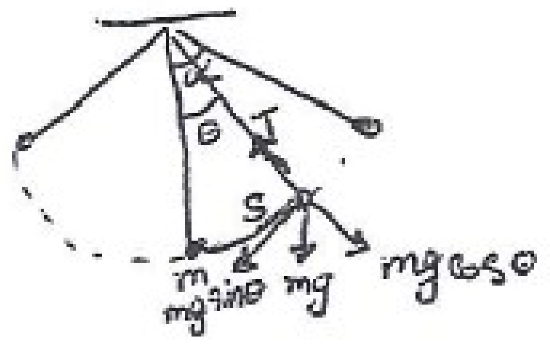
«کاربرد معادلات مرتبه‌ی دوم» مبانی تدریس ۲

۱

مثال: یک آونگ ساده تشکیل شده است از یک قطعه نخ به طول l که یک انتهای آن به محوری بدون اصطکاک وصل شده است و به انتهای دیگر وزنه‌ای به جرم m بسته شده است. نخ می‌تواند آزادانه در یک صفحه‌ی قائم تاب بخورد. آونگ را از وضع تعادل به اندازه‌ی زاویه‌ی α $(\alpha \leq 6^\circ)$ منحرف نموده بدون سرعت اولیه آن را رها می‌کنیم. از مقاومت هوا و اصطکاک صرف‌نظر می‌شود. زمان تناوب آونگ را بیابید.

- فرض کنیم که θ زاویه‌ای باشد که در لحظه‌ی t آونگ با خط عمودی تشکیل می‌دهد.



$$\Sigma F = \Sigma ma$$

$$a = \frac{d\theta}{dt}$$

$$v = \frac{dS}{dt}$$

$$a = \frac{d^2S}{dt^2}$$

$$S = l\theta \Rightarrow a = l\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$-mg\sin\theta = ma$$

$$-mg\sin\theta = ml\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

$$\sin\theta \simeq \theta$$

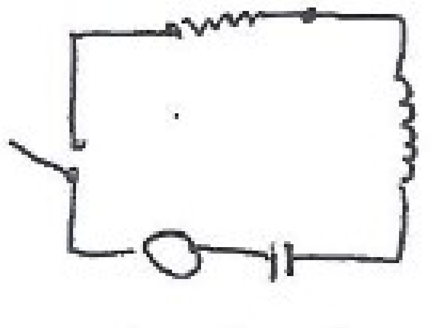
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

$$\theta'' + \frac{g}{l}\theta = 0 \quad *$$

* معادله‌ی مشخصه $\Rightarrow r^2 + \frac{g}{l} = 0 \Rightarrow r^2 = \frac{-g}{l} \Rightarrow r = \pm\sqrt{\frac{g}{l}}\, i \Rightarrow \theta(t) = c_1 \sin\sqrt{\frac{g}{l}}\, t + c_2\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\, t$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad \left.\begin{matrix}\sin ax\\ \cos ax\end{matrix}\right\} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{a} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l}}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

مثال: مدار الکتریکی شامل یک خازن الکتریکی با ظرفیت $C = 0/25\times10^{-6}\,F$ و $R = 5\times10^{3}\,\Omega$ ، $L = 1\,H$ و $Q(0) = 0$ و $E(t) = 12$ در لحظه‌ی $t = 0$ کلید بسته می‌شود. مطلوب است بار الکتریکی ذخیره‌شده در خازن در لحظه‌ی $t = 0/001$ و شدت جریان حالت ماندگار؛ $\lim_{t\to\infty} I(t) = ?$



$$E_R = RI \qquad I = \frac{dQ}{dt}$$

$$E_L = L\frac{dI}{dt} \qquad E_C = \frac{1}{C}Q$$

$$E_L + E_R + E_C = E(t) \Rightarrow L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t) \Rightarrow \frac{d^2Q}{dt^2} + 5\times10^{3}\frac{dQ}{dt} + 4\times10^{6}Q = 12$$

$$Q(0) = 0,\quad I(0) = \left.\frac{dQ}{dt}\right|_{t=0} = 0 \Longrightarrow m^2 + 5\times10^{3}m + 4\times10^{6} = 0 \qquad m_1 = -1000,\ m_2 = -4000$$

$$Q_g(t) = c_1 e^{-1000t} + c_2 e^{-4000t}$$

$$Q_p(t) = A \Rightarrow 4\times10^{6}A = 12 \Rightarrow A = 3\times10^{-6} \Rightarrow \begin{cases} Q_G(t) = c_1e^{-1000t} + c_2e^{-4000t} + 3\times10^{-6} \\ Q(0) = 0 \\ Q'(0) = 0 \end{cases}$$

9 0000000

$$J_{(\nu+1)}(x) = \frac{2\nu}{x}J_{(\nu)} - J_{(\nu-1)}$$

حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از سری ها :

یک سری نامتناهی برحسب x به صورت $a_0+a_1x+\dots+a_nx^n+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ (I) است و یک سری نامتناهی برحسب $(x-x_0)$ به صورت $a_0+a_1(x-x_0)+\dots+a_n(x-x_0)^n+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ (II) است.

یک سری به صورت I و II می‌تواند به تابعی مانند $f(x)$ همگرا باشند که در این صورت می نویسیم :

مک لورن

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \qquad \text{یا} \qquad \underset{\text{تیلور}}{f(x)}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$$

$$\hookrightarrow a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!} \qquad\qquad \hookrightarrow a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

مهم

۱: $1+x+x^2+x^3+\dots+x^n+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\dots$

۲: $x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots+\frac{(-1)^nx^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sin x$

۳: $1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\dots+\frac{(-1)^nx^{2n}}{(2n)!}+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n}}{(2n)!}=\cos x$

۴: $1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x \quad R=\infty$

۵: $1+x+2x^2+6x^3+\dots+n!x^n=\sum_{n=0}^{\infty}n!x^n$

یک سری ممکن است به ازای $x\in(-R,R)$ به تابعی مانند $f(x)$ همگرا باشند در این صورت R را شعاع همگرایی سری گوئیم. و نیز ممکن است که یک سری به ازای همه مقادیر حقیقی همگرا به تابعی باشد که در این صورت شعاع همگرایی آن را ∞ گوئیم و نیز ممکن است که یک سری فقط به ازای $x=0$ همگرا باشد که می نویسیم $R=0$

شعاع همگرایی یک سری به صورت (I) از رابطه زیر بدست می آید :

$$\boxed{R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|}$$

۴: $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty$ ، ۱: $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{1}\right|=1$

۵: $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$

قضیه: اگر $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$ و $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = g(x)$ شعاع همگرایی هر دو سری R باشد آنگاه:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n = f(x) \pm g(x) \qquad (i)$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = f(x)\cdot g(x) \qquad (ii)$$

$$c_n = \sum_{r=0}^{n} a_r b_{n-r}$$

شعاع همگرایی سری های جدید نیز R است.

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \dots) = a_0b_0 + (a_0b_1 + b_0a_1)x +$$
$$(a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + (a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0)x^3 + \dots + (a_0b_n + a_1b_{n-1} + a_2b_{n-2} + \dots + a_nb_0)x^n$$

قضیه: اگر $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$ شعاع همگرایی سری R باشد یعنی:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

آنگاه:

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$f''(x) = 2a_2 + 6a_3x + \dots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \dots = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$$

$$\vdots$$

$$f^{(r)}(x) = \sum_{n=r}^{\infty} n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)a_n x^{n-r}$$

شعاع همگرایی سری های جدید نیز R است.

قضیه: اگر $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ به ازای تمام مقادیر x همواره صفر باشد آنگاه:

$$a_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_n = \dots = 0$$

حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از سری ها:

مثال: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y' = y$ را به صورت یک سری تیلور حول نقطه $x_0 = 0$ بنویسید.

$$y = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}_{= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots} \Rightarrow y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{(n+1)}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1)a_{n+1} - a_n\right]x^n = 0 \Rightarrow (n+1)a_{n+1} - a_n = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{1}{n+1} a_n \\ n \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} n=0 & a_1 = a_0 = \frac{1}{1!}a_0 \\ n=1 & a_2 = \frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{2!}a_0 \\ n=2 & a_3 = \frac{1}{6}a_0 = \frac{1}{3!}a_0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} y = a_0\left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + \dots\right) \\ y = a_0 e^x \end{matrix}$$

$$a_n = \frac{1}{n!}a_0$$

مثال: جواب عمومی معادله‌ی دیفرانسیل $y''+y=0$ را به صورت یک سری توانی حول نقطه‌ی $x_0=0$ بنویسید.

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \Rightarrow y''=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)(n+2)a_{n+2} + a_n\right] x^n = 0$$

$$\Rightarrow (n+1)(n+2)a_{n+2} + a_n = 0 \Rightarrow \begin{cases} a_{n+2} = \dfrac{-1}{(n+1)(n+2)} a_n \\ n \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{If} \quad n=0 \quad a_2 = \frac{-1}{2} a_0$$

$$\left.\begin{array}{ll}
n=1 & a_3 = \dfrac{-1}{2\times 3} a_1 \\
n=2 & a_4 = \dfrac{-1}{3\times 4} a_2 = \dfrac{1}{4!} a_0 \\
n=3 & a_5 = \dfrac{-1}{4\times 5} a_3 = \dfrac{1}{5!} a_1 \\
 & a_6 = \dfrac{-1}{6!} a_0 \\
 & a_7 = \dfrac{-1}{7!} a_1 \\
 & \vdots \\
 & a_{2n} = \dfrac{(-1)^n}{(2n)!} a_0 \\
 & a_{(2n+1)} = \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!} a_1
\end{array}\right\}
\Rightarrow
\begin{array}{l}
y = a_0\left(1 - \dfrac{1}{2!}x^2 + \dfrac{1}{4!}x^4 + \cdots + \dfrac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \cdots\right) \\
\quad + a_1\left(x - \dfrac{1}{3!}x^3 + \dfrac{1}{5!}x^5 + \cdots + \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots\right) \\[2em]
\Rightarrow y = a_0 \cos x + a_1 \sin x
\end{array}$$

مثال: جواب عمومی معادله‌ی دیفرانسیل $\begin{cases} y' = 1 + y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ را به صورت یک سری توانی حول نقطه‌ی $x_0=0$ بنویسید.

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \qquad y(0)=0 \Rightarrow a_0 = 0$$

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = 1 + \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n \Rightarrow C_n = \sum_{r=0}^{n} a_r a_{n-r} \qquad a_0 = 0 \Rightarrow a_1 = 1 + \overset{a_0 a_0}{C_0} = 1 + 0 = 1$$

ضریب x ، $2a_2 = C_1 = a_0 a_1 + a_1 a_0 \Rightarrow \boxed{a_2 = 0}$ ضریب x^2 ; $3a_3 = C_2 = a_0 a_2 + a_1 a_1 + a_2 a_0 \Rightarrow a_3 = \frac{1}{3}$

ضریب x^3 ; $4a_4 = C_3 = a_0 a_3 + a_1 a_2 + a_2 a_1 + a_3 a_0 \Rightarrow \underline{a_4 = 0} \Rightarrow y = x + \frac{1}{3}x^3 + \cdots \Rightarrow \underline{y = \tan x}$

مثال:

$$y'' + 3xy' + 6y = 0 \qquad , x_0 = 0$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \Rightarrow y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} 3n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 6 a_n x^n = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 3n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 6 a_n x^n = 0$$

why?

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1)(n+2) a_{n+2} + (3n+6) a_n\right] x^n = 0 \Rightarrow \begin{cases} a_{n+2} = \dfrac{-(3n+6)}{(n+1)(n+2)} a_n \\ n \geq 0 \end{cases}$$

$n=0 \Rightarrow a_2 = -3a_0$

$n=1 \Rightarrow a_3 = -\frac{3}{2} a_1$

$n=2 \Rightarrow a_4 = -a_2 = 3a_0$

$n=3 \Rightarrow a_5 = \frac{-15}{20} a_3 = \frac{9}{8} a_1$

$$y = a_0\left(1 - 3x^2 + 3x^4 + \dots\right) + a_1\left(x - \frac{3}{2}x^3 + \frac{9}{8}x^5 + \dots\right)$$

مثال:

معادله لژاندر

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + 12y = 0 \qquad x_0 = 0$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n , \; y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} , \; y'' = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) n a_n x^{n-2}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 12 a_n x^n = 0$$

why? why?

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 12 a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1)(n+2) a_{n+2} - (n^2+n-12) a_n\right] x^n = 0 \Rightarrow (n+1)(n+2) a_{n+2} = (n^2+n-12) a_n$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{n+2} = \dfrac{(n-3)(n+4)}{(n+1)(n+2)} a_n \\ n \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$n=0 \quad a_2 = -6a_0$

$n=1 \quad a_3 = \frac{-5}{3} a_1$

$n=2 \quad a_4 = \frac{-6}{12} a_2 = \frac{-1}{2} a_2 = 3a_0$

$n=3 \quad a_5 = 0$

$a_7 = a_9 \dots = a_{2k+1} = 0$

$n=4 \cdot a_6 = \frac{12}{15} a_0$

یا

$$y = a_0\left(1 - 6x^2 + \frac{3}{\cancel{}}x^4 + \frac{4}{5}x^6 + \cdots\right) + a_1\left(x - \frac{5}{3}x^3\right)$$

تعریف: تابع $f(x)$ را در نقطهٔ x_0 تحلیلی گوییم هرگاه بتوان آن را به صورت زیر نوشت:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

بنابراین تابع $f(x)$ را در نقطهٔ x_0 تحلیلی گوییم هرگاه در این نقطه تعریف شده باشد و مشتق آن از هر مرتبه‌ای در این نقطه موجود باشد.

$f(x) = \frac{1}{1-x}$ در ۱ تحلیلی نیست زیرا تعریف نشده است.

$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots = \sum a_n x^n$ در ۰ تحلیلی است.

تعریف: نقطهٔ x_0 را نقطهٔ عادی معادلهٔ $y'' + P(x)y' + q(x)y = 0$ گوییم هرگاه توابع $P(x)$ و $q(x)$ در این نقطه تحلیلی باشند.

هر نقطه‌ای را که عادی نباشد نقطهٔ غیر عادی معادله می‌گوییم.

مثلاً در معادلهٔ $(1-x^2)y'' - 2xy' + 12y = 0$ ، $P(x) = \frac{-2x}{1-x^2}$ ، $q(x) = \frac{12}{1-x^2}$

نقاط $x_0 = \pm 1$ نقاط غیر عادی معادله و سایر نقاط برای معادله نقاط عادی هستند.

قضیه: اگر نقطهٔ x_0 نقطهٔ عادی معادلهٔ دیفرانسیل $y'' + P(x)y' + q(x)y = 0$ باشد آنگاه جواب این معادله را می‌توان به صورت $\boxed{y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n}$ نوشت.

معادلهٔ لژاندر: صورت کلی این معادله عبارت است از $\boxed{(1-x^2)y'' - 2xy' + P(P+1)y = 0}$ که P عددی ثابت است.

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2}y' + \frac{P(P+1)}{1-x^2}y = 0 \qquad P(x) = \frac{-2x}{1-x^2} \qquad q(x) = \frac{P(P+1)}{1-x^2}$$

$x_0 = 0$ نقطهٔ عادی معادله است پس می‌توان جواب را به صورت $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ در نظر گرفت.

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ , \quad y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \ , \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} P(P+1) a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} p(p+1)a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)(n+2)a_{n+2} - (n^2+n-p^2-p)a_n\right]x^n = 0 \Rightarrow (n+1)(n+2)a_{n+2} = \big((n+p)(n-p)+(n-p)\big)a_n$$

$$\Rightarrow (n+1)(n+2)a_{n+2} = (n-p)(n+p+1)a_n \Rightarrow \begin{cases} a_{n+2} = \dfrac{-(p-n)(p+n+1)}{(n+1)(n+2)}a_n \\ n \geq 0 \end{cases} \quad ☆$$

If $n=0 \quad a_2 = \dfrac{-p(p+1)}{1\times 2}a_0$

$n=1 \quad a_3 = \dfrac{-(p-1)(p+2)}{2\times 3}a_1$

$n=2 \quad a_4 = \dfrac{-(p-2)(p+3)}{3\times 4}a_2 = \dfrac{(p-2)p(p+1)(p+3)}{4!}a_0$

$n=3 \quad a_5 = \dfrac{-(p-3)(p+4)}{4\times 5}a_3 = \dfrac{(p-3)(p-1)(p+2)(p+4)}{5!}a_1$

$n=4 \quad a_6 = \dfrac{-(p+4)(p-2)p(p+1)(p+3)(p+5)}{6!}a_0$

$$a_7 = \frac{-(p-5)(p-3)(p-1)(p+2)(p+4)(p+6)}{7!}a_1$$

$$y = a_0\Big(1 - \frac{p(p+1)}{2!}x^2 + \frac{(p-2)p(p+1)(p+3)}{4!}x^4 + \dots\Big) \; y_1$$
$$+ a_1\Big(x - \frac{(p-1)(p+2)}{3!}x^3 + \frac{(p-3)(p-1)(p+2)(p+4)}{5!}x^5 + \dots\Big) \; y_2$$

$y = a_0 y_1 + a_1 y_2$ y_1 و y_2 مستقل خطی هستند.

