. 11 .23

بنام خدا

mrarghavan.blogfa.com

معادلات دیفرانسیل (ارغوان)

وقتی به دنبال یک تابع اولیه مانند $F(x)$ هستیم یعنی اینکه یک تابع مجهول بیابیم که در رابطه $F'(x) = f(x)$ صادق است. ملاحظه می‌شود که یک معادله دیفرانسیل معمولی شامل یک متغیر مستقل و یک متغیر وابسته (تابع مجهول) و مشتقات آن باشد.

e.g: $F'(x) = x^2$, $y' = xy$, $y'' + y' = 0$ متغیر مستقل x

وابسته y

eg: $x''' + x'y = y$ مستقل y ، وابسته x

* بالاترین مرتبه (مرحله) مشتق‌گیری را مرتبه معمولی معادله گویند.

eg: فرض کنید 2,000,000 تومان پول پس‌انداز کردیم سود بانک سالانه 20٪ است در طول این مدت به حساب پولی واریز یا برداشت نشده است. مبلغ این پس‌انداز بعد از 3 سال را بیابید.

$$\frac{dN(t)}{dt} = 0.2\,N(t) \Rightarrow \frac{dN(t)}{N(t)} = 0.2\,dt \xrightarrow{\int} \ln N(t) = 0.2t + c$$

$$\xrightarrow{e} N(t) = e^{0.2t} \cdot e^{c}$$

یک خانواده یک پارامتری $\Rightarrow N(t) = k e^{0.2t}$

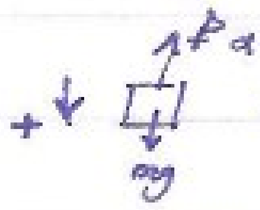
$i.P: t=0 \Rightarrow N(0) = k = 2.000.000$

جواب خصوصی $\Rightarrow N(t) = 2.000.000\, e^{0.2t}$

$$\xrightarrow{t=3} N(t) = 3644000$$

eg:

$F = ma \Rightarrow mg - kv = m\dfrac{dv}{dt} \Rightarrow \dfrac{dv}{dt} + \dfrac{k}{m}v = g$



$F \propto v \Rightarrow F = kv$

معادله دیفرانسیل مرتبه اول

طرز تشکیل معادله دیفرانسیل:

معادله دیفرانسیل معمولی: یک رابطه‌ای بین شامل یک متغیر مستقل، یک متغیر وابسته (تابع مجهول) و مشتقات تابع مجهول

eg ، معادله دیفرانسیل : $xy'' - y' = 5x^2$ ، $2xy\,dx + e^{x-y}\,dy = 0$

$\div dx \quad 2xy + e^{x-y}\,y' = 0$

$\div dy \quad 2xy\,x' + e^{x-y} = 0$

eg : دستهٔ خطوط با عرض از مبداء ۱ و شیب m ، $y = mx + 1$

خانواده خطوط : خانواده ۱-پارامتری $F(x, y, m) = 0$

- با یکبار مشتق گیری $y' = m \Rightarrow y = y'x + 1$

eg:

$$\begin{cases} 1.\quad y = Ae^{3x} + Be^{-x} \\ 2.\quad y' = 3Ae^{3x} - Be^{-x} \\ 3.\quad y'' = 9Ae^{3x} + Be^{-x} \end{cases} \quad , \; A, B = cte$$

باید پارامترهای ثابت را از معادله حذف کنیم
پس به تعداد آنها مشتق می‌گیریم.

