

حد و پیوستگی

هر یک از تساویهای زیر را ثابت کنید:

$$\begin{array}{ll} ۱) \lim_{x \rightarrow ۱} (۳x^۲ - ۵x) = -۲ & ۲) \lim_{x \rightarrow ۲} (۶x + ۱) = ۱۳ \\ ۳) \lim_{x \rightarrow ۲} \frac{۵x + ۱}{۱ - x} = -۱۱ & ۴) \lim_{x \rightarrow ۱} \frac{x - ۱}{\sqrt{x} - ۱} = ۲ \end{array}$$

ثابت کنید:

$$\begin{array}{ll} ۱) \lim_{x \rightarrow ۰} \frac{x - ۱}{x^۲} = -\infty & ۲) \lim_{x \rightarrow -\infty} (۱ + ۲^x) = ۱ \\ ۳) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^۲}{۱ - ۲^x} = +\infty & ۴) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{۱ - \sqrt{x + ۱}} = -\infty \end{array}$$

مقدار هر یک از حدود زیر را محاسبه کنید

$$\begin{array}{ll} ۱) \lim_{x \rightarrow -۲} \left(\sqrt{x^۲ + ۵} - \sqrt[۳]{۴x} \right) & ۲) \lim_{x \rightarrow ۰} \ln(\cos^۲(\ln^۲(x^۲ + x + ۱))) \\ ۳) \lim_{x \rightarrow ۱} \operatorname{arctanh} \left(\frac{x + ۱}{۲x + ۱} \right) & ۴) \lim_{x \rightarrow ۰} \sqrt{۱ + \sqrt{۱ + \sqrt{۱ + \sqrt{۱ + x}}}} \\ ۵) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(۱ + \frac{۳}{۲x} \right)^{x/۲-۱} & ۶) \lim_{x \rightarrow ۰} \frac{\sqrt{x^۲ + x + ۱} - ۱}{x} \end{array}$$

$$۷) \lim_{x \rightarrow ۱} \frac{\sqrt[۷]{x-۱} + ۲x}{x^۷ + ۱}$$

$$۹) \lim_{x \rightarrow -۱} \sin^۷(\pi x^۷)$$

$$۱۱) \lim_{x \rightarrow ۰} \frac{\tan x}{x}$$

$$۱۳) \lim_{x \rightarrow ۰} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^۷ x}$$

$$۱۵) \lim_{x \rightarrow ۰} \frac{\cosh x - ۱}{\sin^۷ x}$$

$$۱۷) \lim_{x \rightarrow ۰} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{x}$$

$$۱۹) \lim_{x \rightarrow -۱} \frac{\sqrt[۷]{x} + ۱}{x + ۱}$$

$$۸) \lim_{x \rightarrow ۲} \frac{x^۷ + ۳x - ۱}{x^۷ - ۳x + ۱}$$

$$۱۰) \lim_{x \rightarrow ۳} (\Delta x^۷ - ۳x + ۱)$$

$$۱۲) \lim_{x \rightarrow ۰} \frac{\cos x - \cos(۳x)}{x^۷}$$

$$۱۴) \lim_{x \rightarrow ۰} \frac{\sinh x}{x}$$

$$۱۶) \lim_{x \rightarrow ۰} (۱ + ۲x)^{۳/x}$$

$$۱۸) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{۲x - ۱}{۲x + ۱} \right)^x$$

$$۲۰) \lim_{x \rightarrow ۰} \frac{\ln(\cos x)}{x^۷}$$

مقدار هریک از حدود زیر را بدست آورید:

$$۱) \lim_{x \rightarrow ۱} \frac{۴x^{\Delta} + ۹x + ۷}{۳x^۷ + x^۷ + ۱}$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow -۱} \frac{\sqrt[۷]{x} + ۱}{\sqrt[5]{x} + ۱}$$

$$۵) \lim_{x \rightarrow ۰+} \frac{\arccos(۱-x)}{\sqrt{x}}$$

$$۷) \lim_{x \rightarrow ۰} \left(\frac{\cos x}{\cos(۳x)} \right)^{۱/x^۷}$$

$$۹) \lim_{x \rightarrow ۰+} \sqrt[x]{\cos \sqrt{x}}$$

$$۱۱) \lim_{x \rightarrow ۰} (x + e^x)^{۱/x}$$

$$۱۳) \lim_{x \rightarrow -۱} \frac{x + ۱}{\sqrt[۷]{x^۷ + ۳} + ۳x}$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow ۲} \frac{\sqrt[۷]{۱^{\circ} - x} - ۲}{x - ۲}$$

$$۴) \lim_{x \rightarrow ۱} \left(\frac{۱+x}{۲+x} \right)^{\Delta}$$

$$۶) \lim_{x \rightarrow \pi/۴} \frac{\ln(\tan x)}{۱ - \cot x}$$

$$۸) \lim_{x \rightarrow \pi/۳} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{۴})}{۱ - ۲ \cos x}$$

$$۱۰) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(۱ + ۳^x)}{\ln(۱ + ۲^x)}$$