چند جمله‌ای های لژاندر: فرض کنیم در معادله‌ی لژاندر p عددی صحیح و نامنفی باشند قرار می‌دهیم $\boxed{p=m}$
در این صورت رابطه‌ی بازگشتی به صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{cases} a_{n+2} = \dfrac{-(m-n)(m+n+1)}{(n+1)(n+2)}a_n \quad * \\ n \geq 0 \end{cases}$$

هنگامی که در رابطه‌ی بازگشتی اندیس مقادیر از صفر به بعد را نسبت دهیم هرگاه $n=m$ ، آنگاه: $a_{m+2}=0$ و از
آنجا $a_{m+4}=a_{m+6}=a_{m+2k}=0$ در نتیجه یک چند جمله‌ای از درجه‌ی m (بر حسب آنکه m فرد یا زوج
باشد) جواب معادله است. یعنی اگر m فرد باشد y_2 یک چند جمله‌ای از درجه‌ی m است و اگر m زوج باشد y_1
یک چند جمله‌ای از درجه‌ی m خواهد بود.

قرار می‌دهیم: $a_m = \dfrac{(2m)!}{2^m(m!)^2}$ با توجه به رابطه‌ی بازگشتی $*$ داریم: $a_n = \dfrac{-(n+1)(n+2)}{(m-n)(m+n+1)}a_{n+2}$

$\mathcal{E}_0$

$$n=m-2 \Rightarrow a_{m-2} = \frac{-(m-1)m}{2(2m-1)}\, a_m \qquad \frac{(2m)!}{2^m (m!)^2} \Rightarrow = \frac{-(m-1)m(2m)(2m-1)(2m-2)!}{2(2m-1)2^m m(m-1)(m-2)!\, m!}$$

$$= \frac{-(2m-2)!}{2^m (m-1)!(m-2)!}$$

$$a_{m-4} = \frac{-(m-3)(m-2)}{4(2m-3)}\, a_{m-2} = \frac{-(m-3)(m-2)}{4(2m-3)} \times \frac{-(2m-2)!}{2^m (m-1)!(m-2)!} = \frac{(m-3)(m-2)\overbrace{(2m-2)!}^{(2m-2)(2m-3)(2m-4)!}}{\cdots\cdots}$$

$$= \frac{(2m-4)!}{2\times 2^m (m-2)!(m-4)!} \qquad a_{m-6} = \frac{(2m-6)!}{6\times 2^m (m-3)!(m-6)!}$$

$$a_{m-2k} = \frac{(-1)^k (2m-2k)!}{2^m k!(m-k)!(m-2k)!}$$

(جواب معادله لژاندر موقعی m=0 باشد)

(چندجمله‌ای لژاندر)

$$P_m(x) = \sum_{k=0}^{[\frac{m}{2}]} \frac{(-1)^k (2m-2k)!}{2^m k!(m-k)!(m-2k)!}\, x^{m-2k}$$

$P_0(x)=1 \qquad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1)$

$P_1(x)=x \qquad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x)$

$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$

معادله‌ی لژاندر

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + m(m+1)y = 0$$

خواص چندجمله‌ای‌های لژاندر:

۱. $P_m(1)=1$ زیرا $a_m=\ldots$ را انتخاب کردیم.

۲. چندجمله‌ای‌های لژاندر در رابطه‌ی بازگشتی زیر صدق می‌کنند: $n=1,2,\ldots$

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)x\,P_n(x) - nP_{n-1}(x)$$

۳. رودریگز

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \times \frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right]$$

۴. چندجمله‌ای‌های لژاندر در بازه‌ی $[-1,1]$ بر هم عمودند.

عمود بودن

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,dx = \begin{cases} =0 & n\neq m \\ \neq 0 & n=m \end{cases}$$

حل معادلات دیفرانسیل به کمک سری‌ها حول یک نقطه‌ی منفرد منظم (تئوری فروبنیوس)

همان طور که قبلاً دیدیم نقطه‌ی x_0 را نقطه‌ی عادی معادله‌ی $y''+P(x)y'+q(x)y=0$ گوییم هرگاه $P(x)$ و $q(x)$ در نقطه‌ی x_0 تحلیلی باشند. هر نقطه‌ای x_0 نقطه‌ی عادی معادله نباشد آن را نقطه‌ی غیرعادی (منفرد) گوییم. مثلاً در معادله‌ی لژاندر $(1-x^2)y''-2xy'+p(p+1)y=0$ نقاط $x_0=\pm1$ نقاط منفرد هستند.

نقطه‌ی منفرد x_0 برای معادله‌ی $y''+P(x)y'+q(x)y=0$ را نقطه‌ی منفرد منظم گوییم هرگاه $(x-x_0)^2 q(x)$ و $(x-x_0)P(x)$ در نقطه‌ی x_0 تحلیلی باشند در غیر این صورت x_0 را منفرد نامنظم گوییم. در حالت خاص اگر

(ارزشیابی دقت)

در $y'' + P(x)y' + q(x)y = 0$

$x_0=0$ نقطه‌ی منفرد معادله باشد این نقطه منظم است هرگاه $xP(x)$ و $x^2q(x)$ در $x_0=0$ تحلیلی باشند.

مثال: نقاط منفرد معادله‌ی لژاندر منظم اند یا نامنظم؟

$$P(x) = \frac{-2x}{1-x^2} \qquad q(x) = \frac{p(p+1)}{1-x^2}$$

$x_0 = \pm 1$

$$x_0 = 1: \quad \begin{cases} (x-1)P(x) = \dfrac{2x}{x+1} \\ (x-1)^2 q(x) = \dfrac{p(p+1)(1-x)}{1+x} \end{cases}$$

پس نقطه‌ی $x_0=1$ نقطه‌ی منفرد منظم است.

$$x_0 = -1: \quad (x+1)P(x) = \frac{-2x}{1-x} \qquad (x+1)^2 q(x) = \frac{p(p+1)(x+1)}{1-x}$$

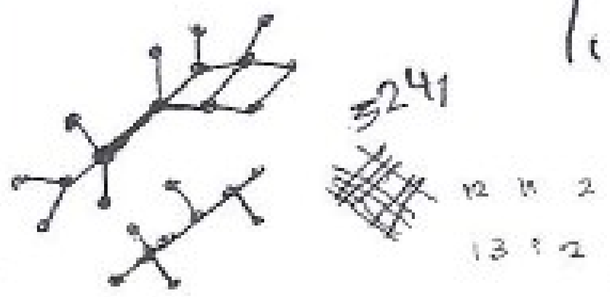
پس نقطه‌ی $x_0=-1$ نقطه‌ی منفرد منظم است.

مثال: نقاط عادی و منفرد $x^2(x+1)y'' + (3x+4)y' + x^2(x-1)y = 0$ را بیابید.

$$P(x) = \frac{3x+4}{x^2(x+1)} \qquad q(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

$$x_0 = 0 \to \begin{cases} xP(x) = \dfrac{3x+4}{x(x+1)} \\ x^2 q(x) \end{cases}$$ منفرد نامنظم

$$x_0 = -1 \to \begin{cases} (x+1)P(x) = \dfrac{3x+4}{x^2} \\ (x+1)^2 q(x) = x^2-1 \end{cases}$$ منفرد منظم



(#) فرض کنیم که نقطه‌ی $x_0=0$ نقطه‌ی منفرد منظم معادله‌ی $y'' + P(x)y' + q(x)y = 0$ باشد.

$$xP(x) = P_0 + P_1x + P_2x^2 + \dots$$

$$x^2q(x) = q_0 + q_1x + q_2x^2 + \dots$$

(I) جواب معادله را بالا به صورت یک سری توانی $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$ در نظر می‌گیریم که در آن r عددی است حقیقی که ابتدا آن را می‌یابیم. این گونه سری ها را سری های فروبنیوس می‌نامیم.

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2}$$

$$y' = \sum (n+r) a_n x^{n+r-1}$$

$$y'' = \sum^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2}$$

$$y = \sum^{\infty} a_n (x-x_0)^{n+r}$$

11.

$$y_1=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\frac{1}{2}} \quad , y_1'=\sum_{n=0}^{\infty} (n+\tfrac{1}{2}) a_n x^{n-\frac{1}{2}} \quad , y_1''=\sum_{n=0}^{\infty} (n+\tfrac{1}{2})(n-\tfrac{1}{2}) a_n x^{n-\frac{3}{2}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)(n-\tfrac{1}{2}) a_n x^{n+\frac{1}{2}} + \sum_{n=0}^{\infty} (3n+\tfrac{3}{2}) a_n x^{n+\frac{1}{2}} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\frac{1}{2}} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\frac{3}{2}} = 0$$

$$\sum_{n=-1}^{\infty} (2n+3)(n+\tfrac{1}{2}) a_{n+1} x^{n+\frac{3}{2}} + \sum_{n=-1}^{\infty} (3n+\tfrac{9}{2}) a_{n+1} x^{n+\frac{3}{2}} - \sum_{n=-1}^{\infty} a_{n+1} x^{n+\frac{3}{2}} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\frac{3}{2}} = 0$$

$$* \; n=-1 : \; \frac{-1}{2} a_0 x^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{2} a_0 x^{\frac{1}{2}} - a_0 x^{\frac{1}{2}} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big[\big((2n+3)(n+\tfrac{1}{2}) + (3n+\tfrac{9}{2}) - 1\big) a_{n+1} - a_n\Big] x^{n+\frac{3}{2}} = 0$$

$$(2n^2+n+3n+\tfrac{3}{2}+3n+\tfrac{9}{2}-1) a_{n+1} - a_n = 0 \Longrightarrow \boxed{\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{1}{2n^2+7n+5} a_n \\ n \geq 0 \end{cases}}$$

$$\left.\begin{array}{l} n=0 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{5} a_0 \\ n=1 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{14} a_1 = \frac{1}{70} a_0 \\ n=2 \Rightarrow \dots \\ \vdots \end{array}\right\} \Longrightarrow y_1 = a_0\left(x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{5} x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{70} x^{\frac{5}{2}} + \cdots\right)$$

$$y_2=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-1} \quad , y_2'=\sum_{n=1}^{\infty} (n-1) b_n x^{n-2} \quad , y_2''=\sum_{n=1}^{\infty} (n-1)(n-2) b_n x^{n-3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n-2)(n-2) b_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (3n-3) b_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n-2)(n-2) b_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} (3n-3) b_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1} x^{n-1} = 0$$

$$n=0 : \; 4 b_0 x^{-1} - 3 b_0 x^{-1} - b_0 x^{-1} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \Big[\big((2n-2)(n-2) + (3n-3) - 1\big) b_n - b_{n-1}\Big] x^{n-1} = 0 \Rightarrow (2n^2-3n) b_n = b_{n-1} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} b_n = \dfrac{1}{2n^2-3n} b_{n-1} \\ n \geq 1 \end{array}}$$

$$\left.\begin{array}{l} n=1 \Rightarrow b_1 = -b_0 \\ n=2 \Rightarrow b_2 = \frac{-1}{2} b_0 \\ \vdots \end{array}\right\} \Rightarrow y_2 = b_0\left(x^{-1} - 1 - \frac{1}{2} x \cdots\right)$$

مثال:

$x^2y'' + x(x-1)y' + (1-x)y = 0$

$p(x) = \frac{x-1}{x}$, $q(x) = \frac{1-x}{x^2}$ $\Longrightarrow xp(x) = -1+x$, $x^2q(x) = 1-x$

درنتیجه نقطه‌ی $x_0=0$ نقطه‌ی منفرد منظم است. $\Longleftarrow$ $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$

$r^2-2r+1=0 \Rightarrow \{r_1, r_2 = 1 \Longrightarrow y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}$, $y_2 = y_1\ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+1}$

$y_1' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_n x^n$, $y_1'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)a_n x^{n-1}$

$\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_n x^{n+2} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = 0$

$\sum_{n=-1}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+1}x^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_n x^{n+2} - \sum_{n=-1}^{\infty}(n+2)a_{n+1}x^{n+2} + \sum_{n=-1}^{\infty} a_{n+1}x^{n+2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = 0$

$n=-1 : \quad 0 - a_0x^1 + a_0x^1 = 0$

$\sum_{n=0}^{\infty}\Big[\big((n+1)(n+2) - (n+2) + 1\big)a_{n+1} + \big((n+1) - 1\big)a_n\Big]x^{n+2} = 0$

$(n^2+2n+1)a_{n+1} + na_n = 0$ $\quad \begin{cases} a_{n+1} = \frac{-n}{(n+1)^2}a_n \\ n \geq 0 \end{cases}$

$n=0 \Rightarrow a_1 = 0 \Rightarrow a_2 = 0, a_3 = 0, \dots \Longrightarrow y_1 = a_0x$

$y_2 = V y_1$

مثال: نوع نقطه‌ی $x_0=0$ را برای معادله‌ی $x^2y'' + x(2+3x)y' - 2y = 0$ تعیین کنید سپس جواب معادله را حول همین نقطه به صورت سری توانی بنویسید.

$y'' + \frac{2+3x}{x}y' - \frac{2}{x^2}y = 0$ $\quad p(x) = \frac{2+3x}{x}$, $q(x) = \frac{-2}{x^2}$

$x_0=0$ نقطه‌ی منفرد معادله.

$\left.\begin{array}{l} xp(x) = 2+3x \\ x^2q(x) = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow$ $x_0=0$ منفرد منظم است

$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \Rightarrow r^2+r-2=0 \begin{cases} r_1 = 1 \\ r_2 = -2 \end{cases} \Longrightarrow y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}$, $y_2 = cy_1\ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-2}$

$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} \Rightarrow y_1' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+1)x^n \Longrightarrow y_1'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)a_n x^{n-1}$

$\sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1)a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} 3(n+1)a_n x^{n+2} - \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^{n+1} = 0$

$\sum_{n=-1}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+1}x^{n+2} + \sum_{n=-1}^{\infty} 2(n+2)a_{n+1}x^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} 3(n+1)a_n x^{n+2} - \sum_{n=-1}^{\infty} 2a_{n+1}x^{n+2} = 0$

یکشنبه

۹۰/۹/۶

میانترم دوم

— حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از سری‌ها حول یک نقطهٔ منفرد منظم (غیرعادی) (سری فروبنیوس)

$y''+p(x)y'+q(x)y=0$

$xp(x)=p_0+p_1x+p_2x^2+\dots$

$x^2q(x)=q_0+q_1x+\dots$

مثال/ جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل زیر را بصورت یک سری توانی حول نقطهٔ $x_0=0$ بنویسید.

$$2x^2y''+3xy'\overbrace{-(1+x)y}^{=-y-xy}=0$$

$$y''+\frac{3}{2x}y'-\frac{(1+x)}{2x^2}y=0 \qquad p(x)=\frac{3}{2x} \qquad q(x)=\frac{-(1+x)}{2x^2}$$

پس $x_0=0$ نقطهٔ منفرد معادله است، بنابراین حق نداریم بصورت $y=\sum a_nx^n$ بنویسیم. حال باید ببینیم x_0 نقطهٔ منفرد (منظم) است یا خیر؟

$xp(x)=\frac{3}{2}$

$x^2q(x)=-\frac{1}{2}(x)-\frac{1}{2}$

چون $x_0=0$ منفرد منظم است:

$$\boxed{y=\sum a_nx^{n+r}}$$

معادلهٔ مشخصه $\boxed{r^2+(p_0-1)r+q_0=0}\to r^2+(\frac{3}{2}-1)r-\frac{1}{2}=0 \to r_1=\frac{1}{2},\quad r_2=-1$

پس یک جواب معادله $\to \boxed{y_1=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r_1}}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1/2}$

$r_1-r_2=3/2 \to \boxed{y_2=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^{n-1}} \to r_2$

$$y_1=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1/2}\to y_1'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1/2)a_nx^{n-1/2}\to y_1''=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1/2)(n-1/2)a_nx^{n-3/2}$$

جایگذاری در اولیه $\to$

$$\sum_{n=0}^{\infty}2(n+1/2)(n-1/2)a_nx^{n+1/2}+\sum_{n=0}^{\infty}(3n+3/2)a_nx^{n+1/2}-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1/2}-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+3/2}=0$$

$$\sum_{\cancel{n=-1}}^{\infty}(2n+3)(n+1/2)a_{n+1}x^{n+3/2}+\sum_{\cancel{n=-1}}^{\infty}(3n+9/2)a_{n+1}x^{n+3/2}-\sum_{\cancel{n=-1}}^{\infty}a_{n+1}x^{n+3/2}-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+3/2}=0$$

$n=0$ $\quad$ $n=0$ $\quad$ $n=0$

چون نقطهٔ شروع صفر است پس $n=-1$ را به $n=0$ تبدیل می‌کنیم

$$n=-1\to \underbrace{1(-1/2)a_0x^{1/2}}_{\text{اولی}}+\underbrace{\frac{3}{2}a_0x^{1/2}}_{\text{دومی}}-\underbrace{a_0x^{1/2}}_{\text{سومی}}=0$$

$$\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left((2n+3)(n+1/2)+(3n+9/2)-1\right)a_{n+1}-a_n\right]x^{n+3/2}=0$$

$$\to (2n^2+7n+5)a_{n+1} - a_n = 0 \longrightarrow \boxed{a_{n+1} = \frac{1}{2n^2+7n+5}a_n \quad n \geq 0}$$

آنگاه

$$\begin{cases} n=0 \to a_1 = \frac{1}{5}a_0 \\ n=1 \to a_2 = \frac{1}{14}a_1 = \frac{1}{70}a_0 \\ n=2 \to a_3 = \frac{1}{27}a_2 = \frac{1}{1890}a_0 \end{cases}$$

$$\to y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1/2} = a_0\left(x^{1/2} + \frac{1}{5}x^{3/2} + \frac{1}{70}x^{5/2} + \frac{1}{1890}x^{7/2} + \cdots\right)$$

