – ۷۵/۸/۲۲) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}} + \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3}} + \dots + \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{n}{n^3}} \right]$

۴۰	<p>اگر تابع f متناوب با دوره تناوب $p > 0$ باشد و بر $[0, p]$ انتگرال پذیر باشد، ثابت کنید که به ازاء هر a داریم:</p> $\int_a^{p+a} f(x)dx = \int_0^p f(x)dx$
۴۱	<p>اگر $f(x) = \int_1^{1+x^2} \frac{\sin(tx)}{t} dt$ باشد، آنگاه $f'(x)$ را به دست آورید؟ (دانشکده فنی دانشگاه تهران – آبان ماه ۷۷)</p>
۴۲	<p>حدود زیر را حساب کنید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران – آبان ۷۷)</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;"> $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin(x)} \sqrt{\tan(x)} dx}{\int_0^{\tan(x)} \sqrt{\sin(x)} dx}$ <p>(ب)</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>الف) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{k^2 + n^2 p^2}$ (پ ثابت)</p> </div> </div>
۴۳	<p>نشان دهید: (دانشکده فنی دانشگاه تهران آبان ماه ۷۹)</p> $2e^{-\frac{1}{4}} < \int_0^2 e^{x^2-x} dx < 2e^2$
۴۴	<p>تابع f در هر x حقیقی با دستور روبرو:</p> $f(x) = 3 + \int_0^x \frac{1 + \sin(t)}{2 + t^2} dt$ <p>تعریف شده است. بدون محاسبه این انتگرال چند $f(0) = p(0)$, $f'(0) = f'(0)$, $f''(0) = f''(0)$ جمله ای درجه دوم $p(x) = a + bx + cx^2$ را طوری بیابید که داشته باشیم:</p>

مسایلی در روش های محاسبه انتگرال

ردیف	سوالات
۱	انتگرال روبرو را محاسبه کنید: $\int \sin(\sqrt[4]{x}-1)dx$
۲	ثابت کنید: $I = \int_0^2 [t^2]dt = 5 - \sqrt{2} - \sqrt{3}$
۳	مطلوب است محاسبه انتگرال روبرو: $I = \int \frac{dx}{1+a \cos x} \quad (0 < a < 1)$
۴	انتگرال روبرو را حساب کنید: $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x}}$
۵	انتگرال روبرو را حساب کنید: $I = \int x \operatorname{Arc} \tan(x) dx$
۶	انتگرال روبرو را حساب کنید. $I = \int \frac{\operatorname{Arc} \tan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}(1+x)} dx$
۷	نشان دهید: $I = \int_0^{\pi} f(\sin(x)) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin(x)) dx$
۸	چنانچه n, m اعداد صحیح مثبتی باشند، نشان دهید: $I = \int_0^1 x^m (1-x)^n dx = \int_0^1 x^n (1-x)^m dx$
۹	ثابت کنید: $I = \int \frac{\operatorname{Arc} \sin(x)}{x^2} dx = \operatorname{Ln} \left \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} \right - \frac{\operatorname{Arc} \sin(x)}{x} + C$
۱۰	مطلوب است محاسبه انتگرال: (دانشکده فنی دانشگاه تهران - تیر ماه ۱۳۶۶) $I = \int \frac{x dx}{4-x^2+\sqrt{4-x^2}}$
۱۱	مطلوب است محاسبه انتگرال روبرو: $I = \int x^2 \operatorname{Arc} \cos(x) dx$
۱۲	با فرض $f(0), I = \int_0^{\pi} [f(x) + f''(x)] \sin(x) dx = 5, f(\pi) = 2$ را حساب کنید.
۱۳	انتگرال روبرو را حساب کنید: $I = \int \frac{dx}{2 \sin(x) - \cos(x) + 5}$
۱۴	نشان دهید: $I = \int \frac{dx}{x(1+t^2)} = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{1+t^2}, \quad (x > 0)$
۱۵	نشان دهید که اگر n عدد صحیح مثبتی باشد: $I = \int_0^1 (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(z) dz$
۱۶	انتگرال روبرو را حساب کنید: $I = \int (x^2+1)^{-\frac{3}{2}} dx$

۱۷	حاصل انتگرال روبرو را به دست آورید:	$I = \int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{(1+x^2)^3}}$
۱۸	اگر m عدد صحیح و مثبتی باشد، نشان دهید:	$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m(x) \sin^m(x) dx = 2^{-m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m(x) dx$
۱۹	انتگرال روبرو را حساب کنید:	$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \cos x + \sin x} dx$
۲۰	انتگرال روبرو را حساب کنید:	$I = \int \frac{x^2}{(x^2 + 1)} dx$
۲۱	انتگرال روبرو را حساب کنید:	$I = \int \frac{\sin^2 x}{1 + \sin^2 x} dx$
۲۲	انتگرال روبرو را حساب کنید:	$I = \int \frac{dx}{(a \sin(x) + b \cos(x))^2}$
۲۳	انتگرال روبرو را حساب کنید:	$I = \int \text{Arc tan}(\sqrt{x}) dx$
۲۴	فرض کنید $F(m, n) = \int_0^x t^m (1+t)^n dx$ ، $m > 0$ و $n > 0$ ، نشان دهید:	$(m+1)F(m, n) + nF(m+1, n-1) = x^{m+1} (1+x)^n$
۲۵	دو عدد a, b را طوری تعیین کنید که داشته باشیم:	$I = \int_0^1 (ax+b)(x^2 + 3x + 2)^{-2} dx = \frac{3}{2}$
۲۶	انتگرال روبرو را حساب کنید:	$I = \int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}$
۲۷	مطلوب است محاسبه انتگرال روبرو:	$I = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2} (1 + \sqrt[3]{x^2})}$
۲۸	مطلوبست محاسبه انتگرال روبرو:	$I = \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{(1-x^2)^3}} = \int x^{-2} (1+x^2)^{-\frac{3}{2}} dx$
۲۹	انتگرال نامعین روبرو را حساب کنید: (دانشکده فنی دانشگاه تهران - ۸۲/۸/۲۲)	$I = \int \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}} \sqrt[3]{1+x^4}}$
۳۰	فرض کنید $f(n) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x) dx$ که در آن $n \geq 1$ می باشد، نشان دهید: الف: $f(n+1) < f(n)$ ب: اگر $n > 2$ باشد آن گاه $f(n) + f(n-2) = \frac{1}{n+1}$	