$$۱۲) \lim_{x \rightarrow \infty} \arcsin \left(\frac{۱-x}{۱+x} \right)$$

$$۱۴) \lim_{x \rightarrow ۰} \frac{\sqrt[۷]{۹ + \Delta x + ۴x^۷} - ۳}{x}$$

۳

$$\begin{aligned}
 ۱۵) \quad \lim_{x \rightarrow ۱} \frac{\sqrt{x+۸} - \sqrt{۸x+۱}}{\sqrt{۵-x} - \sqrt{۷x-۳}} & \quad ۱۶) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{x^۳}{۳x^۳-۴} - \frac{x^۳}{۳x+۲} \right\} \\
 ۱۷) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left\{ \sqrt{۲x^۳-۳} + ۵x \right\} & \quad ۱۸) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{x^۳+۱} - x \right) \\
 ۱۹) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{۲x^۳+۳}{۲x^۳+۵} \right)^{۸x^۳+۳} & \quad ۲۰) \quad \lim_{x \rightarrow ۰} \left(\frac{۱+\tan x}{۱+\sin x} \right)^{۱/\sin x} \\
 ۲۱) \quad \lim_{x \rightarrow ۰} \frac{x^۳}{\sqrt[۵]{۱+۵x} - (۱+x)} & \quad ۲۲) \quad \lim_{x \rightarrow ۰} \frac{\sqrt[m]{۱+\alpha x} - \sqrt[n]{۱+\beta x}}{x} \\
 ۲۳) \quad \lim_{x \rightarrow ۰} \left(\frac{a^x + b^x + c^x}{۳} \right)^{۱/x} & \quad ۲۴) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^۳+۲x+۱}{۲x^۳-۳x+۲} \right)^{۱/x} \\
 ۲۵) \quad \lim_{x \rightarrow ۰} \frac{\ln(۱+\sqrt{x}+\sqrt[۳]{x})}{\ln(۱+\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۴]{x})} & \quad ۲۶) \quad \lim_{x \rightarrow ۰} \frac{\cos(xe^x) - \cos(xe^{-x})}{x^۳} \\
 ۲۷) \quad \lim_{x \rightarrow ۰} \frac{\ln(\cosh x)}{\ln(\cos x)} & \quad ۲۸) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left\{ \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x} \right\} \\
 ۲۹) \quad \lim_{x \rightarrow ۱} \frac{(۱-\sqrt{x})(۱-\sqrt[۳]{x}) \cdots (۱-\sqrt[n]{x})}{(۱-x)^{n-۱}} & \\
 ۳۰) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \{ \sqrt[n]{(x+a_۱)(x+a_۲) \cdots (x+a_n)} - x \} &
 \end{aligned}$$

(۳۱) نشان دهید که اگر ضرایب a_n و b_m در تابع

$$f(x) = \frac{a_n x^n + \cdots + a_۱ x + a_۰}{b_m x^m + \cdots + b_۱ x + b_۰}$$

مخالف صفر باشد، در این صورت

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \begin{cases} \infty & n > m \text{ اگر} \\ a_n/b_m & n = m \text{ اگر} \\ ۰ & n < m \text{ اگر} \end{cases}$$

هر یک از حدود یکطرفه زیر را محاسبه کنید:

$$\begin{aligned}
 ۱) \quad \lim_{x \rightarrow ۱-} \frac{x^۳-۱}{|x-۱|} & \quad ۲) \quad \lim_{x \rightarrow ۱+} \frac{x^۳-۱}{|x-۱|}
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll}
۳) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1 - \cos(2x)}}{x} & ۴) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1 - \cos(2x)}}{x} \\
۵) \lim_{x \rightarrow 1^-} \arctan\left(\frac{1}{1-x}\right) & ۶) \lim_{x \rightarrow 1^+} \arctan\left(\frac{1}{1-x}\right) \\
۷) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + e^{1/x}} & ۸) \lim_{x \rightarrow 0^-} x[1/x] \\
۹) \lim_{x \rightarrow 0^-} x\sqrt{|\cos(1/x)|} &
\end{array}$$

حدود یکطرفه زیر را محاسبه کنید:

$$\begin{array}{ll}
۱) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|\sin x|}{x} & ۲) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|\sin x|}{x} \\
۳) \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + |x|)^{1/x} & ۴) \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 + |x|)^{1/x}
\end{array}$$

حد چپ و راست هریک از توابع داده شده را در تمام نقاطی که ضابطه تابع تغییر نموده است محاسبه کنید:

$$\begin{array}{ll}
۵) f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 1 & \text{اگر } x < 0 \\ (x+2)/(2x+1) & \text{اگر } 0 \leq x \leq 1 \\ \sin(\pi/x) & \text{اگر } 1 < x \end{cases} \\
۶) f(x) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } x \leq 0 \\ e^{1/x} & \text{اگر } 0 < x < 1 \\ (1 + 1/x)^x & \text{اگر } 1 \leq x \end{cases} \\
۷) f(x) = [x^2] & ۸) f(x) = \sqrt{x} - [\sqrt{x}] \\
۹) f(x) = (-1)^{[x^2]} & ۱۰) f(x) = \operatorname{sgn}(\sin x)
\end{array}$$

هر یک از حدود زیر را محاسبه کنید:

$$\begin{array}{ll}
۱) \lim_{x \rightarrow 0} x\sqrt{|\cos(1/x)|} & ۲) \lim_{x \rightarrow 0} x[1/x]
\end{array}$$

$$(۳) \lim_{x \rightarrow +\infty} 1/x \sin(1/x)$$

$$(۴) \lim_{x \rightarrow 0+} x \ln^2 x$$

(۱) ثابت کنید $f(x) = x \operatorname{Dri}(x)$ در تمام نقاط $x_0 \neq 0$ فاقد حد است و حد آن در $x_0 = 0$ موجود و برابر صفر می‌باشد.