و از

$$\longrightarrow y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-1} \longrightarrow y_2' = \sum_{n=0}^{\infty}(n-1)b_n x^{n-2} \to y_2'' = \sum_{n=0}^{\infty}(n-1)(n-2)b_n x^{n-3}$$

جانشانی y'' و y' در معادله داریم

$$\longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(2n-2)(n-2)b_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(3n-3)b_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = 0$$

$$\to \sum_{n=-1}^{\infty} 2n(n-1)b_{n+1}x^n + \sum_{n=-1}^{\infty} 3n b_{n+1}x^n - \sum_{n=-1}^{\infty} b_{n+1}x^n - \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} = 0$$

چون توان‌ها را یکی کردیم
دیگر آن را تغییر نمی‌دهیم

$$n=-1 \to -2(-2)b_0x^{-1} - (3n)b_0x^{-1} - b_0x^{-1} \to$$ حاصل صفر است

پس سه Σ اول را از صفر شروع می‌کنیم

$$\to \sum_{n=0}^{\infty}\Big[\big((2n^2-2n)+3n-1\big)b_{n+1} - b_n\Big]x^n = 0 \to (2n^2+n-1)b_{n+1} = b_n$$

رابطه بازگشتی

$$\longrightarrow \boxed{b_{n+1} = \frac{1}{2n^2+n-1}b_n}$$

$$n=0 \to b_1 = -b_0$$
$$n=1 \to b_2 = \frac{1}{2}b_1 = -\frac{1}{2}b_0$$
$$n=2 \to b_3 = \frac{1}{9}b_2 = -\frac{1}{18}b_0$$
$$\vdots$$

$$\longrightarrow y_2 = b_0\left(x^{-1} + (-1) - \frac{1}{2}x - \frac{1}{18}x^2 + \cdots\right)$$

$$\longrightarrow y_g = y_1 + y_2$$

مثال/ نوع نقطه‌ی $x_0=0$ را برای معادله‌ی $x^2y''+x(2+3x)y'-2y=0$ تعیین کنید و سپس جواب این معادله را حول همین نقطه به صورت سری توانی بنویسید.

$$y''+\frac{2+3x}{x}y'-\frac{2}{x^2}y=0 \qquad P(x)=\frac{2+3x}{x} \qquad q(x)=-\frac{2}{x^2}$$

$x_0=0$ منفرد است. (چرا؟)

$$\left.\begin{array}{l} xP(x)=2+3x \\ x^2q(x)=-2 \end{array}\right\} \rightarrow \text{تحلیلی‌اند} \rightarrow \text{منظم} \rightarrow y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}$$

پیدا کردن r : $r^2+(2-1)r-2=0 \rightarrow r^2+r-2=0 \Rightarrow r_1=1,\ r_2=-2$

y_1 را باید به ازای ریشه‌ی بزرگتر بدست آوریم $\rightarrow y_1=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}$ $\qquad r_1-r_2=$ صحیح $\rightarrow y_2=Cy_1\ln x+\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^{n-2}$

$$\rightarrow y_1=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}\rightarrow y_1'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_nx^n\rightarrow y_1''=\sum_{n=0}^{\infty}n(n+1)a_nx^{n-1}$$

جایگذاری در صورت سوال $\rightarrow$

$$\sum_{n=0}^{\infty}n(n+1)a_nx^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}(2n+2)a_nx^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}(3n+3)a_nx^{n+2}-\sum_{n=0}^{\infty}2a_nx^{n+1}=0$$

تغییر اندیس $\rightarrow$

$$\sum_{n=-1}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+1}x^{n+2}+\sum_{n=-1}^{\infty}(2n+4)a_{n+1}x^{n+2}+\sum_{n=0}^{\infty}(3n+3)a_nx^{n+2}-\sum_{n=-1}^{\infty}2a_{n+1}x^{n+2}=0$$

$\rightarrow n=-1 \rightarrow \Sigma_{\text{اولی}}=0 \qquad \Sigma_{\text{دومی}}=2a_0x \qquad \Sigma_{\text{سومی}}=-2a_0 \rightarrow$ حاصل $=0 \rightarrow$ Σها را از صفر شروع می‌کنیم

$$\rightarrow\sum_{n=-1}^{\infty}\left[\left(n^2+3n+2+2n+4-2\right)a_{n+1}+(3n+3)a_n\right]x^{n+2}=0$$

$$\rightarrow(n^2+5n+4)a_{n+1}+(3n+3)a_n=0\rightarrow a_{n+1}\cancel{(n+1)}(n+4)=-3a_n\cancel{(n+1)}$$

$$\rightarrow\boxed{a_{n+1}=\frac{-3}{(n+4)}a_n \qquad n\geq 0}$$

$n=0\rightarrow a_1=-\frac{3}{4}a_0$

$n=1\rightarrow a_2=-\frac{3}{5}a_1=\frac{9}{20}a_0$

$n=2\rightarrow a_3=\frac{-3}{6}a_2=\frac{-27}{120}a_0$

$\vdots$

$$y_1=\overset{1}{\cancel{a_0}}\left(x+\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{20}x^3-\frac{27}{120}x^4\dots\right)$$

ولی $\rightarrow y_2=Cy_1\ln x+\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^{n-2}$

$$y_1'=\left(1-\frac{3}{2}x+\frac{27}{20}x^2+\dots\right)$$

$$y_1''=\left(-3/2+\frac{27}{10}x+\dots\right)$$

۹۰/۹/۱۲

تمرین

مثال ۱)

$$x^2y'' - (x+2)y = 0 \quad \text{حول نقطه} \quad x_0 = 0$$

$$y'' - \frac{x+2}{x^2}y = 0 \qquad P(x) = 0 \quad , \quad q(x) = \frac{-x-2}{x^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} xP(x) = 0 \\ x^2 q(x) = -2-x \end{array}\right\} \Rightarrow x_0 = 0 \text{ منفرد منظم}$$

$$\boxed{y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}} \qquad r^2 + (p_0 - 1)r + q_0 = 0 \rightarrow r^2 - r - 2 = 0 \quad \begin{cases} r_1 = 2 \\ r_2 = -1 \end{cases}$$

جواب اول $y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} \rightarrow y_1' = \sum (n+2) a_n x^{n+1} \rightarrow y_1'' = \sum (n+2)(n+1) a_n x^n$ ⇐ جایگذاری در صورت سوال

جواب دوم $y_2 = c y_1 \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-1}$

جایگذاری: $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_n x^{n+2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+3} - \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^{n+2} = 0$

$$\sum_{n=-1}^{\infty} (n+2)(n+3) a_{n+1} x^{n+3} - \sum_{n=0} a_n x^{n+3} - \sum_{n=-1}^{\infty} 2a_{n+1} x^{n+3} = 0$$

$$n=-1 \rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left[\big((n+2)(n+3) - 2 \big) a_{n+1} - a_n \right] x^{n+3} = 0$$

$$(n^2 + 5n + 4) a_{n+1} = a_n \rightarrow \boxed{a_{n+1} = \frac{1}{n^2 + 5n + 4} a_n}^{\,n \geq 0}$$

$n = 0 \rightarrow a_1 = \frac{1}{4} a_0$

$n = 1 \rightarrow a_2 = \frac{1}{10} a_1 = \frac{1}{40} a_0$

$n = 2 \rightarrow a_3 = \frac{1}{18} a_2 = \frac{1}{720} a_0$

$\vdots$

$$\Rightarrow y_1 = \overset{1}{\cancel{a_0}}\left(x^2 + \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{40}x^4 + \cdots\right)$$

فعلاً a_0 را یک می‌گذاریم بعد آخر سر که ...

$$y_1' = \left(2x + \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{10}x^3 + \cdots\right)$$

$$y_1'' = \left(2 + \frac{6}{4}x + \frac{3}{10}x^2 + \cdots\right)$$

$$y_2' = c y_1' \ln x + \frac{c}{x} y_1 + \sum_{n=0}^{\infty} (n-1) b_n x^{n-2}$$

$$y_2'' = c y_1'' \ln x + \underbrace{\frac{c}{x} y_1' + \frac{c}{x} y_1'}_{\frac{2c}{x} y_1'} + \sum_{n=0}^{\infty} (n-1)(n-2) b_n x^{n-3}$$

از جملات ... صفر است
/
از ... صرف نظر کن

جایگذاری در معادلات سوال :

$$\cancel{2x^2y_1''\ln x} + 2cxy_1' - cy_1 + \sum_{n=0}^{\infty}(n-1)(n-2)x^{n-1}b_n - \cancel{cxy_1\ln x} - \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n - \cancel{2cy_1\ln x} - \sum_{n=0}^{\infty} 2b_n x^{n-1} = 0$$

$$\Rightarrow 2cx\left(2x + \frac{3}{4}x^2 + \cdots\right) - c\left(x^2 + \frac{1}{4}x^3 + \cdots\right) + \sum_{n=0}^{\infty}(n-1)(n-2)b_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2b_n x^{n-1} = 0$$

ضریب x^{-1} $= (-1)(-2)b_0 - 2b_0$ = ضریب سمت راست $=0$ $\rightarrow -2b_0 - 2b_0 = 0 \rightarrow b_0$ دلخواه

عدد ثابت $-b_0 - 2b_1 = 0 \rightarrow b_1 = \frac{-1}{2}b_0$

ضریب x $-b_1 - 2b_2 = 0 \rightarrow b_2 = \frac{-1}{2}b_1 = \frac{1}{4}b_0$

به کمک جواب معلوم می شود که b_3 دلخواه است.

ضریب x^2 $4c - c + \cancel{(2)(1)b_3} - b_2 - \cancel{2b_3} = 0 \rightarrow b_3 =$ دلخواه ; $\rightarrow 3c - b_2 = 0 \rightarrow c = \frac{1}{12}b_0$

$$y_2 = \frac{1}{12}b_0 y_1 \ln x + b_0\left(x^{-1} + \left(-\tfrac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}x + \underbrace{b_3x^2 + \cdots}\right) \rightarrow y_2 = \frac{1}{12}b_0 y_1 \ln x + b_0\left(x^{-1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x\right)$$

چون مستقل فرض نیست ← احتیاجی به نوشتن نیست

$$\Rightarrow y_g = c_1y_1 + c_2y_2$$

مثال/ جواب معادله دیفرانسیل $x^2y''+x(x-1)y'+(1-x)y=0$ را بصورت سری توانی حول نقطه $x_0=0$ بنویسید

$$y''+\frac{(x-1)}{x}y'+\frac{(1-x)}{x^2}y=0 \qquad p(x)=\frac{x-1}{x} \qquad q(x)=\frac{1-x}{x^2} \rightarrow$$

در نقطه $x=0$ تحلیلی نیستند پس غیر منفرد است

$$xp(x)=x-1 \quad , \quad x^2q(x)=1-x \longrightarrow$$

اما این دو در $x_0=0$ تحلیلی هستند و منفرد منظم است

$$\xrightarrow{\text{پس}} y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}$$

$$r^2-2r+1=0 \longrightarrow r_1=r_2=1$$

$$y_1=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}$$

$$y_2=y_1\ln x+\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^{n+1}$$

$$y_1=\sum_0^{\infty}a_nx^{n+1} \ , \ y_1'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_nx^{n} \ , \ y_1''=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)na_nx^{n-1}$$

$$\xrightarrow{\text{جاگذاری}} \sum_{n=0}^{\infty}n(n+1)a_nx^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_nx^{n+2}-\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_nx^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+2}=$$

$$\sum_{n=-1}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+1}x^{n+2}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_nx^{n+2}-\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)a_{n+1}x^{n+2}+\sum_{n=-1}^{\infty}a_{n+1}x^{n+2}-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+2}=0$$

اگر $n=-1$ ، $\sum_{\text{اول}}=0$ + $\sum_{\text{دومی}}=-a_0x$ + $\sum_{\text{چهارم}}=a_0x$ $=0$ پس اندیس های ۱- را به صفر تبدیل می‌کنیم

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big[\Big((n+1)(n+2)-(n+2)+1\Big)a_{n+1}+\Big((n+1)-1\Big)a_n\Big]x^{n+2}=0$$

$$(n^2+2n+1)a_{n+1}=-na_n \rightarrow a_{n+1}=\frac{-n}{n^2+2n+1}a_n=\boxed{\frac{-n}{(n+1)^2}a_n} \quad n\geq 0$$

$n=0 \rightarrow a_1=0$

$n=1 \rightarrow a_2=0 \ , a_3=0 \ , \dots$

$$\xrightarrow{\text{پس}} y_1=a_0x \longrightarrow y_1=x \qquad \rightarrow y_2=vy_1 \rightarrow v=\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx}dx$$

تابع گاما

تابع گامای x را که با نماد $\Gamma(x)$ نشان می‌دهیم بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\boxed{\Gamma(x)=\int_0^{\infty}t^{x-1}e^{-t}dt \qquad x>0}$$

$$\Gamma(x+1)=\int_0^{\infty}t^{x+1-1}e^{-t}dt=\int_0^{\infty}t^{x}e^{-t}dt$$

$t^x=u \ , \ xt^{x-1}dt=du$

$e^{-t}dt=dv \ , \ -e^{-t}=v$

با انتگرال گیری به روش جزء به جزء داریم:

$$\begin{cases} t^x=u \\ \dots \end{cases} \qquad \begin{cases} e^{-t}dt=dv \\ \dots \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Gamma(x+1) = \underbrace{-t^{x}e^{-t}\Big]_0^{\infty}}_{\text{صفر}} + x\int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt \Rightarrow \boxed{\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)} \quad (*)$$

به همین ترتیب

$$\Gamma(x+2) = (x+1)\Gamma(x+1) = x(x+1)\Gamma(x)$$

$$\Gamma(x+3) = (x+2)\Gamma(x+2) = x(x+1)(x+2)\Gamma(x)$$

$$\Longrightarrow \Gamma(x+n+1) = x(x+1)(x+2)\dots(x+n)\Gamma(x)$$

چند مثال/

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t}\,dt = -e^{-t}\Big]_0^{\infty} = 0-(-1) = 1$$

با توجه به (*)

$$\Gamma(2) = 1\,\Gamma(1) = 1\times 1 = 1$$

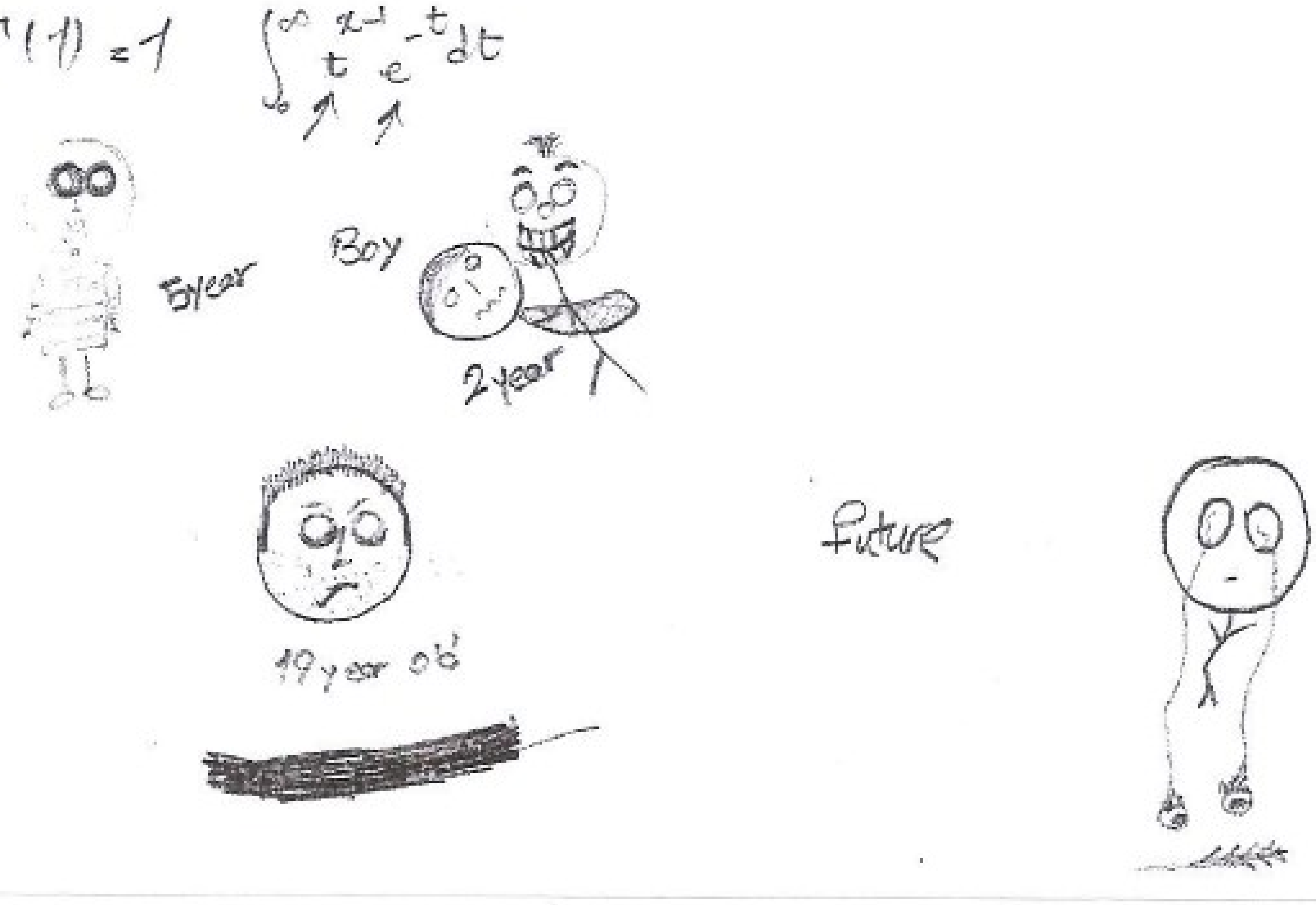
$$\Gamma(3) = 2\,\Gamma(2) = 2\times 1\,\Gamma(1) = 2$$

$$\Gamma(4) = 3\,\Gamma(3) = 3\times 2\,\Gamma(2) = 3\times 2\times 1\,\Gamma(1) = 3!$$