$1+2: \quad y + y' = 4Ae^{3x}$

$2+3: \quad y' + y'' = 12Ae^{3x} \Rightarrow y' + y'' = 3(y + y')$

$\Rightarrow y'' - 2y' - 3y = 0$

نکته : $y = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x)$

معادله :
$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & \cdots & f_n & y \\ f_1' & f_2' & f_3' & \cdots & f_n' & y' \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ f_1^{(n)} & f_2^{(n)} & f_3^{(n)} & \cdots & f_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0$$

$y = Ae^{3x} + Be^{-x}$

$$\begin{vmatrix} e^{3x} & e^{-x} & y \\ 3e^{3x} & -e^{-x} & y' \\ 9e^{3x} & e^{-x} & y'' \end{vmatrix} = 0 \quad y\begin{vmatrix} 3e^{3x} & -e^{-x} \\ 9e^{3x} & e^{-x} \end{vmatrix} - y'\begin{vmatrix} e^{3x} & e^{-x} \\ 9e^{3x} & e^{-x} \end{vmatrix}$$

$$+ y''\begin{vmatrix} e^{3x} & e^{-x} \\ 3e^{3x} & -e^{-x} \end{vmatrix} = 0$$

$$12e^{2x}y + 8e^{2x}y' \underset{\text{منفی}}{-} 4e^{2x}y'' = 0 \Rightarrow 4e^{2x}\left(3y + 2y' - y''\right) = 0$$

$$\Rightarrow 3y + 2y' - y'' = 0$$

معادله دیفرانسیل $\xrightarrow{\text{حل}}$ خانواده منحنی آن

با تعدادی پارامترها مشتق گیری شود آنگاه پارامترها حذف می‌شوند

* حل یک معادله دیفرانسیل یعنی یافتن تابع مجهول بطوریکه در معادله صادق باشد.

انواع جواب:
1. جواب عمومی
2. جواب خصوصی (که از جواب عمومی بدست می‌آید.)
3. جواب منفرد (غیرعادی) (که این جواب مستقل از جواب عمومی است.)

eg: $y + y'' = 0$ answer: $y = A\sin x + B\cos x$ چرا؟

$$\xRightarrow[\text{باید}]{\text{فقط}} (A\sin x + B\cos x) + (A\sin x + B\cos x)'' = 0$$

$$A\sin x + B\cos x + -A\sin x - B\cos x = 0$$

eg: $y + y'' = 0$ answer: $y = A\sin x + B\cos x$ شرط اولیه: $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$

$$y(0) = 2 \Rightarrow B = 2$$

$$y'(x) = A\cos x - B\sin x \Rightarrow y'(0) = A = -1$$

$$\Rightarrow y = -\sin x + 2\cos x$$

eg: $y' = \sqrt{y}$ answer: $2\sqrt{y} = x + C$

آیا معادله روبرو دارای جوابی به فرم فوق است؟ هم می‌توانیم جایگذاری می‌کنیم هم می‌توانیم از صورت سؤال جواب مشتق بگیریم تا به صورت سؤال برسیم.

آیا این تنها جواب است؟

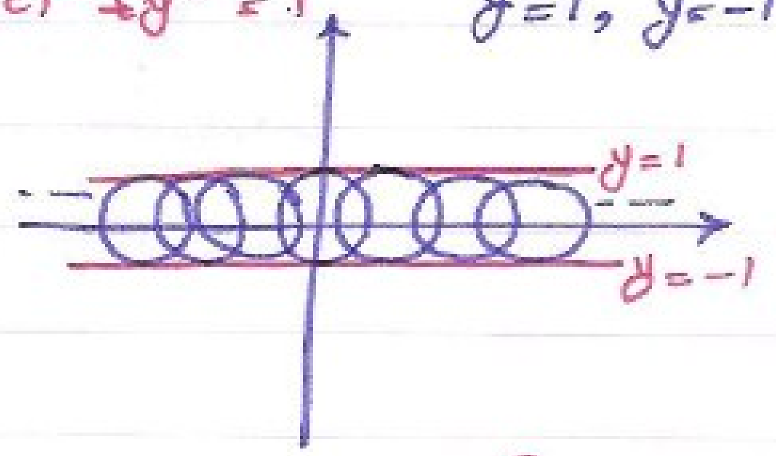
این سؤال نیاز به اطلاعات معادلاتی ندارد.