	پ: اگر $n > 2$ باشد $\frac{1}{n+1} < 2f(n) < \frac{1}{n-1}$	
۳۱	انتگرال روبرو را حساب کنید: (دانشکده فنی دانشگاه تهران - پایان ترم ۱۳۶۲) $I = \int \frac{\sin(x)}{\sin(x) + \cos(x)} dx$	
۳۲	نشان دهید $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(x)) dx = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(x)) dx$ ، سپس مقدار I را بیابید.	
۳۳	انتگرال روبرو را محاسبه کنید: (دانشکده فنی دانشگاه تهران - خرداد ۱۳۶۴) $I = \int \frac{x^2 dx}{(x^2 + 2x + 5)^2}$	
۳۴	مطلوب است محاسبه انتگرال زیر: (دانشکده فنی دانشگاه تهران خرداد ماه ۱۳۶۴) $I = \int \frac{x^3 - x - 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}} dx$	
۳۵	انتگرال روبرو را حساب کنید $I = \int \left(\frac{a+x}{a-x}\right)^{1/2} dx \quad (a > 0)$	
۳۶	اگر f تابعی پیوسته باشد، نشان دهید: (دانشکده فنی دانشگاه تهران آذر ماه ۸۰) $\int_0^x f(u)(x-u)du = \int_0^x \left(\int_0^u f(t)dt \right) du$	
۳۷	اگر I_n به صورت زیر تعریف شده باشد، رابطه ای بین I_n و I_{n-1} به دست آورید. $I_n = \int \frac{dx}{x^n \sqrt{x+1}} \quad n \geq 2$ (دانشکده فنی دانشگاه تهران ۷۰/۱/۳۱)	
۳۸	انتگرال زیر را حساب کنید: $I = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \quad b \neq a$	
۳۹	انتگرال روبرو را محاسبه کنید: (دانشکده فنی دانشگاه تهران ۷۱/۵/۲۰) $I = \int \frac{\pi x \sin(x)}{01 + \cos^2(x)} dx$	
۴۰	انتگرال روبرو را حساب کنید: (دانشکده فنی دانشگاه تهران ۷۱/۴/۳) $I = \int \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} dx$	
۴۱	انتگرال روبرو را حساب کنید: (دانشکده فنی دانشگاه تهران - تیر ماه ۷۰) $I = \int \frac{dx}{(a^2 - x^2)^{3/2}}$	
۴۲	انتگرال روبرو را حساب کنید: (دانشکده فنی دانشگاه تهران ۷۱/۴/۳) $I = \int \frac{dx}{\sin(x) + \cos(x)}$	
۴۳	انتگرال روبرو را حساب کنید: (دانشکده فنی دانشگاه تهران ۷۱/۶/۷) $I = \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$	
۴۴	اگر $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x) dx$ باشد نشان دهید: (دانشکده فنی دانشگاه تهران ۷۱/۵/۲۰) $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad n \geq 2$	

۴۵	انتگرال $I = \int \frac{\sqrt{8-x^2}}{x} dx$ را حساب کنید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران - تابستان ۷۱ - پایان ترم)
۴۶	انتگرال روبرو را حساب کنید: (دانشکده شهید با هنر کرمان ۷۱/۳/۲۴) $I = \int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} \quad ab \neq 0$
۴۷	انتگرال روبرو را حساب کنید: $I = \int \sqrt{(x-a)(b-x)} dx, \quad b \neq 0$ راهنمایی: $x-a = (b-a)\sin^2(u)$
۴۸	انتگرال روبرو را حساب کنید: $I = \int \frac{x e^{\text{Arc tan}(x)}}{(x^2+1)^{3/2}} dx$
۴۹	انتگرال روبرو را حساب کنید: (دانشگاه شهید باهنر کرمان - ۱۳۷۱/۳/۲۴) $I = \int \frac{\text{Arc sin}(x)}{\sqrt{1+x}} dx$
۵۰	انتگرال روبرو را حساب کنید: (دانشکده فنی دانشگاه تهران ۷۱/۱۰/۲۲) $I = \int \frac{\text{Arc tan}(x)}{x\sqrt{x}} dx$
۵۱	انتگرال روبرو را حساب کنید: $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin(x)}}{\sqrt{\sin(x)} + \sqrt{\cos(x)}} dx$
۵۲	انتگرال روبرو را حساب کنید: $I = \int (x^2 + 3) \text{Arc tan}(x) dx$
۵۳	انتگرال روبرو را حساب کنید: $I = \int \frac{dx}{2 - \sin^2(x)}$
۵۴	فرض کنیم تابع f برای همه اعداد حقیقی پیوسته و همچنین $f(x) > 0$ باشد ثابت کنید برای هر عدد حقیقی a داریم: $I = \int_0^a \frac{f(x)}{f(x) + f(a-x)} dx = \frac{a}{2}$
۵۵	انتگرال روبرو را حساب کنید: $I = \int \frac{x^3 - 2}{x^3 - 2x + 1} dx$
۵۶	اگر $I_n = \int_0^a (a^2 - t^2)^n dt$ باشد، نشان دهید $(2n+1)I_n = 2na^2 I_{n-1}$ و سپس I_n را حساب کنید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران - آبان ۷۷) (دانشکده فنی دانشگاه تهران ۷۱/۲/۲۰)
۵۷	چنانچه $I_n(x) = \int_0^x t^n (t^2 + a^2)^{-1/2} dt$ باشد، نشان دهید: $nI_n(x) = x^{n-1} \sqrt{x^2 + a^2} - (n-1)a^2 I_{n-2}(x) \quad n \geq 2 \quad (\text{با شرط})$

۵۸	فرض کنید $F(x,a) = \int_0^x \frac{t^p}{(t^2 + a^2)^q} dt$ که در آن $a > 0$ و q, p اعداد صحیح مثبتی هستند. ثابت کنید: $F(x,a) = a^{p+1-2q} F(\frac{x}{a}, 1)$
۵۹	انتگرال روبرو را حساب کنید: $I = \int \frac{4x^5 - 1}{(x^5 + x + 1)^2} dx$
۶۰	انتگرال روبرو را حساب کنید: (از مسائلی امتحانی فنی دانشگاه تهران) $I = \int \frac{dx}{\cosh^4(x) + \sinh^4(x)}$
۶۱	مطلوب است محاسبه: (از مسائلی امتحانی دانشکده فنی دانشگاه تهران) $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{nx^{n-1}}{1+x} dx$
۶۲	انتگرال روبرو را حساب کنید: $I = \int \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x^4} [L_n(x^2 + 1) - 2L_n x] dx$
۶۳	مطلوب است محاسبه انتگرال روبرو $I = \int \frac{\text{Arc cot}(e^x)}{e^x} dx$
۶۴	انتگرال روبرو را حساب کنید: (دانشکده فنی دانشگاه تهران - تیر ماه ۱۳۷۲) $\int e^{ax} \cos(bx) dx$
۶۵	مطلوب است محاسبه انتگرال روبرو: $I = \int \frac{dx}{(1 + \sin x) \cos x}$
۶۶	انتگرال روبرو را حساب کنید: (دانشکده فنی دانشگاه تهران - تیر ماه ۱۳۷۲) $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 3x - 4}}$
۶۷	انتگرال روبرو را حساب کنید: (دانشکده فنی دانشگاه تهران - ۷۲/۴/۱) $I = \int \sin^2(1 + \ln(x)) dx$
۶۸	انتگرال روبرو را حساب کنید: (دانشکده فنی دانشگاه تهران ۷۳/۱۰/۱۳) $I = \int \frac{\sqrt{x^2 - x + 1}}{x - 1} dx$
۶۹	انتگرال روبرو را حساب کنید: $I = \int \frac{e^{2x}}{e^x + 3} dx$
۷۰	انتگرال روبرو را حساب کنید: $I = \int \frac{3x - 5}{\sqrt{x - x^2}} dx$
۷۱	مطلوب است محاسبه انتگرال روبرو: (از مسائلی امتحانی دانشکده فنی دانشگاه تهران) $I = \int \frac{x^2 dx}{(\cos(x) + x \sin(x))^2}$
۷۲	انتگرال روبرو را حساب کنید: $I = \int \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx$
۷۳	انتگرال روبرو را حساب کنید: $I = \int \sin(\ln(x)) dx$
۷۴	انتگرال روبرو را حساب کنید: $I = \int \frac{dx}{x \sqrt{x^{10} + x^5 + 1}}$