پس اگر $x \in N$ $\leftarrow$ $\Gamma(x+1) = x!$

$$\Gamma(x+1) = \Gamma(x).x$$

$$\Gamma(1) = 1 \qquad \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t}\,dt$$



۹۰/۹/۱۹

محاسبهٔ انتگرال تابع گامای x به ازای همهٔ مقادیر $x>0$ (و صحیح نباشد) به آسانی قابل محاسبه نیست؛ اما با روش‌های موجود در محاسبات عددی می‌توان این مقدار را تقریب نمود. جداولی موجودند که در آنها مقدار تابع $\Gamma(x)$ به ازای $x\in[1,2]$ مقادیرشان ثبت شده است. مثلاً با مراجعه به این جدول ملاحظه می‌شود که $\Gamma(\frac{3}{2})=0.8862$

$$\Gamma(5/2)=? \xrightarrow[\text{رابطهٔ }*]{\text{با توجه به}} \Gamma(\tfrac{5}{2})=\tfrac{3}{2}\,\Gamma(3/2)=\tfrac{3}{2}\times 0.8862$$

$$\Gamma(7/2)=\tfrac{5}{2}\,\Gamma(5/2)=\tfrac{5}{2}\times\tfrac{3}{2}\,\Gamma(\tfrac{3}{2})=\tfrac{15}{4}\times 0.8862$$

تعریف: به ازای هر $x>0$ (صحیح یا غیر صحیح): $\boxed{\Gamma(x+1)=x!}$

مثال/ $(7/2)!=\Gamma(9/2)=\tfrac{7}{2}\,\Gamma(7/2)=\cdots$

ـ برای $x<0$ و غیر صحیح ← $\boxed{\Gamma(x)=\dfrac{\Gamma(x+1)}{x}}$

$\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

مثال/

$$\Gamma(-1/2)=\frac{\Gamma(1/2)}{-1/2}=\frac{\Gamma(3/2)}{-1/2\times 1/2}$$

بدین ترتیب برای $x>0$ و xهای منفی و غیر صحیح $\Gamma(x+1)=x!$

$t\to 0 \Rightarrow x\to 0$

$t\to\infty \Rightarrow x\to\infty$

مثال/ مطلوبست محاسبهٔ $\Gamma(1/2)$؟

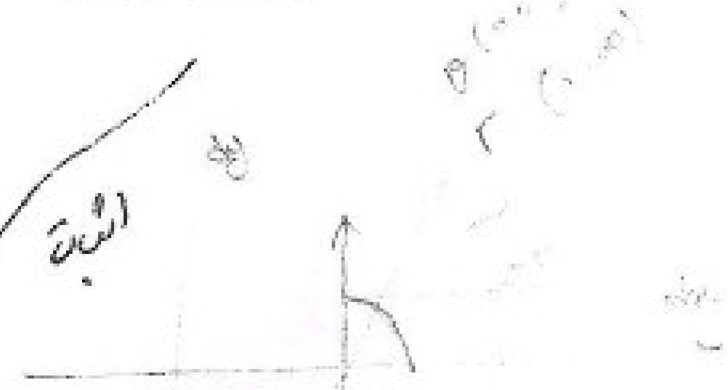
$t=x^2$ ← از تغییر متغیر استفاده می‌کنیم

$$\Gamma(1/2)=\int_0^\infty t^{-1/2}e^{-t}\,dt=\int_0^\infty (x^2)^{-1/2}e^{-x^2}\times 2x\,dx=2\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$$

نکته $\begin{cases}\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\\[2mm] \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}\end{cases}$

حفظ شود!

اثبات



$I=\int_0^\infty e^{-x^2}dx$

$I=\int_0^\infty e^{-y^2}dy$

$I^2=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$

$$\Rightarrow I^2=\int_0^{\pi/2}\int_0^\infty r e^{-r^2}\,dr\,d\theta$$

$$I^2=\int_0^{\pi/2}\left(-\tfrac{1}{2}e^{-r^2}\right)_0^\infty d\theta=\int_0^{\pi/2}(0+\tfrac{1}{2})\,d\theta=\frac{\pi}{4}$$

$$I^2=\frac{\pi}{4}\to I=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

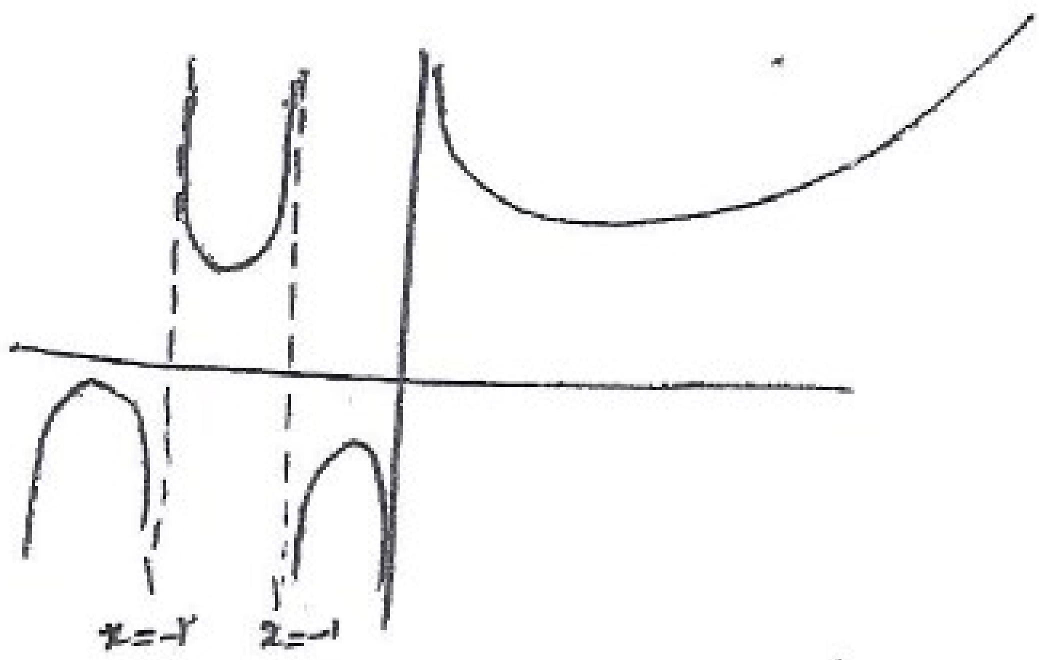
بنابراین $\Gamma(-\frac{1}{2}) = \frac{\Gamma(-\frac{1}{2}+1)}{-\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{-\frac{1}{2}} = -2\sqrt{\pi}$

مثال / $\Gamma(0.6)$ و $\Gamma(-2.4)$ را بیابید.

$$\Gamma(0.6) = \frac{\Gamma(1.6)}{0.6} = \frac{0.89352}{0.6}$$

$$\Gamma(-2.4) = \frac{\Gamma(-1.4)}{-2.4} = \frac{\Gamma(-0.4)}{(-2.4)(-1.4)} = \frac{\Gamma(0.6)}{(-2.4)(-1.4)(-0.4)} = \frac{\Gamma(1.6)}{(-2.4)(-1.4)(-0.4)(0.6)}$$

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$$



$\lim\limits_{x \to 0^+} \Gamma(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^-} \Gamma(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -1^+} \Gamma(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x \to -1^-} \Gamma(x) = +\infty$

$\Longrightarrow \Gamma(x+1) = x!$

خلاصه $\rightarrow$ $x>0$ یا $x<0$ ناصحیح

$\frac{1}{\Gamma(x)} = 0$ $x<0$ و صحیح

مثال / مقدار انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$I = \int_0^1 x^2 (\ln x)^3 \, dx$$

باید به وسیله تغییر متغیر کاری کرد تا $[0,1]$ را به $[0,\infty)$ تبدیل کند تا بتوان از تابع Γ حل کرد

$$x = e^{-t} \begin{cases} x \to 0 \Rightarrow t \to +\infty \\ x \to 1 \Rightarrow t \to 0 \end{cases} \Rightarrow dx = -e^{-t} dt$$

$$\Rightarrow I = \int_\infty^0 e^{-2t} (-t)^3 \overbrace{(-e^{-t}) dt}^{dx} \Rightarrow I = -\int_0^\infty t^3 e^{-3t} dt$$

یا از روش گاما

یا به طور جزء به جزء حل کنیم

روش گاما $\Rightarrow$ $3t = u \Rightarrow I = -\int_0^\infty \left(\frac{u}{3}\right)^3 e^{-u} \frac{1}{3} du = \frac{-1}{81} \int_0^\infty u^3 e^{-u} du = \frac{-1}{81} \Gamma(4) = \frac{-3!}{81}$

۹۹/۲/۳۰ — از ادامه جلسه قبل

آنگاه $n=0 \rightarrow a_2 = \dfrac{-1}{2(2p+2)} a_0$

$$n=2 \rightarrow a_4 = \frac{-1}{4(2p+4)} a_2 = \frac{1}{2^4 \times 2! \times (p+1)(p+2)} a_0$$

$$n=4 \rightarrow a_6 = \frac{-1}{6(2p+6)} a_4 = \frac{-1}{2^6\, 3!\, (p+1)(p+2)(p+3)} a_0$$

$\vdots$

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k}\, k!(p+1)(p+2)\cdots(p+k)} a_0$$

$$\Rightarrow y = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}\, n!\,(p+1)(p+2)\cdots(p+n)} x^{2n+p} \qquad a_0 \stackrel{\text{دلخواه}}{=} \frac{1}{2^p\, p!} = \frac{1}{2^p\, \Gamma(p+1)}$$

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^p p!\, 2^{2n}\, n!\,(p+1)(p+2)\cdots(p+n)} x^{2n+p} \qquad p! = p(p-1)! \qquad \Gamma(p) = (p-1)!$$

$$J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p} \qquad \Gamma(n+p+1) = p(p+1)\cdots(p+n)\,\Gamma(p)$$

اگر p عدد صحیح نباشد جواب دیگر معادله بسل

از تبدیل p به $-p$ در $J_p(x)$ بدست می‌آید:

$$J_{-p}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n-p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-p}$$

$$y = c_1 J_p(x) + c_2 J_{-p}(x)$$

مثال/ جواب عمومی معادله $x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0$ را بصورت توابع بسل بنویسید.

$$p^2 = 1/4 \rightarrow p = \pm 1/2 \Rightarrow y_g = c_1 J_{1/2}(x) + c_2 J_{-1/2}(x)$$

$$J_\nu(x) = \sum \frac{(-1)^n}{n!(n+\nu)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}$$

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$$

$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$$

$$\Rightarrow y_g = c_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+1/2+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1/2} + c_2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n-1/2+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-1/2}$$

———— ☆ ———— ☆ ———— ☆ ———— ☆

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

شبیه $\cos x$

$$J_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+1+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}$$

شبیه $\sin x$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

مثال/

$$I=\int_0^\infty 2\sqrt{x}\, e^{-3x^2}\,dx$$

دیگر نیازی نیست بازه‌ی تغییر را عوض کنیم تنها کافی است ظاهر مسئله را شبیه تابع گاما کنیم. «تغییر متغیر»

$$3x^2=t \Rightarrow 6x\,dx=dt$$

$$dx=\frac{dt}{6x}=\frac{dt}{6\sqrt{\frac{t}{3}}}$$

$$x-1=\frac{-1}{4} \Rightarrow x=\frac{3}{4} \Rightarrow \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$\Rightarrow I=\int_0^\infty \left(\frac{t}{3}\right)^{1/4} e^{-t}\times\frac{dt}{6\left(\frac{t}{3}\right)^{1/2}}=\frac{1}{3}\int_0^\infty \left(\frac{t}{3}\right)^{-1/4} e^{-t}\,dt=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3^{-1/4}}\int_0^\infty t^{-1/4} e^{-t}\,dt$$

معادلات بسل

صورت کلی این معادله عبارت است از $x^2y''+xy'+(x^2-p^2)y=0$ که $p\geq 0$ عددی ثابت است

$$y''+\frac{1}{x}y'+\frac{x^2-p^2}{x^2}y=0 \Rightarrow p(x)=\frac{1}{x} \qquad q(x)=\frac{x^2-p^2}{x^2}$$

$x_0=0$ نقطه منفرد است $\Leftarrow$ $\qquad xp(x)=1 \qquad x^2q(x)=-p^2+x^2$

پس $x_0=0$ منفرد منظم است $\Leftarrow$ $\qquad y=\sum_{n=0}^\infty a_n x^{n+r}$

$$\xrightarrow[\text{ر}]{r\ \text{ساده کردن}} r^2+(\overset{p}{1}-1)r-p^2=0 \Rightarrow r^2-p^2=0 \Rightarrow r_1=p,\quad r_2=-p$$

$$\boxed{y_1=\sum_{n=0}^\infty a_n x^{n+p}}$$

با جایگذاری y_1 و مشتقات آن در معادله بسل رابطه بازگشتی زیر بدست می‌آید:

$$a_{n+2}=\frac{-1}{(n+2)(2p+n+2)}a_n \qquad n\geq 0$$

و همچنین $a_1=a_3=\dots=a_{2n+1}=0$

$$J_0(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \qquad J_1(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$J_0(0) = 1 \xrightarrow{\text{میدانیم}} \cos 0 = 1 \qquad J_0(-x) = J_0(x) \longrightarrow \cos(-x) = \cos x$$

$$J_0'(x)\Big|_{x=0} = 0 \qquad (\cos x)'\Big|_{x=0} = 0$$

$$J_1(0) = 0 \longrightarrow \sin 0 = 0 \qquad J_1(-x) = -J_1(x) \longrightarrow \sin(-x) = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx} J_0(x) = -J_1(x) \qquad \frac{d}{dx} J_1(x) = J_0(x) - \frac{1}{x} J_1(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^p J_p(x)\right] = x^p J_{p-1}(x) \qquad \frac{d}{dx}\left[x^{-p} J_p(x)\right] = -x^{-p} J_{p+1}(x)$$

$$\frac{d}{dx} J_p(x) = J_{p-1}(x) - \frac{p}{x} J_p(x) \qquad \frac{d}{dx} J_p(x) = -J_{p+1}(x) + \frac{p}{x} J_p(x)$$

$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$ (اثبات) $\qquad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$ (اثبات)

$$J_{1/2}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+1/2+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1/2} \overset{?}{=} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(1/2)(1/2+1)\cdots(1/2+n)\underbrace{\Gamma(1/2)}_{\sqrt{\pi}}\, 2^{2n+1/2}} x^{2n+1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\underbrace{2^{n} \times 2^{n}}_{2^{2n}} \times 2^{1/2} \times n!\; \underbrace{(1/2)(3/2)\cdots\left(\frac{2n+1}{2}\right)}_{\text{۲n+1 پرانتز}} \sqrt{\pi}} x^{2n+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \times 2}{2^n \times 2^{1/2}\, n!\; 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)\, \sqrt{\pi}} x^{2n+1/2} \qquad 2^n n! = 2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overset{\sqrt{2}}{(-1)^n \times 2}}{2^{1/2}\, \underbrace{(2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2n)(1 \times 3 \times 5 \times \cdots (2n+1)}_{(2n+1)!} \sqrt{\pi}} x^{2n+1/2}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{2}}{(2n+1)!\, \sqrt{\pi}} x^{2n+1/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$$

مثال/ با تغییر متغیر مناسب معادله $y'' + (\underbrace{3e^{2x}}_{x^2} - 2)y = 0$ را به معادله بسل تبدیل کنید و سپس جواب آن را برحسب توابع بسل بنویسید.