(۲) ثابت کنید که تابع زیر در همه نقاط مجموعه $\mathbb{Z} - \{0\}$ فاقد حد است:

$$f(x) = \begin{cases} \cot^2(\pi x) & x \notin \mathbb{Z} \text{ اگر} \\ 0 & x \in \mathbb{Z} \text{ اگر} \end{cases}$$

(۱) ثابت کنید که تابع $f(x) = \operatorname{sgn}(x^2 - 3x + 2)$ در نقاط $x = 1$ و $x = 2$ حد ندارد.

(۲) نشان دهید که تابع $\operatorname{sgn}(\sin(x))$ در مضارب π حد ندارد. یعنی، در نقاط مجموعه $\pi\mathbb{Z} = \{n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$ حد ندارد.

(۱) نشان دهید که تابع $f(x) = [1/x]$ در $x_0 = 0$ حد ندارد.
(۲) * نشان دهید که تابع زیر در تمام نقاط گنگ فاقد حد است:

$$f(x) = \begin{cases} \sin^m(x\pi) & (m, n) = 1 \text{ و } x = m/n \in \mathbb{Q} \text{ اگر} \\ 1 & x \notin \mathbb{Q} \text{ اگر} \end{cases}$$

در مورد هریک از توابع زیر، پیوستگی و یا عدم پیوستگی تابع داده شده را در تمام نقاط ممکن بررسی کنید:

$$\begin{array}{ll}
۱) \quad y = x^{\sqrt{}} & ۲) \quad y = \sqrt{x} \\
۳) \quad y = \arcsin(x^{\sqrt{}}) & ۴) \quad y = \frac{1}{x^{\sqrt{}} + x} \\
۵) \quad y = \frac{\sin x}{|x|} & ۶) \quad y = \cot\left(\frac{\pi}{x}\right) \\
۷) \quad y = x \lfloor 1/x \rfloor & ۸) \quad y = e^{x + 1/x} \\
۹) \quad y = \tanh\left(\frac{\sqrt{x}}{1 - x^{\sqrt{}}}\right) & ۱۰) \quad y = \sin(\cos^{\sqrt{}}(\tan^{\sqrt{}} x)) \\
۱۱) \quad y = ((x)) = x - [x] & ۱۲) \quad y = \operatorname{sgn}(\sin x) \\
۱۳) \quad y = \frac{\cos(1/x)}{\cos(1/x)} & ۱۴) \quad y = \sqrt{\frac{1 - \cos \pi x}{4 - x^{\sqrt{}}}} \\
۱۵) \quad y = \arctan\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}\right) & ۱۶) \quad y = \left\lfloor \frac{1}{x^{\sqrt{}}} \right\rfloor \operatorname{sgn}\left(\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right) \\
۱۷) \quad y = \begin{cases} x^{\sqrt{}} & x \in \mathbb{Q} \text{ اگر} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \text{ اگر} \end{cases} & ۱۸) \quad y = \begin{cases} \cos(\pi x/2) & |x| \leq 1 \text{ اگر} \\ |x-1| & |x| > 1 \text{ اگر} \end{cases} \\
۱۹) \quad y = \begin{cases} \sin(\pi x) & x \in \mathbb{Q} \text{ اگر} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \text{ اگر} \end{cases} & ۲۰) \quad y = \begin{cases} x - \sqrt{x} & |x| \leq 1 \text{ اگر} \\ 1/x & |x| > 1 \text{ اگر} \end{cases}
\end{array}$$

توابع زیر در $x_0 = 0$ تعریف نمی‌شوند. در هر مورد نشان دهید که ناپیوستگی تابع داده شده در x_0 رفع‌شدنی است، سپس با تعریف مناسب $f(x_0)$ ، ناپیوستگی آن را رفع کنید:

$$\begin{array}{ll}
۲۱) \quad f(x) = (1+x)^{1/x}, & *۲۲) \quad f(x) = \sqrt{x}|x|^x, \\
۲۳) \quad f(x) = \frac{1}{x^{\sqrt{}}} e^{-1/x^{\sqrt{}}}, & ۲۴) \quad f(x) = \sin x \sin\left(\frac{1}{x}\right).
\end{array}$$

(۲۵) A و B را طوری تعیین کنید که تابع زیر بر \mathbb{R} پیوسته باشد:

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{x} \sin x & x \leq -\pi/2 \text{ اگر} \\ A \sin x + B & -\pi/2 \leq x \leq \pi/2 \text{ اگر} \\ \cos x & \pi/2 \leq x \text{ اگر} \end{cases}$$

(۲۶) فرض کنید x_1, x_2, \dots, x_n اعداد حقیقی دلخواه و متفاوت باشند، تابعی با دامنه \mathbb{R} مثال بریزید که تنها در این نقاط پیوسته باشد.

