# دنباله و سری تابعی

در مورد همگرایی نقطه‌ای و همگرایی یکشکل دنباله‌های داده شده بر مجموعه‌های داده شده را بررسی کنید:

۱) $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$, $U = [0; 1]$,

۲) $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$, $U = \left[0; \frac{1}{2}\right]$,

۳) $f_n(x) = x^n - x^{2n}$, $U = [0; 1]$,

۴) $f_n(x) = \frac{1}{x+n}$, $U = (0; +\infty)$,

۵) $f_n(x) = \frac{nx}{1+n+x}$, $U = [0; 1]$,

۶) $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$, $U = \left[0; \frac{1}{2}\right]$,

۷) $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$, $U = [0; 1]$,

۸) $f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}$, $U = [0; 1]$,

۹) $f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}$, $U = (1; +\infty)$,

۱۰) $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$, $U = \mathbb{R}$,

۱۱) $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$, $U = \mathbb{R}$,

۱۲) $f_n(x) = \arctan(nx)$, $U = (0; +\infty)$,

۱۳) $f_n(x) = n(x^{\frac{1}{n}} - 1)$, $U = [1; a]$, $1 < a$,

۱۵) نشان دهید که $\left\{-nxe^{-nx^{۲}}\right\}_{n=۱}^{\infty}$ بر $[۰;۱]$ همگرای یکشکل نیست. بعلاوه، اگر $f(x)$ حد نقطه‌ای سری تابعی داده شده باشد، آنگاه $\lim_{n\to\infty}\int_{۰}^{۱} f_n(x)\,dx \neq \int_{۰}^{۱} f(x)\,dx$.

۱۶) نشان دهید که $\lim_{n\to\infty}\int_{۰}^{۳}\frac{n+\sin x}{۳n+\cos^{۲} x}\,dx = ۱$. (راهنمایی: از همگرایی یکشکل دنبالهٔ تابعی داخل انتگرال بر مجموعهٔ $[۰;۳]$ استفاده شود.)

فرض کنید تعریف کنیم

$$\begin{aligned} S(x) &:= \sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n\frac{x^{۲n+۱}}{(۲n+۱)!},\\ C(x) &:= \sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n\frac{x^{۲n}}{(۲n)!}. \end{aligned}$$

نشان دهید که اگر $U=[a;b]\subseteq\mathbb{R}$، آنگاه $S$ بر $U$ همگرای یکشکل است و $C$ نیز بر $U$ همگرای یکشکل می‌باشد. بعلاوه نشان دهید که $S$ و $C$ توابع مشتق‌پذیرند و $S'=C$ و $C'=S$.

آیا می‌توان گفت $S(x)=\sin x$ و $C(x)=\cos x$؟ چرا؟

همگرایی یکشکل سریهای تابعی زیر را به کمک آزمون $M$–وایرشتراس نشان دهید:

۱) $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{x+۲^n}$, $\quad U=(-۲;+\infty)$,

۲) $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{nx}{۱+n^{۵}x^{۲}}$, $\quad U=[۰;+\infty)$,

۳) $\sum_{n=۱}^{\infty}\arctan\left(\frac{۲x}{x^{۲}+n^{۳}}\right)$, $\quad U=\mathbb{R}$.

۴) $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{(x+n)(x+n+۱)}$, $\quad U=(۰;+\infty)$,

۵) $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{n^{۲}}{\sqrt{n!}}x^n$, $\quad U=\left[\frac{۱}{۲};۲\right]$,

۶) $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\sin((n+۱)x)}{n(n+۱)}$, $\quad U=\mathbb{R}$.

۷) نشان دهید $\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n$ بر $U=[0;1]$ همگرای یکشکل است، ولی این موضوع را از آزمون وایرشتراس نمی‌توان نتیجه گرفت.

به کمک آزمونهای آبل و دریکله، همگرایی یکشکل سریهای تابعی داده شده را بر مجموعه‌های مشخص شده نشان دهید:

۱) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n}$, $\qquad U=[a;b]\subseteq\mathbb{R}$,

۲) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+\sin x}$, $\qquad U=[0;2\pi]$,

۳) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{\sqrt{n^2+x^2}}$, $\qquad U=\mathbb{R}$,

۴) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin x\sin(nx)}{\sqrt{n+x}}$, $\qquad U=[0;+\infty]$,

۵) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n^3}$, $\qquad U=[a;b]\subseteq\mathbb{R}$

در هر مورد، دامنهٔ همگرایی یکشکل سری داده شده رامشخص کنید:

۶) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(x+\frac{1}{n}\right)^n$, $\qquad$ ۷) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{(1+x^2)^n}$,

۸) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x+n(-1)^n}{x^2+n^2}$, $\qquad$ ۹) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|x|}{n^2+x^2}$.

۱۰) فرض کنید $\alpha>0$. نشان دهید که سری تابعی $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n^{\alpha}(1+nx^2)}$ بر $\mathbb{R}$ همگرای یکشکل است. (راهنمایی: بیشترین مقدار $f_n(x)$ در $x_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$ می‌باشد.)

۱۱) نشان دهید که سری تابعی $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(1+nx^2)^n}$ بر $\mathbb{R}$ همگرای یکشکل است.

