انتگرال ناسره

در تمرینات زیر فرض کنید a عدد حقیقی مثبت، n عددی طبیعی مثبت، m عدد صحیح و p، q، α و β اعداد حقیقی دلخواهند.
مقدار هر یک از انتگرالهای ناسره زیر را (در صورت همگرا بودن) محاسبه کنید:

۱) $\displaystyle \int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx$

۲) $\displaystyle \int_1^{\infty} \frac{dx}{(x-1)\sqrt{1-x}}$

۳) $\displaystyle \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}}$

۴) $\displaystyle \int_0^{\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx$

۵) $\displaystyle \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx$

۶) $\displaystyle \int_0^{\infty} e^{-ax}\cos(bx)\,dx$

۷) $\displaystyle \int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin(bx)\,dx$

۸) $\displaystyle \int_3^{\infty} \frac{dx}{x^2}$

۹) $\displaystyle \int_0^{1} \ln x\,dx$

۱۰) $\displaystyle \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

۱۱) $\displaystyle \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2}$

۱۲) $\displaystyle \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$

۱۳) $\displaystyle \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3+1}$

۱۴) $\displaystyle \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\,dx$

۱۵) $\displaystyle \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)\,dx$

۱۶) $\displaystyle \int_0^{1} \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

۱۷) $\displaystyle \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\cosh^n x}$

۱۸) $\displaystyle \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)\cdots(x+n)}$

در همگرایی انتگرالهای ناسره زیر بحث کنید:

۱۹) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{x^4 - x^2 + 1}$

۲۰) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$

۲۱) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^p + x^q}$

۲۲) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^m}{1+x^n}\,dx$

۲۳) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\arctan(ax)}{x^n}\,dx$

۲۴) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln(1+x)}{x^n}\,dx$

۲۵) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x^p \ln^q x}$

۲۶) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^m \arctan x}{x^n + 2}\,dx$

۲۷) $\displaystyle\int_0^\infty x^\alpha |x-1|^\beta\,dx$

۲۸) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}\,dx$

۲۹) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{1-e^x}\,dx$

۳۰) $\displaystyle\int_2^\infty (\ln x)^p\,dx.$

در هر مورد مشخص کنید که آیا انتگرال داده شده همگرا، همگرای مطلق و یا همگرای مشروط است یا خیر:

۱) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\cos x}{1+x^2}\,dx,$

۲) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{\sin x}{x(x^2-1)}\,dx,$

۳) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{1+x^3}}\,dx,$

۴) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\sin x}{1+x^2}\,dx,$

۵) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{e^{2x}-1}\,dx,$

۶) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x}{1-x^2}\,dx,$

۷) $\displaystyle\int_0^\infty \cos x^2\,dx,$

۸) $\displaystyle\int_1^\infty x^p \sin x\,dx,$

۹) $\displaystyle\int_0^1 x^p (\ln x)^q\,dx,$

۱۰) $\displaystyle\int_0^\infty x^p (e^{-x}-1)\,dx.$

---

۱) نشان دهید که اگر $k \geq 0$ و $a > 0$، آنگاه انتگرال $\displaystyle\int_0^\infty t^k e^{-xt}dt$ بر $[a;\infty)$ همگرای یکشکل است.

۲) بازاء $x \geq 0$ فرض کنید $F(x) = \displaystyle\int_0^\infty t^{-2}(1-e^{-xt})^2 dt$. مشابه مثال ؟؟ عمل کرده، ضابطهٔ $F(x)$ را بیابید.

۳) ثابت کنید که $\int_{0}^{\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^{2}}\,dt$ بر $\mathbb{R}$ همگرای یکشکل است.

۴) به روش مشروح در ؟؟ و با توجه به اینکه $\int_{0}^{\infty} e^{-x}\sin xt\,dx = t/(t^{2}+1)$، ثابت کنید:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{e^{-x}(1-\cos xy)}{x}\,dx = \ln\left(\sqrt{1+y^{2}}\right)$$

۵) به روش مشروح در ؟؟ ثابت کنید:

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x^{2}}\frac{\sin(xy)}{x}\,dx = \sqrt{\pi}\int_{0}^{y} e^{-t^{2}}\,dt$$

فرض کنید $\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_{0}^{\infty} e^{-st}f(t)dt$ (بخوانید لاپلاسین $f(t)$). در این صورت ثابت کنید که اگر $s>0$، آنگاه

$$۶)\ \mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}, \qquad (s>0)$$

$$۷)\ \mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^{2}}, \qquad (s>0)$$

$$۸)\ \mathcal{L}\{t^{k}\} = \frac{k!}{s^{k+1}}, \qquad (k\in\mathbb{N}, s>0)$$

$$۹)\ \mathcal{L}\{e^{ct}\} = \frac{1}{s-c}, \qquad (s>c)$$

$$۱۰)\ \mathcal{L}\{te^{ct}\} = \frac{1}{(s-c)^{2}}, \qquad (s>c)$$

$$۱۱)\ \mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}\right\} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right),$$