(۱) ثابت کنید که تابع

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{اگر } -1 \leq x \leq 0 \\ 0 & \text{اگر } x = 0 \\ x-1 & \text{اگر } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

بر تمام بازه $[-1; 1]$ پیوسته است بجز در نقطه $x = 0$ ، و بر بازه $[-1; 1]$ نه ماکزیمم دارد و نه مینیموم.

(۲) ثابت کنید که تابع

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{اگر } -1 \leq x \leq 0 \\ -x & \text{اگر } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

بر تمام بازه $[-1; 1]$ بجز در $x = 0$ پیوسته است، ولی همچنان دارای ماکزیمم و مینیموم بر آن بازه می‌باشد.

(۳) نشان دهید که تابع

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^{2^{(-1/|x|+1/x)}} & \text{اگر } x \neq 0 \\ 0 & \text{اگر } x = 0 \end{cases}$$

بر بازه $[-1; 2]$ دارای خاصیت مقدار میانی است (یعنی، اگر دو مقدار را اختیار کند، آنگاه همه مقادیر آن دو را نیز اختیار خواهد کرد)، در حالی که بر $[-2; 2]$ پیوسته نیست.

(۴) فرض کنید $y = f(x)$ بر بازه $[a; b]$ یکنوا است و تمام مقادیر بین $f(a)$ و $f(b)$ را اختیار می‌کند. ثابت کنید که $y = f(x)$ بر بازه $[a; b]$ پیوسته است.

(۵) نشان دهید که اگر $P(x)$ یک چند جمله‌ای از درجه زوج باشد و در لااقل یک نقطه x_0 ای $P(x_0)$ دارای علامتی مخالف با علامت ضریب بزرگترین توان در $P(x)$ باشد، آنگاه $P(x)$ حداقل یک ریشه دارد.

(۶) نشان دهید که تابع

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-1-x} & \text{اگر } x \leq -1 \\ -\sqrt{x-1} & \text{اگر } 1 < x \end{cases}$$

بر بازه $[-1; 1] - [-2; 2]$ پیوسته و معکوس‌پذیر است ولی معکوس آن پیوسته نیست.

تمرینات فصل حد و پیوستگی

۱- با استفاده از تعریف حد ثابت کنید حد تابع $f(x) = \begin{cases} 3x-1 & , x > 1 \\ 4x-2 & , x < 1 \end{cases}$ وقتی که $x \rightarrow 1$ برابر 2 است.

۲- با استفاده از تعریف حد ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^4 - 6x^2 + x^2 + 3}{x-1} = -8$

۳- حاصل حد زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[2]{x}) \dots (1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$$

۴- مقدار حد زیر را حساب کنید.

$$A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sum_{k=1}^n x^k - n}{x-1}$$

۵- مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که تابع $f(x) = \frac{x^2+1}{x+1} - ax - b$ در بی‌نهایت حدی برابر صفر داشته باشد.

۶- هرگاه $f: (a, +\infty) \rightarrow R$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} xf(x)$ موجود باشد، ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow \infty} xf(x) = 0$.

۷- هرگاه تابع f روی $[a, b]$ پیوسته و x_1, x_2, \dots, x_n مقادیری دلخواه از این بازه باشند، در این صورت نشان دهید:

$$\exists \alpha \in (a, b); f(\alpha) = \frac{1}{n} (f(x_1) + \dots + f(x_n))$$

۸- نقاط ناپیوستگی تابع $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{1 + (2 \sin x)^{2n}}$ را بیابید.

۹- هرگاه f و g توابع حقیقی پیوسته روی $[a, b]$ باشند و $f(x) < g(x)$ ، ثابت کنید:

$$\exists A \in R^+ \quad \forall x \in [a, b]; f(x) + A \geq g(x)$$

۱۰- فرض کنید f روی $\{a, b\}$ پیوسته باشد و به ازای $a < x_1 < x_2 < b$ داشته باشیم

$$f(a) > f(x_1) < f(x_2) < f(b)$$

نشان دهید وجود دارد $c \in (a, b)$ به طوری که

$$2f(c) = f(x_1) + f(x_2)$$

$$\exists c \in [a, b]; \alpha f(a) + \beta f(b) = (\alpha + \beta)f(c), \quad \alpha, \beta \in R$$

۱۲- ثابت کنید که معادله زیر حداقل دو ریشه حقیقی دارد. $a, b, c \in R$

$$(x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a) = 0$$

۱۳- هرگاه a, b, c و d و λ ($\lambda \neq 0$) اعدادی حقیقی باشند و $a < b < c < d$ ، ثابت

$$\text{کنید معادله } (a-x)(c-x) + \lambda(x-b)(x-d) = 0 \text{ ریشه‌ای حقیقی دارد.}$$

۱۴- مطلوب است محاسبه حد زیر که در آن n عددی طبیعی است:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x}.$$

۱۵- در صورتی که تابع f در نقطه β پیوسته باشد، ثابت کنید که

$$\lim_{x \rightarrow \beta} f(2x - \beta) = f(\beta).$$

۱۶- در صورتی که تابع f با ضابطه زیر تعریف شده باشد:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - e^{-x}}{e^{2x} - e^{-2x}}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

تحقیق کنید که آیا تابع f در نقطه $x = 0$ پیوسته است؟

۱۷- در صورتی که تابع f با ضابطه زیر تعریف شده باشد:

$$f(x) = \begin{cases} |x - [x]|, & [x] \text{ زوج} \\ |x - [x+1]|, & [x] \text{فرد} \end{cases}$$

نمودار تابع f را رسم کرده و مشخص کنید که f در چه نقاطی ناپیوسته است.