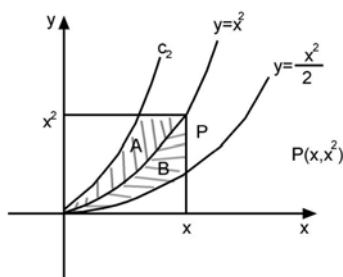
۷۵	انتگرال نامعین روبرو را حساب کنید: $I = \int \frac{dx}{(x^2 + 9)^2}$
۷۶	انتگرال های: الف) $\int \frac{3 \sin(x) + 2 \cos(x)}{2 \sin(x) + 3 \cos(x)} dx$ ب) $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$ را حساب کنید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران - خرداد ماه ۷۳)
۷۷	انتگرال های زیر را حساب کنید: (دانشکده فنی دانشگاه تهران - تابستان ۷۳) الف) $\int \text{Arc cos}\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}\right) dx$ ب) $\int \frac{2 - \sin(x)}{2 + \cos(x)} dx$
۷۸	یک فرمول بازگشتی برای انتگرال روبرو بیابید: (دانشکده فنی دانشگاه تهران - ۷۳/۱۰/۱۳) $I_n = \int \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx$
۷۹	مطلوب است محاسبه انتگرال: (دانشکده فنی دانشگاه تهران ۷۴/۱۰/۱۲) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^4}}$
۸۰	انتگرال های زیر را حساب کنید: (دانشکده فنی دانشگاه تهران - ۷۴/۳/۲۳) الف) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x} + e^x + 1}}$ ب) $\int \frac{\sqrt{x^3+1}}{x^4} dx$
۸۱	انتگرال روبرو را حساب کنید: (دانشکده فنی دانشگاه تهران - ۷۳/۱۰/۱۳) $I = \int \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x^2} dx$
۸۲	انتگرال های زیر را حساب کنید: (دانشکده فنی دانشگاه تهران - ۷۳/۲/۳) a) $\int \frac{dx}{x^4 - 2x^3}$ b) $\int \frac{dx}{x^4 - 1}$ c) $\int \text{Arc tan}(x) dx$
۸۳	انتگرال روبرو را حساب کنید: (دانشکده فنی دانشگاه تهران - ۷۴/۵/۲۸) $I = \int \frac{2 \tan(x) + 3}{\sin^2(x) + 2 \cos^2(x)} dx$
۸۴	انتگرال روبرو را حساب کنید: (دانشکده فنی دانشگاه تهران ۷۵/۵/۲۰) $I = \int \frac{dx}{\sqrt{1 + \tanh^2(x)}}$
۸۵	انتگرال روبرو را حساب کنید: (دانشکده فنی دانشگاه تهران ۷۴/۵/۲۸) $I = \int \sqrt{x^2 - 6x + 5} dx$
۸۶	اگر $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x \cos x}{1 + \cos^2 2x} dx$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3(x) \sin(x)}{1 + \cos^2 2x} dx = J$ باشد، نشان دهید $I = J$ و سپس مقدار I را حساب کنید: (دانشکده فنی دانشگاه تهران - ۷۴/۱۰/۱۲)
۸۷	انتگرال های زیر را حساب کنید: (دانشکده فنی دانشگاه تهران ۷۵/۳/۱۷) a) $\int x \text{Arc tan}(\sqrt{x^2 - 1}) dx$ b) $\int \frac{x + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} dx$

۸۸	انتگرال روبرو را حساب کنید: (دانشکده فنی دانشگاه تهران - ۷۵/۵/۲۰)	$I = \int \frac{dx}{x^4 \sqrt{x^2 + 1}}$
۸۹	انتگرال روبرو را حساب کنید: (دانشکده فنی دانشگاه تهران ۷۵/۱۰/۱۱)	$I = \int \frac{x^4 \operatorname{Arc} \tan(x)}{x^2 + 1} dx$
۹۰	انتگرال روبرو را حساب کنید: (دانشکده فنی دانشگاه تهران - ۷۶/۳/۱۳)	$I = \int \frac{xdx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}}$
۹۱	انتگرال روبرو را حساب کنید: (دانشکده فنی دانشگاه تهران - نیمسال دوم ۷۷-۷۶)	$I = \int x(\operatorname{Arc} \tan(x))^2 dx$
۹۲	فرض کنید انتگرال $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{(x+2)^2} dx$ باشد، انتگرال زیر را بر حسب A حساب کنید:	$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x) \cos(x)}{x+1} dx$
۹۳	انتگرال روبرو را حساب کنید: (دانشکده فنی دانشگاه تهران ۷۶/۳/۱۳)	$I = \int \frac{dx}{2 \sin(x) + \cos(x) + 3}$
۹۴	انتگرال روبرو را حساب کنید: (دانشکده فنی دانشگاه تهران - نیمسال دوم ۷۷-۷۶)	$\int (\operatorname{Arc} \sin(x))^2 dx$
۹۵	انتگرال $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx$ مفروض است. رابطه ای بین I_n , I_{n-2} , $(n \geq 2)$ پیدا کنید و با استفاده از آن I_3 را حساب کنید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران - آبان ماه ۷۷)	
۹۶	انتگرال روبرو را حساب کنید: (دانشکده فنی دانشگاه تهران - بهمن ماه ۷۸)	$I = \int \frac{dx}{x^4 + 2x^2}$
۹۷	تابع $B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$, $(p > 0, q > 0)$ را که تابع بتا (Beta) نامیده می شود در نظر می گیریم: الف) رابطه ای بین $B(p, q)$, $B(p+1, q-1)$ به دست آورید. $(p > 0, q > 1)$ ب) در صورتی که q, p اعداد صحیح مثبتی باشند مقدار $B(p, q)$ را حساب کنید. ج) انتگرال $I_{m,n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m(t) \cos^n(t) dt$ را که در آن m و n اعداد صحیح و نامنفی می باشند برحسب تابع بتا بنویسید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران - آبان ۱۳۷۹)	
۹۸	انتگرال روبرو را حساب کنید: (دانشکده فنی دانشگاه تهران - بهمن ماه ۷۸)	$I = \int \frac{x}{1 + \sin(x)} dx$
۹۹	انتگرال روبرو را حساب کنید: (دانشکده فنی دانشگاه تهران - ۸۰/۶/۱۰)	$I = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)\sqrt{x^2 + b^2}} \quad (a < b)$
۱۰۰	انتگرال روبرو را حساب کنید: (دانشکده فنی دانشگاه تهران - ۸۰/۶/۱۰)	$I = \int \frac{2x^3 + x^2 - x + 1}{x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1} dx$
۱۰۱	انتگرال روبرو را حساب کنید: (دانشکده فنی دانشگاه تهران - آبان ماه ۸۱)	$\int \frac{dx}{(x^2 + p)\sqrt{x^2 + q}} \quad 0 < p < q$