$\sqrt{3}e^{x} = u \qquad \frac{du}{dx} = \sqrt{3}e^{x} = u$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = u\cdot\frac{dy}{du}$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \underbrace{\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{du}\cdot u\right)}_{\text{مشتق نسبت به } x} = \frac{d^2y}{du^2}u^2 + u\frac{dy}{du} \longrightarrow$$

با جایگذاری در معادله داریم

$$(\quad)\times u + \left(\overset{u}{\frac{du}{dx}}\right)\frac{dy}{du} \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{du}\right) = \frac{d}{du}\left(\frac{dy}{du}\right)\frac{du}{dx}$$

$$u^2y''_u + uy'_u + (u^2-2)y = 0 \qquad p^2 = 2 \longrightarrow p = \pm\sqrt{2}$$

$$J_{\sqrt{2}}(u) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+\sqrt{2}+1)}\left(\frac{u}{2}\right)^{2n+\sqrt{2}}$$

$$J_{-\sqrt{2}}(u) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n-\sqrt{2}+1)}\left(\frac{u}{2}\right)^{2n-\sqrt{2}}$$

هرجا u داریم جای آن $\sqrt{3}e^{x}$ را می‌گذاریم

* تبدیلات لاپلاس و کاربرد آن در معادلات دیفرانسیل *

تبدیل لاپلاس تابع $f(x)$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\boxed{L\{f(x)\} = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x)\,dx = F(s)} \quad , s>0$$

$\xrightarrow{\text{پس}} L\{f(x)\} = F(s)$

همچنین معکوس تبدیل لاپلاس $f(x)$ را با $F^{-1}(s)$ یا $L^{-1}\{F(s)\}$ نشان می‌دهیم و بصورت زیر تعریف می‌کنیم

$$L\{f(x)\} = F(s) \iff L^{-1}\{F(s)\} = f(x)$$

تبدیل لاپلاس و معکوس آن دارای خاصیت خطی هستند یعنی اگر a و b دو عدد حقیقی و $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع باشند آنگاه

$$aF(s) \pm bG(s) = aL\{f(x)\} \pm bL\{g(x)\} = L\{af(x) \pm bg(x)\} \, *$$

$$L^{-1}\{aF(s) \pm bG(s)\} = af(x) \pm bg(x)$$

مثال/

$$L\{1\} = \int_0^\infty e^{-sx}\,dx = \frac{-1}{s}e^{-sx}\Big]_0^\infty = 1/s$$

$$\rightsquigarrow L\{1\} = \frac{1}{s} \iff L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1$$

$$L\{5\} = 5L\{1\} = \frac{5}{s} \qquad L^{-1}\left\{\frac{-7}{s}\right\} = -7L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = -7$$

$$L\{x\} = \int_0^\infty x e^{-sx}\,dx \qquad \begin{array}{l} x = u \longrightarrow dx = du \\ e^{-sx}dx = dv \longrightarrow \frac{-1}{s}e^{-sx} = v \end{array}$$

$$\Rightarrow L\{x\} = uv - \int v\,du = \underbrace{\frac{-x}{s}e^{-sx}\Big]_0^\infty}_{0} + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-sx}\,dx = \frac{1}{s}\times\frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}$$

$$\rightsquigarrow L\{x\} = \frac{1}{s^2} \iff L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = x$$

نکته ← می‌دانیم که $\int_0^\infty e^{-sx}\,dx = \frac{1}{s} \xrightarrow[\text{نسبت به } s]{\text{مشتق از طرفین}} \underbrace{\int_0^\infty x e^{-sx}\,dx}_{L\{x\}} = \frac{1}{s^2}$ (*)

$$L\{x^2\} = \int_0^\infty x^2 e^{-sx}\,dx \xrightarrow{\text{روش اول}} \begin{cases} x^2 = u \\ e^{-sx}dx = dv \end{cases}$$

$\xrightarrow{\text{روش دوم}}$ از * نسبت به s مشتق می‌گیریم $\int_0^\infty +x^2 e^{-sx}\,dx = \frac{2}{s^3}$

$$\longrightarrow L\{x^2\} = \frac{2}{s^3} \iff L^{-1}\left\{\frac{2}{s^3}\right\} = x^2$$

$$\xrightarrow{\text{مثال}} L^{-1}\left\{\frac{5}{s^3} + \frac{4}{s^2} + \frac{7}{s}\right\} = \frac{5}{2}x^2 + 4x + 7$$

فرمول: $\boxed{L\{x^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}} \iff L^{-1}\left\{\frac{n!}{s^{n+1}}\right\} = x^n$

مثال $L^{-1}\left\{\frac{4}{s^8}\right\} = \frac{4}{7!}x^7$

$$* \; L\{e^{ax}\} = \int_0^\infty e^{-sx}e^{ax}\,dx = \int_0^\infty e^{-(s-a)x}\,dx = \frac{-1}{s-a}e^{-(s-a)x}\Big]_0^\infty = \frac{1}{s-a} \qquad s > a$$

$L\{e^{2x}\}=\frac{1}{s+2}$ $\qquad L^{-1}\left\{\frac{5}{s-4}\right\} = 5e^{-4x}$ $\qquad L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s-1)}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{A}{s}+\frac{B}{s-1}\right\}$

از کسرهای ساده استفاده

۹۰/۹/۲۴

$L\{e^{iax}\}=\frac{1}{s-ia}$

تمرین

$L\{\sin ax\}=\int_0^\infty e^{-sx}\sin ax\,dx \quad \begin{cases}\sin ax = u\\ e^{-sx}dx = dv\end{cases}$ .. با دوبار جزء به جزء

اتحاد اویلر: $\sin ax=\frac{e^{iax}-e^{-iax}}{2i}$ $\qquad \cos ax=\frac{e^{iax}+e^{-iax}}{2}$

$\Rightarrow L\{\sin ax\}=\frac{1}{2i}L\{e^{iax}-e^{-iax}\}=\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{s-ia}-\frac{1}{s+ia}\right]=\frac{1}{2i}\left[\frac{\overbrace{\cancel{s}+ia-\cancel{s}+ia}^{2ia}}{s^2-i^2a^2}\right]=\left\{\frac{a}{s^2+a^2}\right\}$

$L\{\sin ax\}=\frac{a}{s^2+a^2} \Longleftrightarrow L^{-1}\left\{\frac{a}{s^2+a^2}\right\}=\sin ax$

$L\{\cos ax\}=\frac{s}{s^2+a^2} \Longleftrightarrow L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+a^2}\right\}=\cos ax$

$L\{e^{ax}\}=\frac{1}{s-a}$

$L\{\sin ax\}=\frac{a}{s^2+a^2}$

$L\{\cos ax\}=\frac{s}{s^2+a^2}$

$\sinh ax=\frac{e^{ax}-e^{-ax}}{2}$ $\qquad \cosh ax=\frac{e^{ax}+e^{-ax}}{2}$

$L\{\sinh ax\}=\frac{a}{s^2-a^2} \Longleftrightarrow L^{-1}\left\{\frac{a}{s^2-a^2}\right\}=\sinh ax$

$L\{\cosh ax\}=\frac{s}{s^2-a^2} \Longleftrightarrow L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-a^2}\right\}=\cosh ax$

* چند مثال حل می‌کنیم و بعد سراغ صورت‌های بالاتر می‌رویم *

مثال

$-L\{\sin 3x\}=\frac{3}{s^2+9}$ $\qquad -L\{\sinh 3x\}=\frac{3}{s^2-9}$

$-L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+5}\right\}=\cos\sqrt{5}\,x$ $\qquad -L^{-1}\left\{\frac{\overset{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}{5}}{s^2+5}\right\}=\sqrt{5}\sin\sqrt{5}\,x$

$L^{-1}\left\{\frac{2s+1}{s^2+12}\right\}=2L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+12}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+12}\right\}=2\cos\sqrt{12}\,x+\frac{1}{\sqrt{12}}\sin\sqrt{12}\,x$

$L^{-1}\left\{\frac{-s+5}{s^2-7}\right\}=-L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-7}\right\}+5L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-7}\right\}=-\cosh\sqrt{7}\,x+\frac{5}{\sqrt{7}}\sinh\sqrt{7}\,x$

$\sinh ax = \frac{e^{ax}-e^{-ax}}{2}$

$\cosh ax = \frac{e^{ax}+e^{-ax}}{2}$

قضیه:

اگر $L\{f(x)\}=F(s)$ آنگاه $L\{e^{ax}f(x)\}=F(s-a)$

اثبات:

$$L\{e^{ax}f(x)\} = \int_0^\infty e^{+ax}e^{-sx}f(x)\,dx = \int_0^\infty e^{-(s-a)x}f(x)\,dx$$

تغییر متغیر $s-a=A \Rightarrow \int_0^\infty e^{-Ax}f(x)\,dx = F(A) = F(s-a)$

در عکس:

$$L^{-1}\{F(s-a)\} = e^{ax}f(x)$$

مثال:

$-\; L\{x^2e^{3x}\} = \frac{2}{s^3} = \frac{2}{(s-3)^3}$

$-\; L\{\sin 2x\, e^{-x}\} = \frac{2}{(s+1)^2+4}$

اول $L\{\sin 2x\}$ را می‌نویسیم هرجا s داشتیم به $s-(-1)$ تبدیل می‌کنیم

$-\; L\{e^{ax}\} = L\{1\times e^{ax}\} = \frac{1}{s-a}$

$L\{\sinh ax\} = \frac{a}{s^2-a^2} \Leftrightarrow L^{-1}\{\frac{a}{s^2-a^2}\}$

$-\; L\{e^{5x}\cosh 3x\} \Rightarrow L\{\cosh 3x\} = \frac{s}{s^2-9}$ هرجا s داریم $s-5$ می‌گذاریم $\frac{s-5}{(s-5)^2-9}$

$L\{\cosh ax\} = \frac{s}{s^2-a^2} \Leftrightarrow L^{-1}\{\frac{s}{s^2-a^2}\} = \cosh$

$-\; L^{-1}\left\{\frac{2}{(s-1)^2+4}\right\} = \left\{\frac{2}{s^2+4}\right\} = e^{x}\sin 2x$

$-\; L^{-1}\left\{\frac{s+4}{(s+4)^2-12}\right\} = e^{-4x}\cosh\sqrt{12}x$

$-\; L^{-1}\left\{\frac{6}{s^2+2s+10}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{6=2\times3}{(s+1)^2+9}\right\} = e^{-x}2\sin 3x$

$\frac{6}{s^2+9}$

$-\; L^{-1}\left\{\frac{2s+1}{s^2+5s-12}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{2s+1}{(s+\frac{5}{2})^2-\frac{73}{4}}\right\} = 2L^{-1}\left\{\frac{s+\frac{5}{2}-\frac{5}{2}}{(s+\frac{5}{2})^2-\frac{73}{4}}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+\frac{5}{2})^2-\frac{73}{4}}\right\}$

$= 2L^{-1}\left\{\frac{s+\frac{5}{2}}{(s+\frac{5}{2})^2-\frac{73}{4}}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{4}{(s+\frac{5}{2})^2-\frac{73}{4}}\right\} = 2e^{-\frac{5}{2}x}\cosh\frac{\sqrt{73}}{2}x - 4\times\frac{2}{\sqrt{73}}L^{-1}\left\{\frac{\frac{\sqrt{73}}{2}}{(s+\frac{5}{2})^2-\frac{73}{4}}\right\}$

$= 2e^{-\frac{5}{2}x}\cosh\frac{\sqrt{73}}{2}x - \frac{8}{\sqrt{73}}e^{-\frac{5}{2}x}\sinh\frac{\sqrt{73}}{2}x$

خواص تبدیلات لاپلاس

تبدیل لاپلاس مشتق :

$$e^{-sx}=u \longrightarrow -se^{-sx}dx=du$$
$$y'dx=dv \longrightarrow y(x)=v$$

$$L\{y'\}=\int_0^\infty e^{-sx}y'dx$$

$$\Rightarrow L\{y'\}=uv-\int v\,du = y(x)e^{-sx}\Big]_0^\infty+s\int_0^\infty e^{-sx}\underbrace{y(x)}_{f(x)}dx \Rightarrow \boxed{L\{y'\}=-y(0)+sL\{y\}}$$

با ادامه‌ی این روند :

$$L\{y''\}=-y'(0)+sL\{y'\}=\boxed{-y'(0)-sy(0)+s^2L\{y\}}$$

$$\boxed{L\{y^{(n)}\}=-y^{(n-1)}(0)-sy^{(n-2)}(0)-s^2y^{(n-3)}(0)-\dots-s^{n-2}y'(0)-s^{n-1}y(0)+s^nL\{y\}}$$

مهم

با استفاده از این خاصیت می‌توانیم معادلات دیفرانسیل با ضرایب ثابت با شرایط اولیه را حل کنیم

مثال / معادله‌ی دیفرانسیل زیر را با استفاده از تبدیلات لاپلاس حل کنید : «یعنی جواب خصوصی پیدا کنید»

$$\begin{cases} y'+y=e^{-2x} \\ y(0)=1 \end{cases}$$

$$L\{y'\}+L\{y\}=L\{e^{-2x}\} \Rightarrow -y(0)+sL\{y\}+L\{y\}=\frac{1}{s+2} \Rightarrow -1+(s+1)L\{y\}=\frac{1}{s+2}$$

$$(s+1)L\{y\}=1+\frac{1}{s+2} \Rightarrow L\{y\}=\frac{1}{s+1}+\frac{1}{(s+1)(s+2)} \xrightarrow{L^{-1}\text{ میگیریم}} y=L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}+\frac{1}{(s+1)(s+2)}\right\}$$

$$\Rightarrow y=L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}+\frac{\overset{1}{A}}{s+1}+\frac{\overset{-1}{B}}{s+2}\right\} \Rightarrow y=L^{-1}\left\{\frac{2}{s+1}-\frac{1}{s+2}\right\} \rightarrow \boxed{y=2e^{-x}-e^{-2x}}$$

مثال/ جواب معادله‌ی دیفرانسیل زیر را با استفاده از لاپلاس بیابید.

$$\begin{cases} y''+y=e^{2x} \\ y(0)=1 \\ y'(0)=0 \end{cases} \qquad L\{y''\}+L\{y\}=L\{e^{2x}\}$$

$$\Rightarrow -y'(0)-sy(0)+s^2L\{y\}+L\{y\}=\frac{1}{s-2} \Rightarrow (s^2+1)L\{y\}=s+\frac{1}{s-2}$$

$$\Rightarrow L\{y\}=\overbrace{\frac{s}{s^2+1}}^{\cos x}+\frac{1}{(s-2)(s^2+1)} \Rightarrow L\{y\}=\left\{\frac{s}{s^2+1}+\frac{\overset{1/5}{A}}{s-2}+\frac{\overset{-1/5}{B}s+\overset{-2/5}{C}}{s^2+1}\right\}$$

$$\Rightarrow y=L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}+\frac{1/5}{s-2}-\frac{1}{5}\frac{s}{s^2+1}-\frac{2}{5}\frac{1}{s^2+1}\right\} \Rightarrow y=\cos x+\frac{1}{5}e^{2x}-\frac{1}{5}\cos x-\frac{2}{5}\sin x$$

$$\Rightarrow y=\frac{1}{5}\left(4\cos x-2\sin x+e^{2x}\right)$$

مثال/

$$\begin{cases} y''-3y'+4y=0 \\ y(0)=1 \\ y'(0)=-1 \end{cases} \Rightarrow L\{y''\}-3L\{y'\}+4L\{y\}=0$$

$$\Rightarrow -y'(0)-sy(0)+s^2L(y)-3\left(-y(0)+sL\{y\}\right)+4L\{y\}=0$$

$$\Rightarrow 1-s+s^2L\{y\}+3-3sL\{y\}+4L\{y\}=0 \Rightarrow (s^2-3s+4)L\{y\}=s-4$$

$$\Rightarrow L\{y\}=\frac{s-4}{s^2-3s+4} \Rightarrow y=L^{-1}\left\{\frac{s-4}{s^2-3s+4}\right\} \Rightarrow y=L^{-1}\left\{\frac{s-4}{(s-\frac{3}{2})^2+\frac{7}{4}}\right\}$$

$$=L^{-1}\left\{\frac{s-\frac{3}{2}-\frac{5}{2}}{(s-\frac{3}{2})^2+\frac{7}{4}}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{s-\frac{3}{2}}{(s-\frac{3}{2})^2+\frac{7}{4}}\right\}-\frac{5}{2}\times\frac{2}{\sqrt{7}}L^{-1}\left\{\frac{\frac{\sqrt{7}}{2}}{(s-\frac{3}{2})^2+\frac{7}{4}}\right\}$$

$$=e^{\frac{3}{2}x}\cos\frac{\sqrt{7}}{2}x-\frac{5}{\sqrt{7}}e^{\frac{3}{2}x}\sin\frac{\sqrt{7}}{2}x$$

مشتق تبدیل لاپلاس

دیدیم که $L\{f(x)\}=\int_0^\infty e^{-sx}f(x)dx=F(s)$ ، با مشتق‌گیری از طرفین رابطه بالا نسبت به s داریم:

$$\int_0^\infty -xe^{-sx}f(x)dx=F'(s) \Rightarrow \int_0^\infty e^{-sx}(xf(x))dx=-F'(s) \;(*) \Rightarrow \boxed{L\{xf(x)\}=-F'(s)}$$

مهم

اگر از طرفین * نسبت به s مشتق بگیریم داریم:

$$\int_0^\infty e^{-sx}(-x^2f(x))dx=-F''(s)$$

$$\Rightarrow \boxed{L\{x^2f(x)\}=F''(s)}$$

بنابراین $\Rightarrow$ $\boxed{L\{f(x)\} = F(s) \Longrightarrow L\{x^n f(x)\} = (-1)^n F^{(n)}(s)}$ مهم

$$L\{1\} = \frac{1}{s} \xrightarrow{\text{از خواص}} L\{x \times 1\} = (-1)\left(\frac{-1}{s^2}\right) = \frac{1}{s^2}$$

$$L\{e^{2x}\} = \frac{1}{s-2} \xrightarrow{\text{از خواص}} L\{x e^{2x}\} = -\left(\frac{1}{s-2}\right)' = \frac{1}{(s-2)^2}$$

$\boxed{L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^2}\right\} = x e^{2x}}$ حفظ کنیم $\qquad$ $\boxed{L\{x^{-1/2}\} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}}$ مهم

$$L\{x^2 \sin 3x\} = \left(\frac{3}{s^2+9}\right)'' = \cdots$$

مثال

$$L\{x^{-1/2}\} = \int_0^\infty x^{-1/2} e^{-sx}\,dx \qquad \xrightarrow{\text{تغییر متغیر}} sx = u^2 \Rightarrow x = \frac{u^2}{s} \Rightarrow x^{-1/2} = \left(\frac{u^2}{s}\right)^{-1/2}$$

$$, dx = \frac{2u\,du}{s}$$

$$\Rightarrow L\{x^{-1/2}\} = \int_0^\infty \frac{1}{u}\sqrt{s}\, e^{-u^2} \times \frac{2u}{s}\,du = \frac{1}{\sqrt{s}} \underbrace{\int_0^\infty e^{-u^2}\,du}_{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{s}} \times \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

$$L\{x^{1/2}\} = L\{\underbrace{x x^{-1/2}}_{x f(x)}\} = -\left(\sqrt{\frac{\pi}{s}}\right)'$$

$$L\{x^{3/2}\} = L\{x^2 x^{-1/2}\} = \left(\sqrt{\frac{\pi}{s}}\right)''$$

$$L^{-1}\{\ln s\}: \quad F(s) = \ln s, \quad F'(s) = \frac{1}{s} \rightsquigarrow \cancel{\cdots} \; L\{-x f(x)\} = L\{1\}$$

$$\Rightarrow -x f(x) = 1 \rightarrow f(x) = -\frac{1}{x}$$

$$L^{-1}\{\operatorname{Arctg} s\}: \quad F'(s) = \frac{1}{s^2+1} \Rightarrow L\{-x f(x)\} = L\{\sin x\} \rightarrow -x f(x) = \sin x, \ldots$$

داریم که $\quad L\{x f(x)\} = \frac{-d}{ds} L\{f(x)\}$ و بنابراین :

$$L\{xy\} = \frac{-d}{ds} L\{y\} \rightarrow L\{xy'\} = \frac{-d}{ds} L\{y'\} \Rightarrow L\{xy'\} = \frac{-d}{ds}\left(-y(0) + sL\{y\}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{L\{xy'\} = \cancel{\cdots}}$$

$$\Rightarrow \boxed{L\{xy'\} = -s\frac{d}{ds} L\{y\} - L\{y\}}$$

$$L\{xy''\}=\frac{-d}{ds}L\{y''\}=\frac{-d}{ds}\left(-y'(0)-sy(0)+s^2L\{y\}\right)=y(0)-2sL\{y\}-s^2\frac{d}{ds}L\{y\}$$

با خاصیت فوق می‌توان معادلات دیفرانسیلی را حل کرد که ضرایب آنها فقط عدد ثابت نیست (در x ضرب شده است) و دارای شرایط اولیه هستند.