۱۸- با استفاده از تعریف حد نشان دهید که

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \left[\frac{1}{x^n} \right] = 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

۱۹- نشان دهید که:

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(-1)^{[x]+1}}{x^2 - 4} = -\infty$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}) = 0$$

۲۰- حدود زیر را، بدون استفاده از دستور هوپیتال محاسبه کنید:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 1}{2^n} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n-1}}{2^n} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{2^{n+1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x} \quad (\text{ب})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{x} \quad (\text{ج})$$

۲۱- حدود زیر را ، بدون استفاده از دستور هوپیتال محاسبه کنید:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_{10}(1+x)}{10^x - 1} \quad (\text{الف})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{\sqrt{1+x} - 1} \quad (\text{ب})$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[5]{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1} \quad (\text{ج})$$

۲۲- ثابت کنید که اگر $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ و $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$ آنگاه

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = A^B .$$

۲۳- فرض کنیم که $g(x) = (x-1)[x]$, $(0 \leq x \leq 2)$ ،

الف) نمودار تابع g را رسم کنید.

ب) آیا $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ موجود است ؟

ج) آیا g در $x = 1$ پیوسته است؟

۲۴- حدود زیر را ، بدون استفاده از دستور هوپیتال محاسبه کنید:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} \quad (\text{ب}) \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}} \quad (\text{الف})$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x (\ln(2+x) - \ln x) \quad (\text{د}) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{x - 1} \quad (\text{ج})$$

۲۵- حدود زیر را ، بدون استفاده از دستور هوپیتال محاسبه کنید:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 3}}{\sqrt[3]{x^3 + 1}} \quad (\text{ب}) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right] \quad (\text{الف})$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{x}{m} \right)^m, m \in \mathbb{N} \quad (\text{د}) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x (\sqrt{x^2 + 1} - x) \quad (\text{ج})$$

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1} \right)^{x+1} \quad (\text{و}) & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+x) - \sin(a-x)}{x} \quad (\text{ه}) \\ & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\sin \alpha x - \sin \beta x} \quad (\text{ز}) & \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \cos x)^{3 \sec x} \quad (\text{ح}) \end{aligned}$$

۲۶- با استفاده از تعریف حد توابع ثابت کنید که :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty, \quad (a > 1) \quad (\text{الف})$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0 \quad (\text{ب})$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = 2 \quad (\text{ج})$$

۲۷- مطلوب است محاسبه حدود زیر:

$$\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e} \quad (\text{ب})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{3^x - 1} \quad (\text{الف})$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{(1-\sqrt{x})/(1-x)} \quad (\text{د})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{\tan x} \quad (\text{ح})$$

۲۸- مطلوب است محاسبه حدود زیر:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1-2x}{\sqrt[3]{1+8x^3}} + 2^{-x^2} \right) \quad (\text{ب})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + 4 \tan x}{2-x-2x^4} \quad (\text{الف})$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/4} (\sin 2x)^{\tan^2 2x} \quad (\text{د})$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{\tan^3 x - 3 \tan x}{\cos(x + \pi/6)} \quad (\text{ح})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin x} \ln(1 + a \sin x) \quad (\text{و})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}} \quad (\text{ه})$$

۲۹- پیوستگی توابع زیر را بررسی کنید:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & , x \neq 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases} \quad (\text{الف})$$

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(1/x) & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases} \quad (\text{ب})$$

$$f(x) = \begin{cases} 4 \cdot 3^x & , x < 0 \\ 2a + x & , x \geq 0 \end{cases} \quad \text{ج}$$

۳۰- با استفاده از تعریف حد، پیوستگی توابع زیر را بررسی کنید:

$$f(x) = ax + b \quad , a \neq 0 \quad \text{الف}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \text{ منطقی} \\ -x^2 & , x \text{ اصم} \end{cases} \quad \text{ب}$$

۲۲. فرض کنید

$$f(x) = \begin{cases} -|x+1|, & x < 0 \\ |x-1|, & x > 0 \end{cases}$$

که در آن $f(0)$ تعریف نشده است. $f(0)$ چگونه تعریف شود که f از راست در $x=0$ پیوسته شود؟ از چپ در $x=0$ پیوسته شود؟
فرض کنید حدود راست و چپ تابعی در نقطه a موجود و نامساوی باشند. در این صورت کمیت

$$J = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

جهش f در a نام دارد، و گویند f در a ناپیوستگی جهشی دارد. مثلاً، هر ناپیوستگی تابع بزرگترین عدد صحیح $[x]$ ، که در شکل ۴۴ رسم شده، یک ناپیوستگی جهشی است، و جهش در هر نقطه ناپیوستگی $x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ دارای مقدار یکسان ۱ می باشد.
۲۳. جهش تابع

$$f(x) = \frac{J}{2} \frac{|x-a|}{x-a}$$

چیست و در چه نقطه ای رخ می دهد؟

۲۴. نشان دهید که ناپیوستگی جهشی نمی تواند قابل رفع باشد (ر.ک. مسئله ۱۵، صفحه ۱۲۹).