$I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^2+1} dx$	انتگرال روبرو را حساب کنید: (دانشکده فنی دانشگاه تهران – تابستان ۸۰)	۱۰۲
$I = \int_0^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx$ $I = \int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan(x)) dx$	اولا نشان دهید: ثانیا مطلوب است محاسبه انتگرال روبرو: (دانشکده فنی دانشگاه تهران – نیمسال اول ۸۳-۸۲)	۱۰۳
$I = \int \frac{dx}{x(1-x^2)^{3/2}}$	انتگرال روبرو را حساب کنید:	۱۰۴
$I = \int \frac{dx}{x(x^2+x+1)^{1/2}}$	مطلوب است محاسبه انتگرال روبرو:	۱۰۵

مسایلی در کاربرد انتگرال

ردیف	سوالات
۱	طول قوس قسمتی از منحنی $y = \ln\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)$ را بین نقاط به طول های $x=2$ و $x=4$ به دست آورید. (دانشگاه صنعت شریف ۷۳/۱۰/۱۱)
۲	مساحت رویه حاصل از دوران حلقه $8a^2y^2 = a^2y^2 - x^4$ را حول محور x ها حساب کنید. ($a>0$)
۳	مساحت سطح جانبی حاصل از دوران منحنی به معادله $3ay^2 = x(x-a)^2$ حول محور x ها را حساب کنید. ($a>0$)
۴	مساحت سطح جانبی حاصل از دوران سیکلوئید به معادلات $x = a(\theta + \sin(\theta))$ و $y = a(1 - \cos(\theta))$ را حول محور x ها حساب کنید. ($0 \leq \theta \leq \pi$)
۵	قاعده جسمی مجموعه عرضی تابع f می باشد که روی بازه $[1, a]$ پیوسته است. کلیه مقاطع عرضی عمود بر بازه $[1, a]$ مربع هستند. به ازای هر $a \geq 1$ حجم جسم مساوی $v = \frac{1}{3}a^3 \ln^2(a) - \frac{2}{9}a^3 \ln(a) + \frac{2}{27}a^3 - \frac{2}{27}$ می باشد. $f(a)$ را حساب کنید.
۶	در یک کره توپر به شعاع $2R$ حفره ای به شعاع R در امتداد یکی از قطرهای ایجاد می کنیم. چه حجمی از آن کاسته می شود؟ (دانشگاه صنعتی امیر کبیر ۶۷/۱۰/۲۴)
۷	طول قوس منحنی $x = a \cos^3(t)$ و $y = a \sin^3(t)$ را وقتی $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ است حساب کنید. اگر این قطعه از منحنی طول محور x ها دوران کند حجم حادث را محاسبه کنید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران ۷۲/۲/۱۹)
۸	طول کمان قسمتی از منحنی $y = \ln(1-x^2)$ را از $x=0$ تا $x=\frac{1}{2}$ به دست آورید. (دانشگاه علم و صنعت - بهمن ماه ۶۲)
۹	طول کمان منحنی $\begin{cases} x = 4(t - \sin(t)) \\ y = 4(1 - \cos(t)) \end{cases}$ از $t=0$ تا $t=2\pi$ را حساب کنید.
۱۰	فرض کنید C_2, C_1 دو منحنی باشند که از مبدا می گذرند، منحنی C را منصف در مساحت ناحیه بین C_2, C_1 گویند. هر گاه به ازاء هر نقطه دلخواه P از C مساحت دو ناحیه سایه دار A و B در شکل یکی باشند معادل منحنی C ، $y = x^2$ و معادله C_1 ، $y = \frac{x^2}{2}$ است مطلوب است معادله منحنی C_2 . (دانشکده فنی دانشگاه تهران ۶۵/۳/۲۷)



۱۱	<p>سطح محصور بین منحنی های $y = \frac{x}{2}$, $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{1}{x}$ را حول محور x ها دوران می دهیم. حجم حاصل را حساب کنید. (دانشکده علم و صنعت ایران - بهمن ماه - ۶۹)</p>
۱۲	<p>ناحیه بالائی محور x ها و محصور بین خط $2y=x+3$ و منحنی های $y^2+x=0$, $y^2-4x=0$ را حول خط $y=-1$ فاصله $-1 \leq x \leq 1$ دوران می دهیم. حجم جسم حاصل را به دست آورید. (دانشگاه شهید باهنر کرمان - ۱۳۷۱/۳/۲۴)</p>
۱۳	<p>سطح محصور به منحنی $x = 2y - y^2$ و خطوط $x=2$, $y=0$ و $y=2$ حول محور x ها دوران می کند. حجم حاصل را به دست آورید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران ۷۱/۸/۲۴)</p>
۱۴	<p>مطلوب است محاسبه سطح حاصل از دوران منحنی به معادله $y = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4x}$ از حول خط $y=-1$ از $x=1$ تا $x=3$.</p>
۱۵	<p>مساحت محصور بین منحنی های $\tanh(x)$ و $y=1$ را واقع در ربع اول به دست آورید.</p>
۱۶	<p>طول قوس منحنی $y = \ln \cos(x)$ را در فاصله $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ به دست آورید.</p>
۱۷	<p>تابع $f(x)$ را طوری بیابید که طول قوس آن در بازه $[0, x]$ برابر با $2x + f(x)$ باشد. (دانشکده فنی دانشگاه تهران ۷۳/۲/۶)</p>
۱۸	<p>حجم حاصل از دوران ناحیه محصور بین منحنی $y^2 = 4x$ و $y=x$ حول خط $x=4$ را حساب کنید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران ۷۳/۲/۶)</p>
۱۹	<p>سطح محصور بین خط $y = 2 - x$ و زیر منحنی $y = x^2$ و قسمت مثبت محور x ها، حول محور x ها دوران می کند، مرکز هندسی جسم حاصل را به دست آورید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران ۷۳/۲/۶)</p>
۲۰	<p>طول قطعه منحنی $x = \frac{t^4}{4}$ و $x = \frac{t^6}{6}$ محدود به محورهای مختصات چیست؟ (دانشکده فنی دانشگاه تهران ۷۴/۵/۲۸)</p>
۲۱	<p>حجم جسم حاصل از دوران سطح محصور به دایره $x^2 + y^2 = 1$ و محور x ها و منحنی $y^2 = \frac{3}{2}x$ را حول محور x ها حساب کنید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران - ۷۴/۲/۲۴)</p>
۲۲	<p>مقطع عرضی جسمی به وسیله صفحات موازی هم و عمود بر محور x ها دایری هستند که اقطار آنها واقع بین دو منحنی $y = x^2$ و $y = 8 - x^2$ در صفحه xoy جسم را حساب کنید. (توضیح: محاسبه حجم به طریق برشی) (دانشکده فنی دانشگاه تهران - ۷۵/۳/۱۷)</p>