مثال

$$\begin{cases} xy''+y'+xy=0 \\ y(0)=1 \end{cases} \qquad L\{xy''\}+L\{y'\}+L\{xy\}=0$$

$$-\frac{d}{ds}L\{y''\}+L\{y'\}-\frac{d}{ds}L\{y\}=0 \Rightarrow \frac{-d}{ds}\left(-y'(0)-sy(0)+s^2L\{y\}\right)+\left(-y(0)+sL\{y\}\right)-\frac{d}{ds}L\{y\}=0$$

$$\Rightarrow 1-2sL\{y\}-s^2\frac{d}{ds}L\{y\}-1+sL\{y\}-\frac{d}{ds}L\{y\}=0 \Rightarrow -sL\{y\}-(s^2+1)\frac{d}{ds}L\{y\}=0$$

$$L\{y\}=Y \qquad \frac{d}{ds}L\{y\}=Y'$$

$$\Rightarrow -sY-(s^2+1)Y'=0 \rightarrow \frac{Y'}{Y}=\frac{-s}{s^2+1} \rightarrow \ln Y=\frac{-1}{2}\ln(s^2+1) \rightarrow \ln Y=\ln(s^2+1)^{-1/2}$$

$$Y=\frac{1}{\sqrt{s^2+1}} \rightarrow y=L^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}\right\}$$

مثال: جواب معادله را از تبدیلات لاپلاس حل کنید:

$$\begin{cases} xy''+(2x+3)y'+(x+3)y=3e^{-x} \\ y(0)=0 \end{cases}$$

$$L\{xy''\}+2L\{xy'\}+3L\{y'\}+L\{xy\}+3L\{y\}=\frac{3}{s+1}$$

$$-\frac{d}{ds}L\{y''\}-2\frac{d}{ds}L\{y'\}+3L\{y'\}-\frac{d}{ds}L\{y\}+3L\{y\}=\frac{3}{s+1}$$

$$=-\frac{d}{ds}\left(-y'(0)-sy(0)+s^2L\{y\}\right)-2\frac{d}{ds}\left(-y(0)+sL\{y\}\right)+3\left(-y(0)+sL\{y\}\right)-\frac{d}{ds}L\{y\}+3L\{y\}=\frac{3}{s+1}$$

$$=-2sL\{y\}-s^2\frac{d}{ds}L\{y\}-2L\{y\}-2s\frac{d}{ds}L\{y\}+3sL\{y\}-\frac{d}{ds}L\{y\}+3L\{y\}=\frac{3}{s+1}$$

$$(-2s-2+3s+3)L\{y\}+(-s^2-2s-1)\frac{d}{ds}L\{y\}=\frac{3}{s+1}$$

$$(s+1)Y-(s+1)^2Y'=\frac{3}{s+1} \Rightarrow (s+1)^2Y'-(s+1)Y=\frac{-3}{s+1} \rightarrow Y'-\frac{1}{s+1}Y=\frac{-3}{(s+1)^3}$$

نتیجه یک معادله خطی مرتبه اول است:

$$\mu=e^{\int -\frac{1}{s+1}ds}=\frac{1}{s+1}$$

$$Y=(s+1)\left[\int\frac{-3}{(s+1)^4}ds\right] \rightarrow Y=(s+1)\times\frac{1}{(s+1)^3}=\frac{1}{(s+1)^2}$$

تبدیل لاپلاس انتگرال گیری :

$$L\left\{\int_0^x f(t)\,dt\right\} = \int_0^\infty \left(\int_0^x f(t)\,dt\right) e^{-sx}\,dx$$

$$\begin{cases} \int_0^x f(t)\,dt = u \\ e^{-sx}\,dx = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x)\,dx = du \\ -\frac{1}{s}e^{-sx} = v \end{cases}$$

$$L\left\{\int_0^x f(t)\,dt\right\} = \left[\cancel{\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)\left(\frac{-1}{s}e^{-sx}\right)}\right]_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty f(x)e^{-sx}\,dx$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s-1)}\right\} = \left\{\frac{\frac{1}{(s-1)}}{s}\right\} = \int_0^t e^t\,dt$$

$$\Rightarrow L\left\{\int_0^x f(t)\,dt\right\} = \frac{F(s)}{s} \Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^x f(t)\,dt$$

تبدیل لاپلاس $\frac{f(x)}{x}$ و کاربرد آن :

$$L\left\{\frac{f(x)}{x}\right\} = \int_0^\infty e^{-sx}\,\frac{f(x)}{x}\,dx = G(s)$$

از طرفین این رابطه نسبت به s مشتق می‌گیریم :

$$\int_0^\infty -e^{-sx} f(x)\,dx = G'(s) \Rightarrow \int_0^\infty e^{-sx} f(x)\,dx = -G'(s)$$

به عبارت دیگر $F(s) = -G'(s)$

$$\int_a^s F(t)\,dt = -G'(s)$$

لذا به ازای مقداری از a باید داشته باشیم

$$-\int_\infty^s F(t)\,dt = G(s)$$

چون می‌خواهیم $\lim_{s\to\infty} G(s) = 0$ پس باید $a = \infty$

$\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$ تبدیل لاپلاس باید دارای این خاصیت است

$$\Rightarrow \int_s^\infty F(t)\,dt = G(s)$$

F تبدیل لاپلاس f است

$$G(0) = \boxed{\int_0^\infty F(t)\,dt = \int_0^\infty \frac{f(x)}{x}\,dx}$$

مثال :

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^\infty \frac{1}{s^2+1}\,ds = \left.\operatorname{Arctg} s\right]_0^\infty = \frac{\pi}{2} - 0$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}\,dx = \int_0^\infty \left(\frac{1}{s+\alpha} - \frac{1}{s+\beta}\right) ds = \ln|s+\alpha| - \ln|s+\beta| \Big|_0^\infty = \left[\ln\left|\frac{s+\alpha}{s+\beta}\right|\right]_0^\infty = 0 - \ln\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \ln\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|$$

$$\int_0^\infty \frac{f(x)}{x}\,dx = \int_0^\infty F(s)\,ds$$

۵ کانولوشن (تلفیق)

اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع باشند، کانولوشن f و g را با نماد $f \star g$ نشان داده و بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$F \star g = \int_0^x f(t) g(x-t)\, dt$$

به راحتی دیده می‌شود که $f \star g = g \star f$ همچنین $(f \star g) \star h = f \star (g \star h)$.

مثال/

$$e^x \star 1 = \int_0^x e^t \times 1 \times dt = e^x - 1$$

g

$$\sin x \star \sin x = \int_0^x \sin t \cdot \sin(x-t)\, dt = \int_0^x \sin t \left[\sin x \cos t - \cos x \sin t\right] dt$$

قضیه: $\boxed{L\{F \star g\} = F(s) \cdot G(s)}$ $\boxed{L^{-1}\{F(s) \cdot g(s)\} = f \star g}$

مثال/ $L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s-1)}\right\}$:

روش I $L^{-1}\left\{ \frac{\overset{-1}{A}}{s} + \frac{\overset{1}{B}}{s-1} \right\} = e^x - 1$

روش II $L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s-1)}\right\} = L^{-1}\left\{ \frac{\frac{1}{s-1}}{s} \right\} = L^{-1}\left\{ \frac{F(s)}{s} \right\} = \int_0^x f(t)\, dt = \int_0^x e^t dt = e^t \Big]_0^x = e^?$

روش III $L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s-1)}\right\} = L^{-1}\left\{ \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s-1} \right\} = F \star g = 1 \star e^x = e^x \star 1 = \int_0^x e^t \times 1\, dt = e^x - 1$

مثال/ $L^{-1}\left\{ \frac{1}{(s^2+1)^2} \right\}$:

$$= L^{-1}\left\{ \frac{1}{s^2+1} \cdot \frac{1}{s^2+1} \right\} = \sin x \star \sin x = \int_0^x \sin t \times \sin(x-t)\, dt$$

$$= \int_0^x \sin t \left[\sin x \cos t - \cos x \sin t\right] dt = \sin x \int_0^x \sin t \cos t\, dt - \cos x \int_0^x \sin^2 t\, dt$$

مثال/ جواب معادله دیفرانسیل زیر را بیابید.

$$\begin{cases} y'' + y = \sin x \\ y(0) = a \\ y'(0) = b \end{cases}$$

$$L\{y''\} + L\{y\} = L\{\sin x\}$$

$$\Rightarrow -y'(0) - s y(0) + s^2 L\{y\} + L\{y\} = \frac{1}{s^2+1} \Rightarrow -b - as + (s^2+1) L\{y\} = \frac{1}{s^2+1}$$

$$(s^2+1)L\{y\} = b + as + \frac{1}{s^2+1} \Rightarrow y = L^{-1}\left\{\frac{b}{s^2+1} + \frac{as}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1}\cdot\frac{1}{s^2+1}\right\}$$

$$= b\sin x + a\cos x + \underbrace{\sin x \star \sin x}_{\text{در مثال قبل آورده}}$$

معادلات انتگرال

یک معادله‌ی انتگرال در حالت خاص به صورت زیر است:

$$f(x) = g(x) + \overbrace{\int_0^x y(t)\,g(x-t)\,dt}^{\text{کانولوشن g و y}}$$

که در آن $f(x)$ و $g(x)$ توابعی معلوم هستند و $y(x)$ تابعی مجهول است و باید آن را پیدا کرد. به دلیل آنکه انتگرال ظاهر شده کا

دو تابع است این گونه از معادلات انتگرال را می‌توان با استفاده از تبدیلات لاپلاس حل کرد:

$$L\{f(x)\} = L\{g(x)\} + L\{y(x) \star g(x)\} \Rightarrow F(s) = G(s) + L\{y\}G(s)$$

$$\Rightarrow F(s) = (1 + L\{y\})G(s) \to 1 + L\{y\} = \frac{F(s)}{g(s)} \to L\{y\} = \frac{F(s)}{g(s)} - 1 \Rightarrow y = L^{-1}\left\{\frac{F(s)}{g(s)} - 1\right\}$$

مثال/ $e^x = y(x) + 2\int_0^x \cos(x-t)\,y(t)\,dt$ را حل کنید.

$$\frac{1}{s-1} = L\{y\} + 2\frac{s}{s^2+1}L\{y\} \Rightarrow \frac{1}{s-1} = L\{y\}\left(1 + \frac{2s}{s^2+1}\right) \Rightarrow \frac{1}{s-1} = L\{y\}\left(\frac{(s+1)^2}{s^2+1}\right)$$

$$\Rightarrow L\{y\} = \frac{s^2+1}{(s-1)(s+1)^2} \Rightarrow y = L^{-1}\left\{\frac{s^2+1}{(s-1)(s+1)^2}\right\} \Rightarrow y = L^{-1}\left\{\frac{A^{1/2}}{s-1} + \frac{B}{(s+1)} + \frac{C}{(s+1)^2}\right\}$$

مثال/ $y(x) = x^3 + \int_0^x \sin(x-t)\,y(t)\,dt$

$$L\{y\} = \frac{6}{s^4} + \frac{1}{s^2+1}L\{y\} \Rightarrow \left(1 - \frac{1}{s^2+1}\right)L\{y\} = \frac{6}{s^4} \Rightarrow \left(\frac{s^2}{s^2+1}\right)L\{y\} = \frac{6}{s^4}$$

$$\Rightarrow L\{y\} = \frac{6(s^2+1)}{s^6} \Rightarrow L\{y\} = \left\{\frac{6}{s^4} + \frac{6}{s^6}\right\} \to y = x^3 + \frac{6}{120}x^5$$

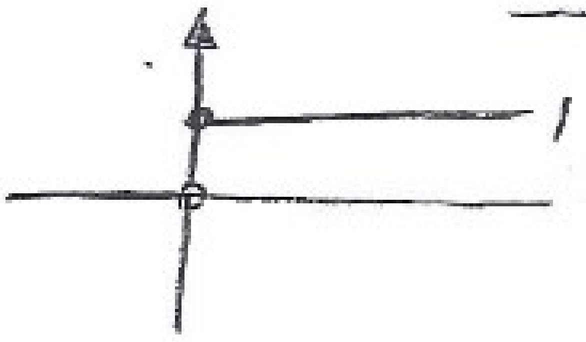
مثال: $y(x) = e^x\left[1 + \int_0^x e^{-t}\,y(t)\,dt\right]$

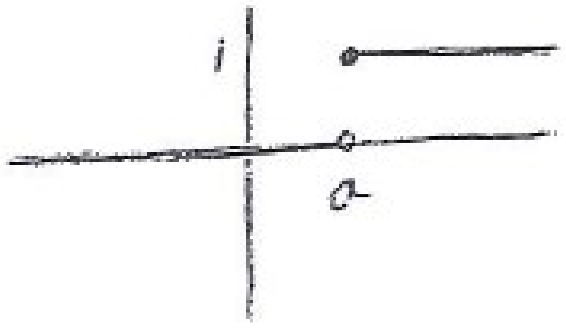
$$y(x) = e^x + \int_0^x e^{x-t}\,y(t)\,dt \Rightarrow L\{y\} = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s-1}L\{y\}$$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{1}{s-1}\right)L\{y\} = \frac{1}{s-1} \Rightarrow \frac{s-2}{s-1}L\{y\} = \frac{1}{s-1} \Rightarrow L\{y\} = \frac{1}{s-2} \Rightarrow y = e^{2x}$$

تابع پله‌ای واحد (هویساید)

$$u(t)=H(t)=\begin{cases}1 & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases}$$





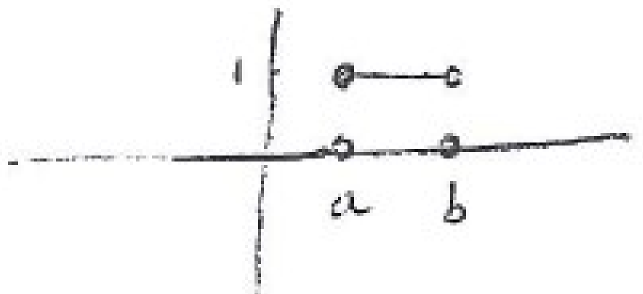
همچنین اگر $a>0$

$$u_a(t)=H(t-a)=\begin{cases}1 & t\geq a\\ 0 & t<a\end{cases}$$

مثال/ اگر $0<a<b$ ، تابع زیر را رسم کنید.

$$f(t)=H(t-a)-H(t-b)$$

$$f(t)=\begin{cases}0 & t<a\\ 1 & a\leq t<b\\ 0 & t\geq b\end{cases}$$



مثال/ تابع $f(t)$ را بر بازهٔ $[0,\infty)$ بصورت زیر تعریف شده در نظر بگیرید و آنرا با استفاده از تابع هویساید بنویسید.

$$f(t)=\begin{cases}3t & 0\leq t<1\\ 4-t & 1\leq t<2\\ 2 & t\geq 2\end{cases}$$

$H(t-2)\times 2$

$$f(t)=\Big(H(t)-H(t-1)\Big)3t+\Big(H(t-1)-H(t-2)\Big)(4-t)+\Big(H(t-2)\Big)\times 2$$

برای امتحان کردن رابطهٔ بالا فرض می‌کنیم $1\leq t<2 \Rightarrow$ $H(t)=1$, $H(t-1)=1$, $H(t-2)=0$ $\Rightarrow f(t)=4-t$

یک درست است

مثال/ هرگاه تابع $f(t)$ بصورت

$$f(t)=\begin{cases}f_1(t) & 0\leq t<a\\ f_2(t) & a\leq t<b\\ f_3(t) & t\geq b\end{cases}$$