۲۵. ناپیوستگیهای تابع $f(x) = [x] + [-x]$ را بیابید. آیا اینها ناپیوستگی جهشی اند؟ آیا قابل رفع اند؟

۲۶. جهشهای تابع

$$f(x) = \begin{cases} 3x, & x < 1 \\ 0, & x = 1 \\ x, & 1 < x < 3 \\ 4, & x \geq 3 \end{cases}$$

را بیابید.

۲۷. به فرض آنکه

$$f(x) = \begin{cases} -2 \sin x, & x < -\pi/2 \\ a \sin x + b, & -\pi/2 \leq x \leq \pi/2 \\ \cos x, & x > \pi/2 \end{cases}$$

چه a و b ای تابع f را همه جا پیوسته می سازند؟

۲۸. نشان دهید که بزرگترین عدد صحیح $[x]$ از x دارای $\lim_{x \rightarrow a} [x] = [a]$ است.

فادیر زیر را بیابید.

$$\begin{array}{lll} ۱. [-\pi] & ۲. [\pi^2] & ۳. [\sqrt{2} - \sqrt{3}] \\ ۴. [(1/2)^4] & ۵. [(1.1)^{10}] & ۶. [(-1/11)^{13}] \end{array}$$

حد داده شده را (در صورت وجود) بیابید.

$$\begin{array}{ll} ۷. \lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{x-1} & ۸. \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x-1} \\ ۹. \lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{x-1} & ۱۰. \lim_{x \rightarrow 0^+} x \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} ۱۱. \lim_{x \rightarrow 0^+} x \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1} & ۱۲. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{\sqrt{x}} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} ۱۳. \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{[x]}{x} & ۱۴. \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{[x]}{x} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} ۱۵. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[x]}{x} & ۱۶. \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{[x]}{x} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} ۱۷. \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{[x]}{x} & ۱۸. \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{[x]}{x} \end{array}$$

۱۹. حدود یکطرفه تابع

$$f(x) = \frac{x+x^2}{|x|} \quad (x \neq 0)$$

در $x=0$ را بیابید.

۲۰. حدود یکطرفه تابع

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < 2 \\ 1.1x, & x \geq 2 \end{cases}$$

در $x=2$ را بیابید.

۲۱. به فرض آنکه

$$f(x) = \begin{cases} 3x, & 0 \leq x < 1 \\ 2-x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

دو بازه یا نقاط انتهایی ۰ و ۱ بیابید که f بر آنها پیوسته باشد. نشان دهید که f

بر هر بازه یا نقاط انتهایی ۰، ۱ پیوسته است.

تابع پیوسته، f بازه، باز $(\delta, \frac{1}{2} + \delta)$ را به روی بازه، بسته، $[-1, 1]$ می نگارد.

مسائل

- هرگاه $f(x) = 1/x$ ، آنگاه $f(-1) = -1$ و $f(1) = 1$ ، ولی f مقدار صفر را بین $x = -1$ و $x = 1$ نمی گیرد. چرا این با قضیه، مقدار میانی تعارضی ندارد؟
- نشان دهید که معادله، $8x^3 - 12x^2 - 2x + 3 = 0$ ریشه‌ای مانند r_1 بین -1 و 0 ، ریشه‌ای مانند r_2 بین 0 و 1 ، و ریشه‌ای مانند r_3 بین 1 و 2 دارد. با حاشانی، $x = 2$ ، مقادیر دقیق این ریشه‌ها را بیابید. آیا ریشه‌های دیگری نیز وجود دارند؟
- در مثال ۱ به تنصیف تقریب $\frac{1}{8} \approx r$ را می‌دهد، که خطایی حدوداً مساوی 0.0180 دارد. چند تنصیف دیگر یک حین خطای کوچکی را تضمین می‌کنند؟
- نشان دهید که معادله، $x^6 + 2x - 2 = 0$ ریشه‌ای مانند r_1 بین -2 و -1 ، و ریشه دیگری چون r_2 بین 0 و 1 دارد. نشان دهید که ریشه دیگری وجود ندارد. با استفاده از روش تنصیف، r_1 و r_2 را به میزان $\frac{1}{8}$ تقریب کنید.

راهنمایی: خط $y = 2 - 2x$ منحنی $y = x^6$ را درست در دو نقطه قطع می‌کند.

- نشان دهید که معادله، $\cos \pi x = x$ یک و فقط یک ریشه مانند r بین 0 و $\frac{1}{2}$ دارد. با استفاده از روش تنصیف، r را به میزان $\frac{1}{8}$ تقریب کنید.
- نشان دهید که معادله، $\sin \pi x = x$ ریشه‌ای چون r_1 بین $\frac{1}{2}$ و $\frac{3}{4}$ ، و ریشه دیگری مانند r_2 بین $-\frac{3}{4}$ و -1 دارد. رابطه، بین r_1 و r_2 چیست؟ آیا معادله ریشه‌های دیگری غیر از $x = 0$ دارد؟ با استفاده از روش تنصیف، r_1 و r_2 را به میزان $\frac{1}{8}$ تقریب کنید.
- فرض کنید f بر بازه، $[a, b]$ پیوسته بوده و، به ازای هر x در $[a, b]$ ، $u \leq f(x) \leq b$ ، نشان دهید که نقطه‌ای مانند c در $[a, b]$ ، به نام نقطه ثابت f ، وجود دارد که $f(c) = c$.