۲۳	حجم حادث از دوران سطر محصور بین منحنی زیر و محور x ها و خطوط $x = -2$ و $x = 1$ حول محور x ها را حساب کنید. $y = \frac{x}{x^2 + x + 1} \sqrt{x^2 + 2x + 3}$
۲۴	حجم حادث از دوران دایره $x^2 + (y-1)^2 = 1$ حول خط $x = -2$ را حساب کنید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران - میان ترم - نیمسال اول ۷۴-۷۳)
۲۵	طول قوسی منحنی به معادله $f(x) = \int_0^x \sqrt{\cosh t} dt$ را از $x = 0$ تا $x = 2$ به دست آورید.
۲۶	مساحت سطح جانبی حاصل از دوران منحنی $y^2 = 12x$ حول محور x ها را از $x = 0$ تا $x = 3$ حساب کنید.
۲۷	مساحت محدود به حلقه منحنی $x^3 + x^2 - y^2 = 0$ را حساب کنید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران - تابستان ۷۳)
۲۸	ثابت کنید محیط بیضی به معادله $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ، $0 < b < a$ برابر است با: $L = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2(t)} dt \quad (k = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a})$
۲۹	مطلوب است محاسبه مساحت سطح جانبی حاصل از دوران منحنی به معادلات پارامتری $x = t + 1$ و $y = \frac{t^2}{2} + t$ حول محور y ها $(0 \leq t \leq 4)$. (دانشکده فنی دانشگاه تران ۷۵/۵/۲۰)
۳۰	ناحیه محصور بین دو منحنی $y = x^2$ و $x = y^2$ حول خط $x = -2$ دوران می کند حجم جسم دوار حاصل را به دست آورید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران - آبان ماه ۷۷)
۳۱	مساحت سطح جانبی حاصل از دوران منحنی: $y = a \cosh(\frac{x}{a})$, $(0 \leq x \leq a)$ حول محور x ها را به دست آورید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران - آبان ماه ۷۹)
۳۲	مساحت قسمتی از دایره $x^2 + y^2 = 3a^2$ واقع در ربع اول و محدود به سهمی های $y^2 = 2ax$, $x^2 = 2ay$ ($a > 0$) را بیابید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران - تابستان ۸۰)
۳۳	منحنی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ مفروض است ($a > b$). نقطه $M \left \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right.$ را روی منحنی در ربع اول در نظر می گیریم. مساحت قطعه محصور بین منحنی و OM و محور x ها را حساب کنید. (برحسب X). (دانشکده فنی دانشگاه تهران - تابستان ۸۰) (نظیر این مساله در آبان ۸۰ مطرح شده است)

۳۴	اولا مساحت سطح حادث و حجم حادث از دوران بیضی $x^2 + 4y^2 = 4$ را حول محور X ها به دست آورید. ثانیاً با استفاده از آن مرکز هندسی سطح نیمه بالائی بیضی فوق را ($y \geq 0$) بیابید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران – ۸۱/۲/۵)
۳۵	اولا طول کل منحنی به معادلات پارامتری $y = a \sin^3(\theta)$ و $x = a \cos^3(\theta)$ را بیابید. ثانیاً منحنی $x = y - y^3$ را رسم نموده و ناحیه بین منحنی و محور Y ها را حول محور X ها دوران می‌دهیم (در ربع اول) حجم حادث را حساب کنید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران ۸۱/۲/۵)
۳۶	منحنی به معادلات پارامتری: $x = e^t \sin(t)$, $y = e^t \cos(t)$ $0 \leq t \leq \pi$ حول محور Y ها دوران کرده است. مساحت سطح حاصل را به دست آورید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران – آبان ماه ۸۱)
۳۷	مطلوب است مساحت سطح حاصل از دوران بیضی به معادله $x^2 + 4y^2 = 4$ حول محور X ها.
۳۸	مساحت سطح حاصل از دوران بیضی به معادله $x^2 + 4y^2 = 4$ حول محور Y ها را به دست آورید.
۳۹	مساحت سطح جانبی حاصل از دوران منحنی به معادله $y = x^{\frac{3}{2}}$ را حول محور X ها در فاصله $0 \leq x \leq 1$ به دست آورید.
۴۰	مساحت سطح حاصل از دوران دایره به معادله $(x-b)^2 + y^2 = a^2$ حول محور Y ها را به دست آورید.
۴۱	طول قوس منحنی $y = x^2$ را از نقطه به طول $x=0$ تا $x=2$ حساب کنید.
۴۲	مساحت سطح جانبی حاصل از دوران منحنی $y = \sqrt{x}$ حول محور Y ها در فاصله $0 \leq x \leq 2$ را حساب کنید.

مسایلی در مختصات قطبی

ردیف	سوالات
۱	اولا نمودارهای $\rho = a$ و $\rho = a(1 - \cos(\theta))$ را رسم کنید. ثانيا مساحت ناحیه بین دو نمودار فوق را محاسبه نمایید.
۲	مطلوب است محاسبه مساحت ناحیه داخل منحنی $\rho = 2\cos(\theta)$ و خارج منحنی $\rho = 1$ و رسم دو منحنی. (دانشکده فنی دانشگاه تهران - ۷۲/۴/۱)
۳	منحنی زیر را رسم کرده و سطح حاصل از دوران آن حول محور y ها را به دست آورید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران ۷۱/۱۰/۲۲) $\rho = a(1 - \sin(\theta))$
۴	مساحت حلقه منحنی $x^4 + 3x^2y^2 + 2y^4 = a^2xy$ را در دستگاه قطبی حساب کنید.
۵	منحنی $\rho^2 = 2a^2 \sin(3\theta)$ را رسم کرده و مساحت داخل تمام حلقه ها را حساب کنید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران - ۷۴/۱۰/۱۲)
۶	منحنی زیر را رسم کنید و مساحت محصور شده به وسیله آن را حساب کنید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران - ۷۴/۵/۲۸) $\rho = 1 + \sin(\theta)$
۷	منحنی $\rho = a(1 - \cos(\theta))$ حول محور قطبی دوران یافته، مساحت سطح حاصل را به دست آورید.
۸	مساحت سطح جانبی حاصل از دوران کار دیوئید به معادلات $y = 2\sin(\theta) - \sin(2\theta)$ و $x = 2\cos(\theta) - \cos(2\theta)$ حول محور x ها را حساب کنید. $0 \leq \theta \leq \pi$
۹	مطلوب است رسم و محاسبه مساحت داخل منحنی $\rho = 5\cos(\theta)$ و خارج منحنی $\rho = 2 + \cos(\theta)$ (دانشکده فنی دانشگاه تهران - تابستان ۷۳)
۱۰	با گذر به مختصات قطبی مساحت داخل حلقه منحنی $x^3 + y^3 = 3axy$ واقع در ربع اول را حساب کنید ($a > 0$) (دانشکده فنی دانشگاه تهران - ۷۳/۱۰/۱۳)
۱۱	نمودار منحنی قطبی $\rho = a\cos(2\theta)$ ($a > 0$ ثابت) را رسم کرده و مساحت کل محصور شده توسط این منحنی را محاسبه کنید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران - خرداد ماه ۷۳)
۱۲	مساحت داخل دایره $\rho = 3\sin(\theta)$ و خارج منحنی $\rho = 2 - \sin(\theta)$ را پیدا کنید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران ۷۴/۳/۲۳)
۱۳	منحنی $\rho = a\sin^2(\frac{\theta}{2})$ را رسم کرده طول قوس و مساحت داخل آن را حساب کنید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران ۷۶/۳/۱۳)