۱۲) نشان دهید که سری تابعی

$$\frac{x}{1+x}+\frac{x}{(1+x)(1+2x)}+\frac{x}{(1+2x)(1+3x)}+\cdots$$

بر $[\circ;۱]$ همگرای یکشکل نیست. (راهنمایی: دنبالهٔ $\left\{\frac{۱}{n}\right\}_{n=۱}^{\infty}$ را در نظر بگیرید.)

شعاع همگرایی و دامنهٔ همگرایی هر یک از سریهای توان زیر را بدست آورید:

۱) $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{x^n}{n^۳}$,

۲) $\sum_{n=۱}^{\infty} \left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{n^۲} x^n$,

۳) $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{n!}{a^n}x^n, \qquad (a>۱)$,

۴) $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(n!)^۲}{(۲n)!}x^n$,

۵) $\sum_{n=۱}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^۲}\right) x^n$,

۶) $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{۲n+۱}\left(\frac{۱+x}{۱-x}\right)^n$,

۷) $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{x^n}{a^n+b^n}$,

۸) $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{x^n}{a^{\sqrt{n}}}$,

۹) $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(۳+(-۱)^n)^n}{n}x^n$,

۱۰) $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^n}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n x^n$,

۱۱) $\sum_{n=۱}^{\infty} \left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{-n^۲} e^{-nx}$,

۱۲) $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{m(m-۱)\cdots(m-n+۱)}{n!}x^n$,

بسط مک لورن هر یک از توابع زیر را یافته، سپس شعاع همگرایی سریهای توان حاصله را محاسبه کنید:

۱۳) $f(x)=a^x$,

۱۴) $f(x)=\cos x$,

۱۵) $f(x)=\sinh x$,

۱۶) $f(x)=\cosh x$,

۱۷) $f(x)=\arctan x$,

۱۸) $f(x)=\arcsin x$,

۱۹) $f(x)=\sin^۲ x$,

۲۰) $f(x)=e^{-x^۲}$,

۲۱) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{۱-۲x}}$,

۲۲) $f(x)=\ln\left(\sqrt{\frac{۱+x}{۱-x}}\right)$,

۲۳) $f(x)=\frac{x}{۱+x-۲x^۲}$,

۲۴) $f(x)=\frac{x}{(۱-x)^۲}$,

۲۵) $f(x)=(۱+x)e^{-x}$,

۲۶) $f(x)=e^x\cos x$.

حد مجموع سریهای زیر را محاسبه کنید:

۲۷) $۱ + \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۴}{۴!} + \cdots$ ۲۸) $x + \frac{x^۳}{۳} + \frac{x^۵}{۵} + \cdots$

۲۹) $\frac{x}{۱ \times ۲} + \frac{x^۲}{۲ \times ۳} + \frac{x^۳}{۳ \times ۴} + \cdots$ ۳۰) $x - \frac{x^۳}{۳} + \frac{x^۵}{۵} - \cdots$

۳۱) نشان دهید که سری توان $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^۲}$ در معادلهٔ دیفرانسیل $xy'' + y' - y = ۰$ صدق می‌کند.

۳۲) نشان دهید که سری توان $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{x^{۴n}}{(۴n)!}$ در معادلهٔ دیفرانسیل $y^{(۴)} = y$ صدق می‌کند.

هر یک از تساویهای زیر را ثابت نموده و سپس دامنهٔ برقراری هر یک را بدست آورید:

۳۳) $\arcsin x = x + \frac{۱}{۲.۳}x^۳ + \frac{۱ \times ۳}{۲ \times ۴ \times ۵}x^۵ + \frac{۱ \times ۳ \times ۵}{۲ \times ۴ \times ۶ \times ۷}x^۷ + \cdots$

۳۴) $\sinh x = x + \frac{x^۳}{۳!} + \cdots + \frac{x^{۲n+۱}}{(۲n+۱)!} + \cdots$

۳۵) $\cosh x = ۱ + \frac{x^۲}{۲!} + \cdots + \frac{x^{۲n}}{(۲n)!} + \cdots$

۳۶) $\ln\left(\frac{۱+x}{۱-x}\right) = ۲\left(x + \frac{x^۳}{۳} + \cdots + \frac{x^{۲n+۱}}{۲n+۱} + \cdots\right)$

۳۷) در صورتی که $S_n$ مجموع توان دوم $n$ عدد طبیعی ۱ تا $n$ باشد، نشان دهید

$$\frac{S_۱}{۱!} + \frac{S_۲}{۲!} + \cdots + \frac{S_n}{n!} + \cdots = \frac{۱۷}{۶}e$$

(راهنمایی: نشان دهید که حکم مطرح شده معادل است با $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{n!} = ۱۷e$ و سپس از روشی شبیه به قسمت (۷) از ؟؟ استفاده نمائید. با سری توان $e^x = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ شروع کنید.)

۳۸) فرض کنید $p$ و $q$ اعداد صحیحند، در این صورت نشان دهید که

$$\int_{۰}^{۱} \frac{x^{p-۱}}{۱+x^q}\,dx = \frac{۱}{p} - \frac{۱}{p+q} + \frac{۱}{p+۲q} - \frac{۱}{p+۳q} + \cdots$$

۳۹) نشان دهید که اگر $۱ > x > ۱-$، آنگاه

$$\frac{۱}{۱+x} + \frac{۲x}{۱+x^۲} + \frac{۴x^۳}{۱+x^۴} + \frac{۸x^۷}{۱+x^۸} + \cdots = \frac{۱}{۱-x}$$