۸. آسانسوری از یک عمارت رفیع طرف 5 دقیقه بالا رفته، در طبقات مختلف برای ساده یا سوار کردن توقف می‌کند. سپس در 3 دقیقه پائین می‌آید. نشان دهید که، صرف نظر از جزئیات حرکت، حاشی (عموماً بین طبقات) وجود دارد که آسانسور درست دو بار به فاصله، 4 دقیقه از آن رد می‌شود.

برای تابع f و بازه، I داده شده، ماکزیمم M و مینیمم m تابع f بر I را نامی و معاطی

$$f(x) = x^2 - 2x - 2, I = (0, 3) \quad \cdot 9$$

$$f(x) = 1 + x - x^2, I = [-1, 2] \quad \cdot 10$$

$$f(x) = x^3 + 1, I = [-1, 1] \quad \cdot 11$$

$$f(x) = x^2 + 2x + 3, I = [-2, 1] \quad \cdot 12$$

$$f(x) = 1/(x - 1), I = (1, \infty) \quad \cdot 13$$

$$f(x) = |x| + |x + 1|, I = [-3, 1] \quad \cdot 14$$

$$f(x) = 1/(x^2 + 1), I = (-\infty, 0] \quad \cdot 15$$

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}, I = (-1, 1) \quad \cdot 16$$

$$f(x) = \sqrt[3]{1 - x}, I = [1, 9] \quad \cdot 17$$

$$f(x) = \sqrt[4]{1 + x}, I = [0, 15] \quad \cdot 18$$

$$f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x, I = [0, \pi] \quad \cdot 19$$

$$f(x) = |\sin x|, I = [0, 2\pi] \quad \cdot 20$$

۲۱. فرض کنید تابع f دارای ماکزیمم M و مینیمم m بر بازه، I باشد. نشان دهید $f -$

سبز بر I مقادیر اکستریم دارد. این مقادیر چه هستند، و کجاها گرفته می‌شوند؟

۲۲. نشان دهید که تابع صعودی f همواره بر بازه، کراندار بسته، $I = [a, b]$ دارای

ماکزیمم M و مینیمم m است، حتی اگر f در نقاطی از I ناپیوسته باشد. f کجاها مقادیر

اکستریم خود را می‌گیرد؟ درحالتی که f نزولی است بحث کنید.

$$f(x) = \sin(\sin x) \quad . ۲۷$$

$$f(x) = \cos(\sin x) \quad . ۲۸$$

$$f(x) = \tan(\sec x) \quad . ۲۹$$

$$f(x) = [x] \quad . ۳۰$$

۳۱. چه تابع f ی هم زوج و هم فرد است؟

۳۲. نشان دهید که نمودار تابع ناصفر f نمی تواند نسبت به محور x متقارن باشد.

۳۳. دو خط مارا ر مبدا، بنیاید که با خط $3x - 2y + 6 = 0$ زاویه 45° بسازند.

۳۴. نشان دهید که هر یک از معادلات $\sin x = \cos x$ ، $\tan x = \cot x$ و $\sec x = \csc x$ بی نهایت جواب دارد.

۳۵. دوره، تناوب اساسی تابع $|\sin x| + |\cos x|$ را تعیین کنید.

۳۶. نشان دهید که تابع $f(x) = x - [x]$ متناوب، با دوره، تناوب اساسی ۱، است، و نمودار آن را رسم کنید. ناپوستگیهای f را بنیاید.

۳۷. اگر $f + g$ و f در a حد داشته باشند، آیا g نیز چنین است؟ اگر $f + g$ در a حد داشته باشد، آیا f و g نیز چنین اند؟

۳۸. اگر fg و f در a حد داشته باشند، آیا g نیز چنین است؟ اگر fg در a حد داشته باشد، آیا f و g نیز چنین اند؟

$f(0)$ چه باید باشد تا تابع داده شده در $x = 0$ پیوسته گردد؟

$$f(x) = \frac{x^2}{x} \quad . ۳۹$$

$$f(x) = \frac{5x^2 - 3x}{2x} \quad . ۴۰$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{اگر } x \neq 0 \\ 2 & \text{اگر } x = 0 \end{cases} \quad . ۴۱$$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+2} & \text{اگر } x \neq 0 \\ -1 & \text{اگر } x = 0 \end{cases} \quad . ۴۲$$

مقادیر زیر را بنیاید.

$$[n - \frac{1}{2}] \quad (n \text{ یک عدد صحیح}) \quad . ۴۳$$

$$[(2.05)^4] \quad . ۴۴$$

$$[n - \sqrt{10}] \quad . ۴۵$$

$$[(-0.9)^{99}] \quad . ۴۶$$

۴۷. آیا درست است که $||x|| = |[x]|$ ؟
به فرض آنکه

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{اگر } x < 0 \\ 0 & \text{اگر } x = 0 \\ 1 & \text{اگر } x > 0 \end{cases}$$

$$g(x) = 1 + x^2 \quad . ۴۸$$

$$g(x) = x(1 - x^2) \quad . ۴۹$$

$$g(x) = x - [x] \quad . ۵۰$$

حدود زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^{100} + x^{50} + 1) \quad . ۵۱$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x^{99} + x^{49} + 1) \quad . ۵۲$$