۱۴	منحنی $\rho = a(1 + \cos(\theta))$ حول محور قطبی دوران کرده حجم و سطح حاصل را حساب کنید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران ۸۰/۶/۱۰)
۱۵	یک برگ از لمنیسکات $\rho^2 = \cos(2\theta)$ یک بار حول محور Xها و یک بار هم حول محور Yها دوران کرده است. در هر حالت مساحت سطح حاصل از دوران را به دست آورید.
۱۶	مساحت ناحیه محدود به حلقه کوچکتر منحنی $\rho = 1 + 2\cos(\theta)$ را به دست آورید.
۱۷	مطلوب است مساحت ناحیه محصور به وسیله منحنی قطبی به معادله $\rho = \cos(4\theta)$
۱۸	مساحت سطح واقع در داخل کاردیوئید $\rho = a(1 - \sin(\theta))$ و داخل دایره $\rho = a$ را به دست آورید.
۱۹	مساحت واقع بین دو دایره $\rho = a$ و $\rho = 2a\cos(\theta)$ را حساب کنید.
۲۰	مطلوب است مساحت ناحیه داخل کاردیوئید $\rho = 1 + \cos(\theta)$ و خارج دایره $\rho = 3\cos(\theta)$.

مسایلی در انتگرال های مجازی

ردیف	سوالات
۱	اگر $\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ باشد، حاصل $\int_0^{\infty} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 dx$ را به دست آورید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران - پایان ترم ۱۳۶۲)
۲	مقادیر a, b را طوری پیدا کنید که: (دانشکده فنی دانشگاه تهران - ۱۶۵/۳/۲۷) $I = \int_1^{\infty} \left[\frac{2x^2 + bx + a}{x(2x + a)} - 1 \right] dx = 1$
۳	انتگرال $\int_1^{\infty} \left(\frac{x}{2x^2 + 2c} - \frac{c}{x+1} \right) dx$ به ازاء یک مقدار حقیقی c همگرا است. c را تعیین و انتگرال را حساب کنید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران - شهریور ماه ۷۰)
۴	انتگرال مجازی $I = \int_2^{\infty} \left(\frac{cx}{x^2 + 1} - \frac{1}{2x+1} \right) dx$ به ازای یک c حقیقی همگرا است. c را تعیین و مقدار انتگرال را حساب کنید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران ۷۱/۶/۷)
۵	در همگرایی یا واگرایی انتگرال مجازی نیز برحسب مقادیر مختلف a بحث کنید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران ۷۱/۱۰/۲۲) $\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+t)}{t^a} dx \quad (a \text{ ثابت حقیقی})$
۶	به ازاء چه مقادیری از k و t انتگرال $\int_0^{\infty} \frac{x^k}{1+x^t} dx$ واگرا است. (دانشکده فنی دانشگاه تهران - ۷۲/۴/۱)
۷	اگر $I_n = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}$ باشد، رابطه ای بین I_n, I_{n+1} را یافته و سپس مقدار I_n را محاسبه کنید. $(n \in \mathbb{N}). \text{ سپس با استفاده از نتیجه حاصل مقدار } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{3x}}{(1+e^{2x})^2} dx \text{ را به دست آورید.}$ (دانشکده فنی دانشگاه تهران - دی ماه ۷۲)
۸	به ازای هر $a \in \mathbb{R}$ اگر $\int_0^{\pi} \frac{dx}{1 - 2a \cos(x) + a^2}$ (ثابت) همگرا باشد مقدار آن را بیابید. (انتگرال پواسون)
۹	به ازای چه مقادیری از $\alpha > 0, \beta < 0$ ، انتگرال غیر عادی $\int_1^{\infty} \frac{(\ln(x))^{\beta}}{x^{\alpha}} dx$ همگراست و به ازای چه مقادیری این انتگرال واگراست؟ چرا؟ (دانشکده فنی دانشگاه تهران - دی ماه ۷۲)
۱۰	یک دستور بازگشتی برای محاسبه I_n به دست آورید. $I_n = \int_0^{\infty} x^n a^{-x} dx$ ($a > 1$ و عدد ثابتی است). سپس مقدار I_n را به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ پیدا کنید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران - خرداد ماه ۷۳)

۱۱	مطلوب است بررسی انتگرال مجازی روبرو: (دانشکده فنی دانشگاه تهران - تابستان ۷۳) $I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 4}}$
۱۲	انتگرال $I = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2x^2 + 1}} - \frac{c}{x+1}$ به ازاء یک مقدار c حقیقی همگراست. C را معین و انتگرال را حساب کنید.
۱۳	ثابت کنید $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$ همگراست و سپس مقدار آن را بیابید. (از مسائل امتحانی دانشگاه صنعتی امیر کبیر)
۱۴	انتگرال مجازی روبرو را بررسی کنید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران - ۷۵/۳/۱۷) $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$
۱۵	مطلوب است محاسبه انتگرال $I = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{dx}{1 + \cos(a)\cos(x)}$ (α ثابت است)
۱۶	حد زیر به ازاء چه مقادیری از b, a برابر ۱ است (b, a ثابت اند) $\lim_{p \rightarrow +\infty} \int_{-p}^p \frac{x^3 + ax^2 + bx}{x^2 + x + 1} dx$
۱۷	انتگرال مجازی $I = \int_0^{+\infty} \frac{x \ln(x)}{(x^2 + 1)^2} dx$ را بررسی کرده و سپس مقدار آن را پیدا کنید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران ۷۶/۳/۱۳)
۱۸	در همگرایی و واگرایی $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln(x))^s}$ بر حسب مقادیر s بحث کنید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران - ۸۱/۴/۹)
۱۹	اگر f تابعی پیوسته بر بازه $[a, b]$ باشد، نشان دهید: $a) \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx \quad b) \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$
۲۰	مطلوب است محاسبه ناحیه واقع در زیر منحنی $y = x^{-2} e^{-\frac{1}{x}}$ و بالای محور x ها در ربع اول
۲۱	به ازای چه مقادیر حقیق k ، مساحت رویه حاصل از دوران منحنی به معادله $y = x^k$ (با شرط $0 < x \leq 1$) حول محور y ها، مقدار معینی دارد.