تعریف شود آنگاه می‌توان نوشت: (قضیه)

$$f(t)=f_1(t)+\Big(f_2(t)-f_1(t)\Big)H(t-a)+\Big(f_3(t)-f_2(t)\Big)H(t-b)+\Big(f_4(t)-f_3(t)\Big)H(t-c)$$

$f(t)=3t+(-t-1)+(t-1)+(2-3t)+(t-2)\quad 1\leq t<2$

$=2t-1$

$f(t)=2t \quad t>2$

تبدیل لاپلاس تابع هویساید

$$L\{H(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} H(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-st}\,dt = -\frac{1}{s}e^{-st}\Big]_0^\infty = \frac{1}{s}$$

$* \quad L\{H(t)\} = \frac{1}{s} \iff L^{-1}\{\frac{1}{s}\} = H(t)$

$$L\{H(t-a)\} = \int_0^\infty e^{-st} H(t-a)\,dt = \int_0^a e^{-st}\times 0\,dt + \int_a^\infty e^{-st}\times 1\,dt = -\frac{1}{s}e^{-st}\Big]_a^\infty = \frac{e^{-as}}{s}$$

$* \quad L\{H(t-a)\} = \frac{e^{-as}}{s} \iff L^{-1}\{\frac{e^{-as}}{s}\} = H(t-a)$

$L\{H(t-2)\} = \frac{e^{-2s}}{s}$

$L^{-1}\{\frac{e^{-2s}}{s}\} = H(t-2)$

قضیه :

$$\boxed{\begin{aligned} L\{f(t-a)H(t-a)\} &= e^{-as}F(s) \\ L^{-1}\{e^{-as}F(s)\} &= H(t-a)f(t-a) \end{aligned}}$$

مهم

$+ \quad L\{(t-2)H(t-2)\} = \frac{1}{s^2}e^{-2s} \qquad + \quad L^{-1}\{\frac{1}{s^2}e^{-2s}\} = (t-2)H(t-2)$

مثال:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0<t<1 \\ -1 & 1\le t<2 \\ 0 & t\ge 2 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} y''+2y'+5y = f(t) \\ y(0)=2 \\ y'(0)=-4 \end{cases}$$

$\boxed{f(t) = 1-2H(t-1)+H(t-2)}$

$$\underbrace{-y'(0)-sy(0)+s^2L\{y\}}_{L\{y''\}} + 2(-y(0)+sL\{y\}) + 5L\{y\} = \frac{1}{s} - 2\frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s}$$

$$\cancel{4} - 2s + s^2L\{y\} - \cancel{4} + 2sL\{y\} + 5L\{y\} = \frac{1}{s} - \frac{2e^{-s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s}$$

$$(s^2+2s+5)L\{y\} = 2s + \frac{1}{s} - \frac{2e^{-s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s} \Rightarrow y = L^{-1}\Big\{\frac{2s}{s^2+2s+5} + \frac{1}{s(s^2+2s+5)} - \frac{2e^{-s}}{s(s^2+2s+5)} + \frac{e^{-2s}}{s(s^2+2s..}$$

۹۰/۱۰/۱۴ یکشنبه

تابع دلتای دیراک (ضربه)

فرض کنید که a عددی دلخواه باشد، تابع

$$f_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & a \leq t \leq a+\varepsilon \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

$$\delta(t-a) = \lim_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon(t) = \begin{cases} \infty & t = a \\ 0 & t \neq a \end{cases}$$

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

قضیه: $\int_0^\infty \delta(t-a)\,dt = 1$

اثبات: $\int_0^\infty \delta(t-a)\,dt = \int_0^\infty \lim_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon(t)\,dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{a+\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon}\,dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_a^{a+\varepsilon} dt$

$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \times \varepsilon = 1$

قضیه: اگر $f(x)$ تابعی پیوسته باشد $\int_0^\infty \delta(t-a) f(t)\,dt = f(a)$

اثبات: $\int_0^\infty \delta(t-a) f(t)\,dt = \int_0^\infty \lim_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon(t) f(t)\,dt = \int_a^{a+\varepsilon} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} f(t)\,dt$

$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_a^{a+\varepsilon} f(t)\,dt$

عددی مانند θ موجود است که $a \leq \theta \leq a+\varepsilon$

$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} f(\theta) \int_a^{a+\varepsilon} dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} f(\theta)\varepsilon = \lim_{\varepsilon \to 0} f(\theta) = f(a)$

مرور: قضیه مقدار میانگین در انتگرال:

اگر $f(x)$ روی بازه $[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه $\exists c \in (a,b) : \int_a^b f(x)\,dx = f(c) \int_a^b dx = f(c)(b-a)$

نکته

$$\begin{cases} H'(t-a) = \delta(t-a) \\ H'(t) = \delta(t) \end{cases}$$

با توجه به خاصیت غربالی

$$L\{\delta(t-a)\} = \int_0^\infty \delta(t-a)e^{-st}\,dt = e^{-as} \Rightarrow L\{\delta(t-a)\} = e^{-as} \Longleftrightarrow L^{-1}\{e^{-as}\} = \delta(t-a)$$

می‌دانیم $L\left\{\int_0^t f(x)dx\right\} = \frac{F(s)}{s} \Rightarrow L\left\{\int_0^t \delta(x-a)dx\right\} = \frac{e^{-as}}{s}$

$\xrightarrow{\text{پس}} \int_0^t \delta(x-a)\,dx = H(t-a) \xrightarrow{\text{پس}} \boxed{H'(t-a) = \delta(t-a)}$

مثال/ معادله دیفرانسیل زیر را با استفاده از تبدیلات لاپلاس حل کنید.

$$\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = \delta(t-a) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

$$-y'(0) - sy(0) + s^2L\{y\} + 3(-y(0) + sL\{y\}) + 2L\{y\} = e^{-as}$$

$$\Rightarrow (s^2+3s+2)L\{y\} = e^{-as} \Rightarrow L\{y\} = \frac{e^{-as}}{s^2+3s+2}$$

ابتدا e^{-as} را در نظر نگیرید و می‌بینیم که

$$\Rightarrow y = L^{-1}\left\{\frac{e^{-as}}{s^2+3s+2}\right\} = 2e^{-\frac{3}{2}(t-a)}\sinh\tfrac{1}{2}(t-a)\,H(t-a)$$

لاپلاس معکوس چیست؟ $\frac{1}{s^2+3s+2}$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+3s+2}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+\frac{3}{2})^2-\frac{1}{4}}\right\} = 2L^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{2}}{(s+\frac{3}{2})^2-\frac{1}{4}}\right\} = 2e^{-\frac{3}{2}t}\sinh\tfrac{1}{2}t$$

تبدیل لاپلاس تابع متناوب

تابع $f(t)$ را متناوب با دوره تناوب $T \neq 0$ گوییم هرگاه $f(t+T) = f(t) \quad \forall t$.

کوچکترین عدد مثبت صادق در این رابطه را دوره تناوب اولیه (اصلی) گوییم.

$f(t) = \sin t \longrightarrow T = \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$

T اصلی $= 2\pi$

$f(t) = |\sin \pi t| \quad T = \pm 1, \pm 2, \dots \quad T = 1$

$f(t) = C$ ثابت $\longrightarrow$ متناوب است ولی دوره تناوب اصلی ندارد

توضیح: اگر $f(t)$ تابعی متناوب با دوره تناوب اصلی T باشد:

$$L\{f(t)\} = \frac{\int_0^T e^{-st}f(t)\,dt}{1-e^{-st}}$$

$$L\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt = \int_0^T f(t)e^{-st}\,dt + \int_T^\infty f(t)e^{-st}\,dt \quad (*)$$

$\int_T^\infty f(t)e^{-st}\,dt = ?$

$t = T + v$

$dt = dv$

$t \to T \Rightarrow v \to 0$

$$= \int_0^\infty f(T+v)e^{-s(T+v)}\,dv = e^{-sT}\int_0^\infty f(v)e^{-sv}\,dv = e^{-sT}\times L\{f(t)\}$$

جایگذاری در (*)

$$L\{f(t)\} = \int_0^T f(t)e^{-st}\,dt + e^{-sT}\times L\{f(t)\} \Rightarrow (1-e^{-sT})L\{f(t)\} = \int_0^T f(t)e^{-st}\,dt$$

$$\Rightarrow L\{f(t)\} = \frac{\int_0^T f(t)e^{-st}\,dt}{1-e^{-sT}}$$

مثال/
$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0\le t\le 1 \\ -1 & 1\le t\le 2 \end{cases} \quad , \quad f(t+2) = f(t)$$

$$L\{f(t)\} = \frac{\int_0^2 e^{-st} f(t)\,dt}{1-e^{-2s}} = \frac{\int_0^1 e^{-st}dt + \int_1^2 -e^{-st}dt}{1-e^{-2s}} = \cdots$$

دستگاه معادلات دیفرانسیل

$$\begin{cases} x' = x+2y+1 \\ y' = 3x+2y+t \end{cases}$$

ما دنبال $x(t)$ و $y(t)$ می‌گردیم.

از طرفین رابطهٔ اول (یا دوم) نسبت به t مشتق می‌گیریم.

$$x'' = x' + 2y' \rightarrow x'' = x' + 2(3x+2y+t) \Rightarrow x'' = x' + 6x + 4y + 2t$$

$2y = x' - x - 1$

$$\Rightarrow x'' = x' + 6x + 2x' - 2x - 2 + 2t \rightarrow x'' - 3x' - 4x = 2t - 2$$

حال برابر یک معادلهٔ مرتبهٔ دوم غیرهمگن با ضرایب ثابت است.

$$x'' - 3x' - 4x = 2t - 2 \rightarrow x'' - 3x' - 4x = 0 \rightarrow m^2 - 3m - 4 = 0 \begin{cases} m_1 = -1 \\ m_2 = 4 \end{cases} \rightarrow x_g = c_1e^{-t} + c_2e^{4t}$$

$$x_p = At + B \rightarrow x'_p = A \rightarrow x''_p = 0 \Rightarrow 0 - 3A - 4At - 4B = 2t - 2 \rightarrow -4A = 2 \rightarrow A = -\tfrac{1}{2}$$

$$B = \tfrac{7}{8}$$

$$\Rightarrow \boxed{x_p = -\tfrac{1}{2}t + \tfrac{7}{8}} \Rightarrow x(t) = x_g + x_p = c_1e^{-t} + c_2e^{4t} - \tfrac{1}{2}t + \tfrac{7}{8}$$

$$x'(t) = -c_1e^{-t} + 4c_2e^{4t} - \tfrac{1}{2}$$

$\xrightarrow{\text{واسه } y}$ $y = \tfrac{1}{2}(x' - x - 1)$

x و x' را از بالا جایگذاری می‌کنیم و $y(t)$ نیز بدست می‌آید.

مثال

$$\frac{dx}{dt}=3x-2y \qquad \frac{dy}{dt}=-x+2y$$

$$\Rightarrow x''=3x'-2y' \rightarrow x''=3x'-2(-x+2y)$$

$$\Rightarrow x''=3x'+2x-4y \Rightarrow x''=3x'+2x+2x'-6x$$

$$\Rightarrow x''-5x'+4x=0 \rightarrow m^2-5m+4=0 \;\begin{cases} m=1 \\ m=4 \end{cases} \rightarrow x_g=c_1e^{t}+c_2e^{4t} \qquad x_p=$$ ندارد

چون $=0$

$$2y=3x-x' \rightarrow y=\tfrac{1}{2}(3x-x') \rightarrow y=\tfrac{1}{2}(3c_1e^{t}+3c_2e^{4t}-c_1e^{t}-4c_2e^{4t})$$

$$\begin{cases} x=c_1e^{t}+c_2e^{4t} \\ y=c_1e^{t}-\tfrac{1}{2}c_2e^{4t} \end{cases}$$

مثال

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}+\dfrac{dy}{dt}=x+2t+1 \\ 2\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{2dy}{dt}=-x+t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (D-1)x+Dy=2t+1 \\ (2D+1)x+2Dy=t \end{cases}$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 2t+1 & D \\ t & 2D \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} D-1 & D \\ 2D+1 & 2D \end{vmatrix}}=\frac{2D(2t+1)-D(t)}{2D^2-2D-2D^2-D}=\frac{4-1}{-3D} \rightarrow -3Dx=3 \rightarrow Dx=-1 \rightarrow x=-t+c_1$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} D-1 & 2t+1 \\ 2D+1 & t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} D-1 & D \\ 2D+ & 2D \end{vmatrix}}=\dots\; y=$$

مثال

$$\begin{cases} (D-2)x-3y=7e^{2t} \\ -x+(D-4)y=2e^{2t} \end{cases}$$

مثال

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=5x-2y+1 & x(0)=0 \\ \dfrac{dy}{dt}=4x-y & y(0)=0 \end{cases}$$ از طریق لاپلاس حل شود.

$$L\{x'\}=5L\{x\}-2L\{y\}+L\{1\} \Rightarrow -\cancel{x(0)}+sL\{x\}=5L\{x\}-2L\{y\}+\frac{1}{s}$$

$$L\{y'\}=4L\{x\}-L\{y\} \Rightarrow -\cancel{y(0)}+sL\{y\}=4L\{x\}-L\{y\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (s-5)L\{x\}+2L\{y\}=1/s \\ -4L\{x\}+(s+1)L\{y\}=0 \end{cases} \xrightarrow[\text{دو معادله دو مجهول}]{\text{حل دستگاه}} L\{x\}=\frac{\begin{vmatrix} 1/s & 2 \\ 0 & s+1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-5 & 2 \\ -4 & s+1 \end{vmatrix}}=\frac{\frac{s+1}{s}}{s^2-4s-5+8}=\frac{s+1}{s(s^2-4s+3)}$$

$$\Rightarrow x=L^{-1}\left\{\frac{s+1}{s(s^2-4s+3)}\right\}=$$

$$L\{y\}=\frac{\begin{vmatrix} s-5 & 1/s \\ -4 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-5 & 2 \\ -4 & s+1 \end{vmatrix}}=\dots$$

دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل

فرض کنید که $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ، n تابع باشند که متغیر مستقل آن‌ها t است. بنابراین:

$x_1=x_1(t), x_2=x_2(t), \ldots, x_n=x_n(t)$ یک دستگاه n معادله و n مجهول مرتبه اول به صورت زیر است:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n,t) \\ \dfrac{dx_2}{dt}=f_2(x_1,x_2,\ldots,x_n,t) \\ \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt}=f_n(x_1,x_2,\ldots,x_n,t) \end{cases}$$

اگر توابع $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$ نسبت به $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ خطی باشند دستگاه بالا را یک دستگاه n معادله n مجهول مرتبه اول گوییم که آن را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=a_{11}(t)x_1+a_{12}(t)x_2+\cdots+a_{1n}(t)x_n+g_1(t) \\ \dfrac{dx_2}{dt}=a_{21}(t)x_1+a_{22}(t)x_2+\cdots+a_{2n}(t)x_n+g_2(t) \\ \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt}=a_{n1}(t)x_1+a_{n2}(t)x_2+\cdots+a_{nn}(t)x_n+g_n(t) \end{cases}$$

که در آن $a_{ij}(t)$ها و $g_i(t)$ها توابعی برحسب t هستند. هدف، یافتن توابع $x_1, x_2, \ldots, x_n$ می‌باشد؛ به گونه‌ای که در کلیه‌ی معادلات بالا به طور همزمان صدق کنند. در دستگاه بالا چنانچه $g_1(t)=g_2(t)=\cdots=g_n(t)=0$ دستگاه را همگن گوییم در غیر این صورت دستگاه را غیرهمگن خوانیم. علاوه بر آن اگر $a_{ij}(t)$ها اعداد ثابت باشند دستگاه را با ضرایب ثابت گوییم. مثلاً دستگاه:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=a_1x+a_2y & x=x(t) \\ \dfrac{dy}{dt}=b_1x+b_2y & y=y(t) \end{cases}$$

یک دستگاه دو معادله با دو مجهول خطی، همگن با ضرایب ثابت مرتبه اول است.

جواب دستگاه بالا به صورت زیر خواهد بود:

$$x_g(t)=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)$$
$$y_g(t)=c_1y_1(t)+c_2y_1(t)$$

و چنانچه دستگاه غیرهمگن می‌بود داشتیم:

$$x_G(t)=x_g(t)+x_p(t)$$
$$y_G(t)=y_g(t)+y_p(t)$$

که $x_p(t)$ و $y_p(t)$ جواب خصوصی معادلات غیرهمگن است.

روش‌های گوناگون برای حل دستگاه‌های معادلات موجودند که زیر به آن اشاره می‌کنیم :

(۱) روش حذفی : فرض کنید که دستگاه به صورت زیر مورد نظر است :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_1 x + a_2 y + g_1(t) \\ \dfrac{dy}{dt} = b_1 x + b_2 y + g_2(t) \end{cases}$$

در روش حذفی، به طور کلی یکی از مجهولات دیگری را بدست می‌آوریم سپس با جایگذاری مجهول دیگر را بدست می‌آوریم .