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^3 + 4x + 12}{x^4 - 3x + 4} \quad . ۵۳$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{\frac{x^2 + 10x - 39}{x - 3}} \quad . ۵۴$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 1)^{10}}{(x^2 - 2x + 1)^5} \quad . ۵۵$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - x - 2)^{20}}{(x^3 - 12x + 16)^{10}} \quad . ۵۶$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3} \quad . ۵۷$$

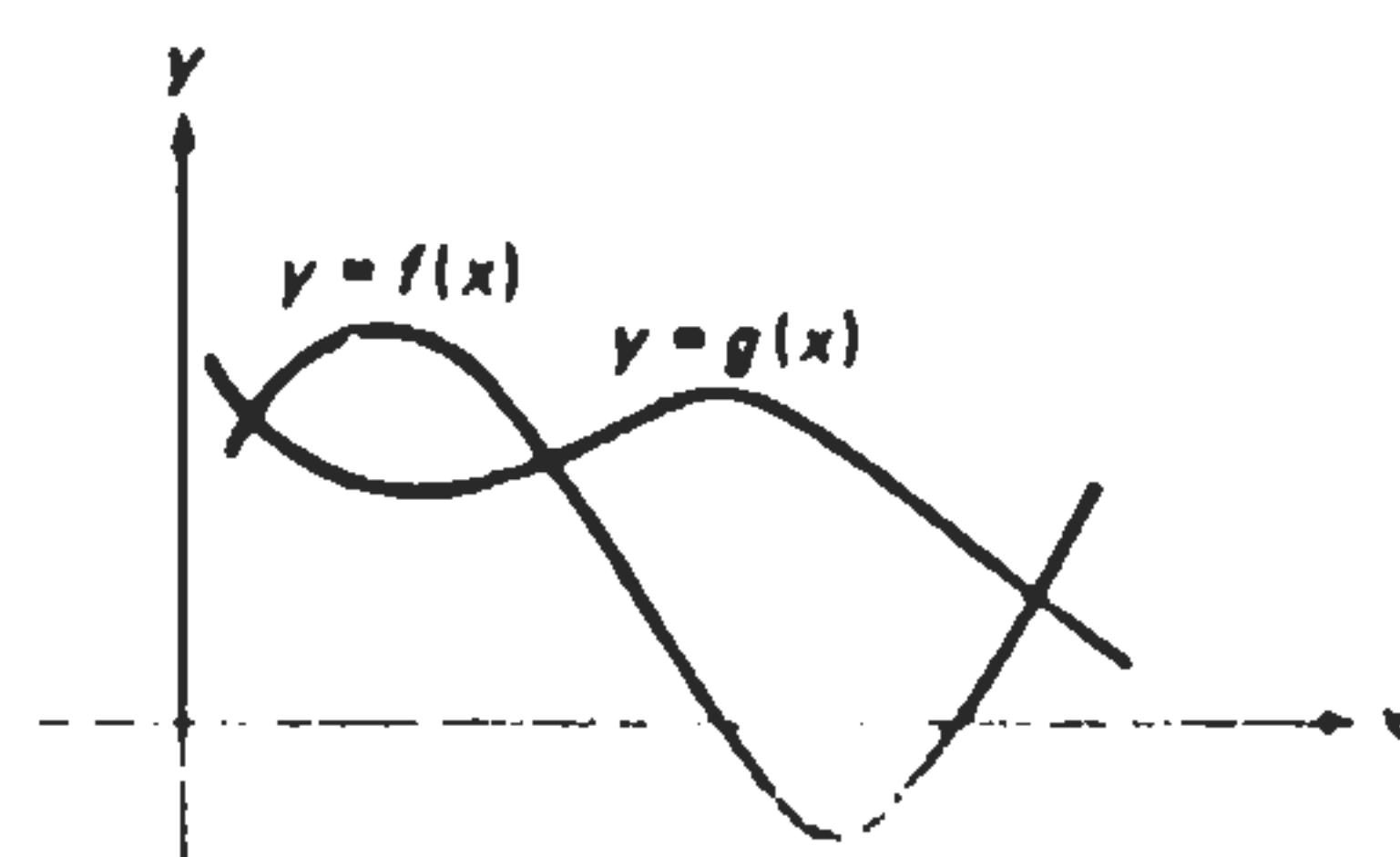
$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x - 1}{x^3 - 2x - 1} \quad . ۵۸$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - \sqrt[3]{x}} \quad . ۵۹$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} \quad (m, n \text{ اعداد صحیح مثبت}) \quad . ۶۰$$

راهنمایی. بنابر قضیه عاملی (ثابت شده در صفحه ۶۴۰)، چند جمله ای $Q(x)$ بر عامل خطی $x - c$ بخش پذیر است اگر و فقط اگر $Q(c) = 0$. این مطلب در حل مسائل ۵۶ تا ۵۸ مفید خواهد بود.

۶۱. نشان دهید هرگاه توابع f و g همه جا پیوسته باشند، آنگاه توابع $M(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ و $m(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ نیز چنین اند. [شکلهای ۵۷ (-) و ۵۷ (+) $M(x)$ و $m(x)$ توابع f و g شکل ۵۷ (آ) را نشان می دهند.]



د و ل.