مسایلی در سری ها

ردیف	سوالات
۱	فاصله و شعاع همگرایی سری توانی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n+1} \frac{(x+3)^n}{2^n}$ را بیابید و در نقاط کرانه بحث کنید.
۲	در همگرایی یا واگرایی سری زیر برحسب مقادیر مختلف S بحث کنید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران ۶۵/۳/۲۷) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n \ln(n))(\ln(\ln(n)))^S}$
۳	همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$ را بررسی کنید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران - شهریور ماه ۱۳۷۰)
۴	فاصله همگرایی سری توانی زیر را به دست آورده و سپس در نقاط کرانه بحث کنید. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n \ln(n)}$ (دانشکده فنی دانشگاه تهران - ۷۱/۴/۳)
۵	فاصله و شعاع همگرایی سری زیر را تعیین کرده و در نقاط کرانه بحث کنید. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n(\ln(n))^2}$ (دانشکده فنی دانشگاه تهران - تابستان ۷۱ - پایان ترم)
۶	فاصله همگرایی سری توانی زیر را پیدا کرده و همگرایی آن را در نقاط کرانه بررسی کنید. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)2^n}$ (دانشکده فنی دانشگاه تهران - تیر ماه ۷۲)
۷	به ازای چه مقادیری از x ، سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n-1)}$ همگراست مجموع سری را به ازای این مقادیر x تعیین کنید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران ۶۵/۳/۲۷)
۸	نوع سری روبرو را بیابید. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2 \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$
۹	مطلوب است تعیین شعاع همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n \ln(n)}{e^n}$ و بحث در نقاط کرانه ای . (دانشکده فنی دانشگاه تهران - ۷۲/۴/۱)
۱۰	فاصله و شعاع همگرایی سری زیر را پیدا کرده و در نقاط کرانه بحث کنید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران ۷۱/۶/۷) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+1)^n}{n^2 + 1}$

۱۱	<p>در یک سری عددی $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ داریم $S_1 = a$, $S_2 = b$ که در آن a, b ثابت و $\{S_n\}$ دنباله مجموع های جزئی سری می باشد</p> <p>و $\sum_{n=1}^{\infty} a_k = S_n = \frac{1}{2}(S_{n-1} + S_{n-2})$ (به ازای $n \geq 3$). با توجه به اینکه $a_n = S_n - S_{n-1}$ ($n \geq 2$) می باشد</p> <p>رابطه بین a_n , a_{n-1} را به ازای $n \geq 3$ به دست آورید. با ذکر دلیل بگوئید که آیا سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست یا نه. در صورت همگرایی مجموع سری را بیابید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران – دی ماه ۷۲)</p>
۱۲	<p>سری مکلورن تابع $f(x) = Ln(1+x)^{1+x} + Ln(1-x)^{1-x}$ را نوشته و شعاع همگرایی و بازه همگرایی سری حاصل را تعیین کنید. سپس مقدار $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n-1)}$ را به کمک نتایج حاصل بیابید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران – دی ماه ۷۲)</p>
۱۳	<p>همگرایی یا واگرایی سری روبرو را بررسی کنید.</p> $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$
۱۴	<p>شعاع و فاصله همگرایی سری زیر را پیدا کنید و درباره همگرایی یا واگرایی سری در نقاط کرانه بحث کنید.</p> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}(x-3)^{n+1}}{n(n+2)}$ <p>(دانشکده فنی دانشگاه تهران – خرداد ماه ۷۳)</p>
۱۵	<p>سه جمله اول غیر صفر سری مکلورن $Ln(1 + \sin(x))$ را به دست آورید. سپس همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} Ln[1 + \sin(\frac{1}{n\sqrt{n}})]$ را مورد بررسی قرار دهید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران – خرداد ماه ۷۳)</p>
۱۶	<p>شعاع و فاصله همگرایی سری زیر را پیدا کرده و در نقاط کرانه بحث کنید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران – تابستان ۷۳)</p> $\sum_{n=0}^{\infty} x^n e^{-\sqrt{n}}$
۱۷	<p>شعاع و فاصله همگرایی سری زیر را پیدا کرده و در نقاط کرانه بحث کنید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران – ۷۳/۱۰/۱۳)</p> $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{n})^{n^2} x^n$
۱۸	<p>همگرایی و واگرایی سری زیر را به ازاء مقادیر مختلف x تعیین کرده و در نقاط کرانه بحث کنید.</p> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)} x^n$
۱۹	<p>شعاع و فاصله همگرایی سری زیر را پیدا کرده و در نقاط کرانه بحث کنید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران – ۷۴/۳/۲۳)</p> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\frac{x}{2})^n (2n)!}{(n!)^2}$

۲۰	<p>شعاع همگرایی سری توانی زیر را حساب کنید و در همگرایی یا واگرایی آن در نقاط کرانه بحث کنید.</p> <p>(دانشکده فنی دانشگاه تهران - ۷۴/۱۰/۱۲)</p> $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln(n)}{n+1} x^n$
۲۱	<p>در همگرایی و یا واگرایی سری زیر به ازاء مقادیر p بحث کنید.</p> <p>(دانشکده فنی دانشگاه تهران - ۷۴/۵/۲۸)</p> $\sum_{n=2}^{\infty} n^p \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$
۲۲	<p>همگرایی یا واگرایی سری زیر را به ازای مقادیر مختلف $k \in R$ بررسی کنید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران - ۷۴/۱۰/۱۲)</p> $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^k}$
۲۳	<p>فاصله و شعاع همگرایی سری زیر را پیدا کرده و در نقاط کرانه بحث کنید.</p> $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 2n} x^{2n+1}$
۲۴	<p>سری زیر مفروض است. همگرایی مطلق یا مشروط آن را بررسی کنید.</p> $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{Arc} \tan\left(\frac{1}{2n+1}\right)$
۲۵	<p>فاصله و شعاع همگرایی سری زیر را پیدا کرده و در نقاط کرانه بحث کنید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران - ۷۵/۳/۱۷)</p> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} x^{2n}}{2n}$
۲۶	<p>فاصله و شعاع همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} (x-1)^n$ را پیدا کرده و در نقاط کرانه بحث کنید.</p> <p>(دانشکده فنی دانشگاه تهران ۷۶/۳/۱۳)</p>
۲۷	<p>فاصله و شعاع همگرایی سری زیر را پیدا کرده و در نقاط کرانه بحث کنید.</p> <p>(دانشکده فنی دانشگاه تهران - نیمسال دوم ۷۶-۷۷)</p> $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{3^n (1 + \sqrt{n})}$
۲۸	<p>مقدار سری روبرو را حساب کنید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران ۸۱/۴/۹)</p> $S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n+1)}{n(n+1)}$
۲۹	<p>تحقیق کنید سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2}$ همگرا است یا واگرا.</p>
۳۰	<p>به ازای چه مقادیر از X سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)! x^n}{2^{2n} (n!)^2}$ همگرای مطلق یا همگرای مشروط یا واگرا می باشد.</p>