مثال

$$\begin{cases} x' = x + 2y + 1 \\ y' = 3x + 2y + t \end{cases} \quad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

با مشتق‌گیری از طرفین معادله اول (یا دوم) نسبت به t و جایگذاری از معادله دیگر و در آن یکی از مجهولات x (یا y) را حذف می‌کنیم

$$x'' = x' + 2y' \longrightarrow x'' = x' + 6x + 4y + 2t \longrightarrow \text{از معادله اول داریم:}$$

$$2y = x' - x - 1 \longrightarrow x'' = x' + 6x + 2x' - 2x - 2 + 2t \longrightarrow$$

$$x'' - 3x' - 4x = 2t - 2 \longrightarrow x'' - 3x' - 4x = 0 \longrightarrow m^2 - 3m - 4 = 0 \begin{cases} m_1 = -1 \\ m_2 = 4 \end{cases}$$

$$x_g(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{4t} \;,\; x_p(t) = A_0 + A_1 t \;,\; x'_p(t) = A_1 \;,\; x''_p(t) = 0 \Rightarrow$$

$$-3A_1 - 4A_0 - 4A_1 t = 2t - 2 \longrightarrow -4A_1 = 2 \longrightarrow A_1 = \frac{-1}{2}$$

$$-3A_1 - 4A_0 = -2 \longrightarrow A_0 = \frac{7}{8} \longrightarrow x_p(t) = \frac{7}{8} - \frac{1}{2}t$$

$$x_G(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{4t} - \frac{1}{2}t + \frac{7}{8}$$

$$2y = x' - x - 1 \longrightarrow y = \frac{1}{2}(x' - x - 1) \longrightarrow y_G(t) = \frac{1}{2}\Big[-c_1 e^{-t} + 4c_2 e^{4t} - \frac{1}{2} - c_1 e^{-t} - c_2 e^{4t} + \frac{1}{2}t - \frac{7}{8} - 1\Big]$$

جواب نهایی

$$\begin{cases} x_G(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{4t} - \frac{1}{2}t + \frac{7}{8} \\ y_G(t) = -c_1 e^{-t} + \frac{3}{2} c_2 e^{4t} + t - \frac{19}{16} \end{cases}$$

c_1 ، c_2 ثابت‌های دلخواه هستند .

تمرین

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x - 2y + 5t + 3 \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - y + 3t + 2 \end{cases}$$

۳) روش اپراتورها :

مثال

$$\begin{cases}(D-5)x+2y=5t+3\\ -4x+(D+1)y=4t+2\end{cases}$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}5t+3 & 2\\ 4t+2 & D+1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}D-5 & 2\\ -4 & D+1\end{vmatrix}}=\frac{(D+1)(5t+3)-2(4t+2)}{D^2-4D-5+8}\longrightarrow x=\frac{-3t+4}{D^2-4D+3}\longrightarrow$$

$$(D^2-4D+3)x=-3t+4 \Rightarrow D^2-4D+3=0\longrightarrow D_1=1\,,\,D_2=3 \Rightarrow x_p(t)=A_0+A_1t$$

$$\Rightarrow x_g(t)=c_1e^{t}+c_2e^{3t} \rightsquigarrow x_p(t)=A_0+A_1t\longrightarrow -4A_1+3A_0+3A_1t=-3t+4$$

$$\longrightarrow 3A_1=-3\longrightarrow A_1=-1\quad,\quad -4A_1+3A_0=4\longrightarrow A_0=0$$

$$y=\frac{1}{2}(5x+5t+3-x')$$

$$y_G(t)=\frac{1}{2}\left[5c_1e^{t}+5c_2e^{3t}-5t+5t+3-c_1e^{t}-3c_2e^{3t}+1\right]$$

$$\begin{cases}x_G(t)=c_1e^{t}+c_2e^{3t}-t\\ y_G(t)=2c_1e^{t}+c_2e^{3t}+2\end{cases}$$

مثال

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x+y+e^{2t}\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=2x+3y+e^{-t}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(D-1)x-y=e^{2t}\\ -2x+(D-3)y=e^{-t}\end{cases}$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}e^{2t} & -1\\ e^{-t} & D-3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}D-1 & -1\\ -2 & D-3\end{vmatrix}}=\frac{-e^{2t}+e^{-t}}{D^2-4D+1}\longrightarrow (D^2-4D+1)x=-e^{2t}+e^{-t}$$

$$D^2-4D+1=0\longrightarrow D_1=2+\sqrt{3}\,,\,D_2=2-\sqrt{3}\longrightarrow x_G(t)=c_1e^{(2+\sqrt{3})t}+c_2e^{(2-\sqrt{3})t}$$

$$x_p(t)=\frac{-1}{4-8+1}e^{2t}+\frac{1}{1+4+1}e^{-t}=\frac{1}{3}e^{2t}+\frac{1}{6}e^{-t}$$

حل دستگاه معادلات با استفاده از تبدیلات لاپلاس

مثال: دستگاه معادلات زیر را با استفاده از تبدیلات لاپلاس حل کنید.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x - 2y + 1 & x(0) = 0 \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - y & y(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} L\{x'\} = 5L\{x\} - 2L\{y\} + L\{1\} \\ L\{y'\} = 4L\{x\} - L\{y\} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x(0) + sL\{x\} = 5L\{x\} - 2L\{y\} + \dfrac{1}{s} \\ -y(0) + sL\{y\} = 4L\{x\} - L\{y\} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (s-5)L\{x\} + 2L\{y\} = \dfrac{1}{s} \\ -4L\{x\} + (s+1)L\{y\} = 0 \end{cases} \Rightarrow L\{x\} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{s} & 2 \\ 0 & s+1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-5 & 2 \\ -4 & s+1 \end{vmatrix}} = \frac{s+1}{s(s-1)(s-3)}$$

$$\Rightarrow x = L^{-1}\left\{\frac{s+1}{s(s-1)(s-3)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1/3}{s} + \frac{-1}{s-1} + \frac{2/3}{s-3}\right\} \Rightarrow x(t) = \frac{1}{3} - e^{t} + \frac{2}{3}e^{3t}$$

$$L\{y\} = \frac{\begin{vmatrix} s-5 & \frac{1}{s} \\ -4 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-5 & 2 \\ -4 & s+1 \end{vmatrix}} = \frac{4}{s(s-1)(s-3)} \Rightarrow y = L^{-1}\left\{\frac{4/3}{s} + \frac{-2}{s-1} + \frac{2/3}{s-3}\right\} \Rightarrow y(t) = \frac{4}{3} - 2e^{t} + \frac{2}{3}e^{3t}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + y & x(0) = 1 \\ \dfrac{dy}{dt} = 2y + z & y(0) = 0 \\ \dfrac{dz}{dt} = z & z(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x(0) + sL\{x\} = -L\{x\} + L\{y\} \\ -y(0) + sL\{y\} = 2L\{y\} + L\{z\} \\ -z(0) + sL\{z\} = L\{z\} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (s+1)L\{x\} - L\{y\} = 1 \\ (s-2)L\{y\} - L\{z\} = 0 \\ (s-1)L\{z\} = 1 \end{cases}$$

$$(s-1)L\{z\} = 1 \Rightarrow L\{z\} = \frac{1}{s-1} \Rightarrow \boxed{z = e^{t}} \rightarrow$$

$$\Rightarrow (s-2)L\{y\} = \frac{1}{s-1} \Rightarrow L\{y\} = \frac{1}{(s-1)(s-2)} \Rightarrow$$

$$y = L^{-1}\left\{\frac{-1}{s-1} + \frac{1}{s-2}\right\} \Rightarrow \boxed{y = -e^{t} + e^{2t}}$$

$$\rightarrow (s+1)L\{x\} = 1 - \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s-2} \Rightarrow L\{x\} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s^2-1} + \frac{1}{(s-2)(s+1)} \Rightarrow$$

$$x(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s^2-1} + \frac{1/3}{s-2} + \frac{-1/3}{s+1}\right\} \Rightarrow x(t) = e^{-t} - \sinh t + \frac{1}{3}e^{2t} - \frac{1}{3}e^{-t}$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx}{dt} + x = \dfrac{dy}{dt} + y \\[2ex]
\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{d^2y}{dt^2} = e^t
\end{cases}
\qquad
\begin{matrix}
x(0) = 0 \\
x'(0) = 1 \\
y(0) = 1 \\
y'(0) = 0
\end{matrix}
$$

$$
\begin{cases}
-x(0) + sL\{x\} + L\{x\} = -y(0) + sL\{y\} + L\{y\} \\
-x'(0) - sx(0) + s^2L\{x\} - y'(0) - sy(0) + s^2L\{y\} = L\{e^t\}
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
(s+1)L\{x\} - (s+1)L\{y\} = -1 \\
s^2L\{y\} + s^2L\{x\} = \dfrac{s^2}{s-1}
\end{cases}
$$

$$
\Rightarrow L\{x\} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -(s+1) \\ \frac{s^2}{s-1} & s^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s+1 & -(s+1) \\ s^2 & s^2 \end{vmatrix}} = \frac{1}{s^2-1} \Rightarrow x(t) = \sinh t
$$

$$
\Rightarrow L\{y\} = \frac{\begin{vmatrix} s+1 & -1 \\ s^2 & \frac{s^2}{s-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s+1 & -(s+1) \\ s^2 & s^2 \end{vmatrix}} = \frac{s}{s^2-1} \Rightarrow y(t) = \cosh t
$$

بنام خدا

سوالات امتحان پایان ترم معادلات دیفرانسیل دانشگاه همدان اردیبهشت ماه ۸۴

۱- جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را بیابید

$$(x - y\ln y + y\ln x)\,dx + x(\ln y - \ln x)\,dy = 0$$

۲- چنانچه معادله دیفرانسیل $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ فاکتور انتگرالی به صورت $\mu = \mu(x^2+y^2)$ داشته باشد فرمولی برای یافتن این فاکتور بیابید و سپس معادله دیفرانسیل

$$(2x^2 + 2y^2 + x)\,dx + (x^2 + y^2 + y)\,dy = 0$$

را حل کنید

۳- معادله دیفرانسیل $yy'' - 2y'^2 + y^2 = 0$ را حل کنید

۴- معادله دیفرانسیل $x^3y''' + x^2y'' - 2xy' + 2y = (\ln x)^2 - 1$ را حل کنید $(x>0)$

(راهنمایی: از تغییر متغیر $x = e^t$ استفاده کنید)

۵- معادله $y'' + P(x)y' + q(x)y = 0$ را در نظر بگیرید $y = u(x)\cdot z(x)$ قرار دهید سپس فرض کنید که $2u' + P(x)u = 0$. با حل این معادله دیفرانسیل u را بیابید و به کمک آن نشان دهید که معادله $y'' + P(x)y' + q(x)y = 0$ به صورت $z'' + Q(x)z = 0$ درمی‌آید که در آن $Q(x) = q(x) - \frac{1}{2}P'(x) - \frac{1}{4}P^2(x)$

آنگاه در حالت خاص معادله $y'' + 2xy' + (1+x^2)y = 0$ را با همین روش حل کنید.

موفق باشید

شاهکوئی - کرامتی - کهریان

به نام خدا

سؤالات امتحان میان ترم معادلات دیفرانسیل دانشگاه رازی

- جواب معادلات دیفرانسیل زیر را بیابید

---

1) $2yy' = \sin^{-1}x\,(\ln y)^{-1}$

2) $(x - y\ln y + y\ln x)\,dx + x(\ln y - \ln x)\,dy = 0$

3) $(y^2 + x^2\sin(xy))\dfrac{dy}{dx} + xy(\sin(xy)) - \cos(xy) + e^{2x} = 0$

4) $(4xy + 3y^2 - x)\,dx + x(x + 2y)\,dy = 0$

5) $y'' = y'(y' + y)$

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

6- نشان دهید که $y_1 = \sin\frac{1}{x}$ یک جواب معادله

$x^4y'' + 2x^3y' + y = 0$

است سپس جواب عمومی را بیابید

موفق باشید

بسمه تعالی

دانشگاه سمنان
دانشکده علوم پایه

سئوالات امتحان میان ترم درس: معادلات دیفرانسیل

نام استاد: گروه آموزشی: تاریخ امتحان: ۸۷/۶/۲۳ تعداد سئوال: ۵ زمان پاسخگوئی: ۲ ساعت

استفاده از ماشین حساب: مجاز ☐ غیر مجاز ☒ نوع امتحان: باز ☐ بسته ☒ شماره صفحه:

نام و نام خانوادگی دانشجو: شماره دانشجوئی:

بارم

۱- فرض کنید معادله $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ فاکتور انتگرال مانند $\mu=\mu(z)$ که $z=\frac{y}{x}$ دارد فرمولی برای یافتن این فاکتور بیابید سپس به کمک آن معادله زیر را حل کنید

$$\left(\frac{x^2}{y}-x^2y\right)dx+(8x-x^3)\,dy=0$$

۲- جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y\operatorname{Ln}y\,dx+(x-\operatorname{Ln}y)\,dy=0$ را بیابید

۳- جواب عمومی معادله دیفرانسیل

$$y'''-\frac{2}{x}y''+\frac{5}{x^2}y'-\frac{5}{x^3}y=0$$

را بیابید

۴- با استفاده از عملگرها و خواص آن‌ها جواب خصوصی معادله

$$(D^2+4)y=\sin 2x+x^2e^x$$

را بیابید

۵- جواب عمومی معادله زیر را بیابید

$$x^2(\operatorname{Ln}x-1)y''-xy'+y=\frac{\operatorname{Ln}x-1}{x}$$

موفق باشید.

مدت: ۲ ساعت

به نام خدا

نام و نام خانوادگی

سؤالات امتحان پایان ترم معادلات دیفرانسیل دانشگاه سمنان آذرماه ۸۶

۱- اگر $y_1 = \frac{-1}{x}$ جوابی از معادله $x^2 y' = x^2 y^2 + xy + 1$ باشد جواب عمومی معادله را بیابید.

۲- اگر عامل انتگرال ساز معادله $y\,dx - (y^2 + x^2 + x)\,dy = 0$ بصورت $h = h(x^2 + y^2)$ باشد ابتدا h را بیابید و سپس معادله را حل کنید.

۳- معادلات زیر را حل کنید.

(i) $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$

(ii) $y'' + y'^2 = 2e^{-y}(y')^3$

(iii) $(2x-1)^2 y'' + 3(2x-1)y' + 4y = 0$

۴- با استفاده از عملگرها معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$(D^2 - 3D + 2)y = e^{2x}(x+1)$$

موفق باشید

به نام خدا

سئوالات امتحان میان ترم معادلات دیفرانسیل دانشگاه سمنان آذر ماه ۸۵

۱- معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید (جواب عمومی)

(i) $\left[\frac{y}{x}\ln(\ln y) + \frac{2}{3}xy^4\right]dx + \left[\frac{\ln x}{\ln y} + x^2y^3\right]dy = 0$

(ii) $xy' + y = \cancel{2}x^2y'\ln y$

(iii) $xy'' + (1-2x)y' + (x-1)y = 0$

(iv) $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{e^{3x}}{e^{2x}+1}$

(v) $(D^3 + D^2 + D + 1)y = \cosh x + \sin x$

۲- معادله دیفرانسیلی بنویسید که جواب عمومی آن بصورت

y

$y_g = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + e^{2x}(c_3\sin 2x + c_4\cos 2x) + c_5$

موفق باشید

بنام خدا

سئوالات امتحان میان ترم معادلات دیفرانسیل رشته شیمی کاربردی آذر ۵۶ ۸۴

۱- جواب عمومی معادلات زیر را بیابید

(1) $$y' = \frac{y}{x+\sqrt{xy}}$$

(2) $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^{y}-x}$$

(3) $$\left(3x+\frac{6}{y}\right)+\left(\frac{x^2}{y}+\frac{3y}{x}\right)\frac{dy}{dx}=0$$

۲- طرفین معادله $(4xy+3y^4)dx+(2x^2+5xy^3)dy=0$ را در $\mu = x^m y^n$ ضرب کنید

سپس m و n را چنان بیابید که معادله کامل باشد و آنگاه معادله را حل کنید.

۳- جواب عمومی معادلات زیر را بیابید

$$x^2y''+xy'=1$$

$$y'''+y''-2y=0$$

$$(x^2+1)y''-2xy'+2y=-2(x^2+1)^2$$

موفق باشید

بنام خدا

سوالات امتحانیان ترم معادلات دیفرانسیل دانشگاه سمنان اردیبهشت ماه ۸۴

۱- جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را بیابید

$$(x - y\ln y + y\ln x)\,dx + x(\ln y - \ln x)\,dy = 0$$

۲- چنانچه معادله دیفرانسیل $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ فاکتور انتگرالی بصورت $\mu = \mu(x^2+y^2)$ داشته باشد فرمولی برای یافتن این فاکتور بیابید و سپس معادله دیفرانسیل

$$(2x^2 + 2y^2 + x)\,dx + (x^2 + y^2 + y)\,dy = 0$$

را حل کنید

۳- معادله دیفرانسیل $yy'' - 2y'^2 + y^2 = 0$ را حل کنید

۴- معادله دیفرانسیل $x^3y''' + x^2y'' - 2xy' + 2y = (\ln x)^2 - 1$ ، $x > 0$ را حل کنید (از تغییر متغیر $x = e^t$ استفاده کنید)

۵- معادله $y'' + P(x)y' + q(x)y = 0$ را در نظر بگیرید (راهنمایی: از تغییر متغیر $y = u(x)\cdot z(x)$ قرار دهید) سپس فرض کنید که $2u' + P(x)u = 0$ با حل این معادله تغییر متغیر را بیابید و بکمک آن نشان دهید که معادله $y'' + P(x)y' + q(x)y = 0$ بصورت $z'' + Q(x)z = 0$ درمی‌آید که در آن $Q(x) = q(x) - \frac{1}{2}p'(x) - \frac{1}{4}p^2(x)$

۶- آن نقطه در حالت خاص معادله $y'' + 2xy' + (1 + x^2)y = 0$ را با چه روشی حل کنید

موفق باشید

شاعوری - کرامتی - ...