$$۱۲)\ \mathcal{L}\{\sin(at)\} = \frac{a}{s^{2}+a^{2}},$$

$$۱۳)\ \mathcal{L}\{\cos(at)\} = \frac{s}{s^{2}+a^{2}},$$

$$۱۴)\ \mathcal{L}\{\sinh(at)\} = \frac{a}{s^{2}-a^{2}}, \qquad (s>|a|)$$

$$۱۵)\ \mathcal{L}\{\cosh(at)\} = \frac{s}{s^{2}-a^{2}}. \qquad (s>|a|)$$

ثابت کنید که اگر $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$، آنگاه:

$$۱۶)\ \mathcal{L}\{e^{-ct}f(t)\} = F(s+c),$$

۱۷) $\mathcal{L}\left\{f(t-c)\right\} = e^{-cs}F(s),$

۱۸) $\mathcal{L}\left\{f(ct)\right\} = \frac{1}{c}F\left(\frac{s}{c}\right),$

۱۹) $\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\} = sF(s) - f(0).$

۲۰) نشان دهید که به ازای هر $t > 0$ ای

$$\Gamma(t) = \int_0^1 \left\{\ln\left(\frac{1}{t}\right)\right\} dt$$

۲۱) نشان دهید که به ازای هر $k \in \mathbb{N}$ ای

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\left(\ln t\right)^k \, dt$$

فرض کنید به ازای $p > 0$ و $q > 0$، **بتای** p **و** q را به شکل $\mathrm{B}(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$ تعریف کنیم. در این صورت نشان دهید که

۲۲) $\mathrm{B}(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$

۲۳) $\int_0^{\pi/2} \sin^p x\,dx = \frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{p+1}{2},\frac{1}{2}\right),$

۲۴) $\int_0^{\pi/2} \cos^p x\,dx = \frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{p+1}{2},\frac{1}{2}\right),$

۲۵) $\int_0^{\pi/2} \sin^p x\,\cos^q x\,dx = \frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{p+1}{2},\frac{q+1}{2}\right),$

۲۶) $\mathrm{B}(p,q) = \mathrm{B}(p+1,q) + \mathrm{B}(p,q+1),$

۲۷) $\mathrm{B}(p,q) = \frac{p+q}{p}\mathrm{B}(p,q+1),$

۲۸) $\mathrm{B}(p,q) = \frac{q-1}{p}\mathrm{B}(p+1,q-1),$

۲۹) $\mathrm{B}(p,q)\mathrm{B}(p+q,r) = \mathrm{B}(q,r)\mathrm{B}(p,q+r).$

۳۰) با تغییر متغیر $x = \frac{1}{1+y}$ نشان دهید که

$$\mathrm{B}(p,q) = \int_0^\infty \frac{x^{p-1}\,dx}{(1+x)^{p+q}}$$

۳۱) ثابت کنید که اگر a و b اعداد مثبت باشند، آنگاه

$$\int_0^\infty \frac{\arctan(ax)\arctan(bx)}{x^2}dx = \frac{\pi}{2}\ln\left(\frac{(a+b)^{a+b}}{a^b b^a}\right)$$

۳۲) نشان دهید که به ازای هر $m > 0$ ای
$$\int_0^\infty \frac{1-\cos(mx)}{x} e^{-x}\, dx = \frac{1}{2}\ln(1+m^2).$$

۳۳) ثابت کنید $\int_0^1 \frac{x^n - 1}{\ln x}\, dx = \ln(n+1)$.

۳۴) ثابت کنید $$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a)^{n+1}} = \frac{\pi}{2}\,\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n n!\, a^{n+1/2}}$$

۳۵) ثابت کنید $\int_0^\infty x^n e^{-ax}\, dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$.

۳۶) ثابت کنید
$$\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{1+x^2}\, dx = \int_0^\infty \frac{x\sin(mx)}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{2} e^{-m}$$

———————————————

هر یک از تساویهای زیر را نشان دهید:

۱) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^8}} = \frac{\sqrt{2}}{8\sqrt{\pi}}\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)$.

۲) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{2m-1}\theta\cos^{2n-1}\theta\, d\theta}{(a\sin^2\theta + b\cos^2\theta)^{m+n}} = \frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{2a^m b^n \Gamma(n+m)}$.

۳) $\int_0^\infty x^{m-1}(1-x^a)^n\, dx = a^n \frac{n!}{m(m+a)\cdots(m+an)}$. راهنمایی: از تغییر متغیر $y = x^a$ استفاده شود.

۴) $\int_0^\infty x^m e^{-n^2x^2}\, dx = \frac{1}{2n^{m+1}}\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)$. راهنمایی: از تغییر متغیر $y = n^2x^2$ استفاده شود.

۵) $\int_0^\infty \frac{x^4(1+x^5)}{(1+x)^{15}}\, dx = 0$.