<p>فرض کنید تابع $f(x)$ به صورت زیر داده شده باشد.</p> $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k} k!}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x + \frac{2}{3} x^3 + \frac{4}{3 \times 5} x^5 + \frac{8}{3 \times 5 \times 7} x^7 + \dots$ <p>(a) شعاع همگرایی این سری را به دست آورید.</p> <p>(b) نشان دهید $f'(x) = 1 + 2xf(x)$.</p> <p>(c) مشتق عبارت $e^{-x^2} f(x)$ را پیدا کنید.</p> <p>(d) $f(x)$ را به صورت یک انتگرال بیان کنید.</p>	۳۱
<p>فاصله و شعاع همگرایی سری زیر را پیدا کرده و در نقاط کرانه بحث کنید.</p> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \left(\frac{3x+2}{-5} \right)^n$	۳۲

مسایلی در سری ها

ردیف	سوالات
۱	با استفاده از بسط حد روبرو را حساب کنید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران ۲۴ آذر ماه ۶۳) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin(2x)} - e^{\sin(x)}}{x}$
۲	چند جمله ای $p(x)$ از کوچکترین درجه را چنان پیدا کنید که وقتی $x \rightarrow 0$ داشته باشیم: $\sin(x - x^2) = p(x) + o(x^6)$ (دانشکده فنی دانشگاه تهران ۶۹/۱۰/۲۵)
۳	اگر $f(t) = \frac{\sin(t)}{t}$, $f(0) = 1$ باشد مطلوبست $f^{(n)}(0)$ به ازای هر عدد طبیعی n (دانشکده فنی دانشگاه تهران ۷۱/۱۰/۲۲)
۴	ثابت های a, b را طوری پیدا کنید که داشته باشیم. (دانشکده فنی دانشگاه تهران - تابستان ۷۱-پایان ترم) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{bx - \sin(x)} \int_0^x \frac{t^2 dt}{\sqrt{a+t}} = 1$
۵	چند جمله ای با کمترین درجه $f(x)$ را طوری پیدا کنید که داشته باشیم: (دانشکده فنی دانشگاه تهران ۷۱/۴/۳) $a^{\sin(x)} = P(x) + O(x^3), (x \rightarrow 0), (a > 0)$
۶	با استفاده از بسط تیلور حد زیر را حساب کنید. $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{(1+x)^{1/x}}{e} \right]^{1/x}$
۷	بسط مکلورن تابع $f(x) = \ln(\sqrt{1-x^2})^x$ را بیابید.
۸	بسط عبارت $a^{\cos(x)}$ را حول نقطه صفر تا درجه چهار به دست آورید؟ (دانشکده فنی دانشگاه تهران ۷۲/۲/۱۹)
۹	حد زیر را حساب کنید: (دانشکده صنعتی شریف ۷۲/۸/۲۷) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/x} - e}{x}$
۱۰	بسط مکلورن تابع $f(x) = (1+x)^x$ را تا توان سوم X بنویسید.
۱۱	تقریب تیلور درجه چهار را برای تابع f در مجاورت $x=0$ به دست آورید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران ۷۱/۸/۲۴) $f(x) = \cos(\sin(x))$
۱۲	بسط مکلورن تابع $f(x) = \ln(\cos(x))$ را تا مرتبه ۴ بنویسید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران شهریور ماه ۷۲) $(\cos(x) > 0)$

۱۳	بسط تیلور تابع $f(x) = \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$ را حول $x = 0$ تا جمله x^6 بنویسید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران ۷۴/۵/۲۸)
۱۴	حد روبرو را با استفاده از بسط حساب کنید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران - ۷۴/۳/۲۳) $\lim_{x \rightarrow 0^-} (1 - 2^x)^{\sin(x)}$
۱۵	با استفاده از بسط تیلور مطلوب است: (دانشکده فنی دانشگاه تهران - ۷۴/۱۰/۱۲) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2 - 2\cos(x)} - \frac{1}{x^2} \right)$
۱۶	با استفاده از بسط تیلور حد روبرو را به دست آورید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران - ۷۵/۲/۱۱) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \cot^2(x) \right)$
۱۷	با استفاده از بسط تیلور حد زیر را به دست آورید. $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\ln(x + \sqrt{1 + x^2})} - \frac{1}{\ln(1 + x)} \right]$
۱۸	بسط تابع $f(x) = (1 + x)^{1/x}$ را در همسایگی صفر تا مرتبه چهارم به دست آورید.
۱۹	با استفاده از بسط، مقدار a را طوری تعیین کنید که مقدار حد زیر متناهی باشد. سپس به ازاء a به دست آمده مقدار حد را محاسبه کنید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران ۷۵/۱۰/۱۱) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^x - x}{x^2}$
۲۰	چند جمله ای درجه سوم $P(x)$ را چنان بیابید که داشته باشیم: (دانشکده فنی دانشگاه تهران ۷۶/۳/۱۳) $(x + 1)\cos(x) = P(x) + O(x - 2)^3$
۲۱	ثابت کنید وقتی $x \rightarrow 0$ داریم: $(1 + x)^c = 1 + cx + o(x)$ سپس با استفاده از آن مطلوب است: (دانشکده فنی دانشگاه تهران - ۷۶/۳/۱۳) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(x^4 + x^2)^{1/2} - x^2 \right]$
۲۲	حد زیر را با استفاده از بسط توابع به دست آورید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران - ۸۰/۶/۱۰) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 + x)^{\frac{\ln(x)}{x}} - x}{x^2 \ln(x)}$
۲۳	حدود زیر را با استفاده از بسط پیدا کنید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران ۸۱/۴/۹) الف - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin(x)) - \cos(x)}{x^4}$ ب - $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\text{Arc sin}(x)}{x} \right)^{1/x^2}$
۲۴	چند جمله ای تیلور درجه ۵ تابع $\sin(\sin(x))$ را در نقطه $x = 0$ به دست آورده و سپس با استفاده از آن حد زیر را بیابید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران - آبان ماه ۸۱) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin(x)) - x\sqrt[3]{1 - x^2}}{x^5}$

۲۵	فرمول تیلور را برای $f(x) = e^{-x}$ حول $x = 0$ نوشته و سپس عدد $\frac{1}{e}$ را تا ۵ رقم اعشار حساب کنید.
۲۶	با ترکیب چندجمله‌ای تیلور برای $\ln(1+x)$ و $\ln(1+x)$ حول $x = 0$ ، مطلوب است بسط تیلور از درجه $(2n+1)$ حول صفر برای تابع $\tanh^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$
۲۷	بسط تیلور تابع $\sin^2(x)$ را حول $x = 0$ طوری پیدا کنید که درجه چندجمله‌ای حاصل برابر ۶ باشد، سپس با استفاده از آن حد زیر را به دست آورید. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x \sin^2(x) - 3x^2 + x^4}{x^6}$
۲۸	چندجمله‌ای درجه چهار حاصل از بسط مکلاورن تابع $f(x) = \sqrt{1 + \sin(x)}$ را به دست آورید.
۲۹	مقدار حد زیر را بیابید: (دانشکده فنی دانشگاه تهران - ۸۳/۳/۲۱) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin(x)) - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{x^4}$