$y = 0$ یک جواب منفرد.

~~جواب منفرد یعنی جواب‌هایی که در خانواده عمومی وجود ندارد و بر آن مماس است که اصطلاحاً پوش می‌گوییم.~~

جواب منفرد جوابی است که بر تمام جواب‌های خانواده عمومی مماس است که اصطلاحاً پوش می‌گوییم.

eg: $(x-c)^2+y^2=1$ $y=1$, $y=-1$ جواب‌های پوش



تحقیق شود:

* جواب عمومی در صورت وجود منحصر به فرد است *

eg: نشان دهید جواب‌های معرفی در معادلات دیفرانسیل صادق اند؟

$y=\cosh x$, $y''-y=0$ حل شد $(1+x^2)y'=xy$, $y=\sqrt{1+x^2}$ حل شد

$y=\sqrt{10-x^2}$, $x+yy'=0$ حل شد $xy'-x\sin x-y=0$, $y=x\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$ حل شد

$y=e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt+e^{x^2} \rightarrow y'-2xy=1$ حل شد

$y=x\left(\int \frac{e^x}{x}dx+c\right) \rightarrow y'=y/x+e^x$ حل شد

$y=c_1x^{-2}+c_2x^{-2}\ln x \rightarrow x^2y''+5xy'+4y=0$ حل شد معادله اویلر

معادله خطی و غیرخطی:

$a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\dots+a_1(x)y'+a_0(x)y=f(x) \Longleftarrow$ تابع خطی

$5y''+xy'=\sin x$ خطی

$y'y''+xy=1$ غیرخطی

$e^y+x=10$ ~~غیرخطی~~ خطی $\Rightarrow e^y=10-x \Rightarrow y=\ln(10-x)$ $x<10$

$\cosh x\, y''+e^x y=\ln x$ خطی

اگر در دید اولیه معادله غیرخطی بود و با یک عملیات جبری (×، ÷، +، −، √ و ...) مشاهده شد آن معادله خطی است.

روشهای حل معادلات دیفرانسیل معمولی:

معادلات مرتبه اول:

$$y' = f(x,y)$$

L

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

۱. معادلات جدا شدنی ← $y' = f(x,y) \rightsquigarrow y' = h(x)\,g(y)$

2. معادلاتی که قابل تبدیل به فرم اول اند. $\dfrac{dy}{dx} = h(x)\,g(y) \rightsquigarrow \dfrac{dy}{g(y)} = h(x)\,dx$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int h(x)\,dx + c$$

e.g: $(y^2+1)\,dx - (x^2+1)\,dy = 0$ حل شد

eg: $(xy^2 - x)\,dx + (x^2y + y)\,dy = 0$ حل شد

eg: $xy^3\,dx + (y+1)e^{-x}\,dy = 0$ حل شد

eg: $x\ln x\,dx + \sqrt{1+y^2}\,dy = 0$ حل شد

eg: $y' = \dfrac{x}{y^2\sqrt{1+x^2}}$ حل شد

eg: $(x-1)\cos y\,dy = 2x\sin y\,dx$ حل شد

eg: $y' = e^{2x-y} + xe^{3-y}$ حل شد

eg: $\dfrac{dr}{d\theta}\cot\theta - r = 2$ حل شد (شک)

eg: مقدار ?a، $y = x^a \cos x$ جواب معادله $x^2y'' + xy' + (x^2 - 1/4)y = 0$ (حل نشد)

.11.30

معادلاتی که در ابتدا جدایی ناپذیرند اما به کمک تغییرهایی جدایی پذیر می شوند:

1. $y' = f(ax+by+c)$ ، $b \neq 0$

2. معادلاتی که همگن هستند با تغییر متغیر به جدایی پذیر می رسیم.

3. $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}\right)$

4. معادلاتی که به کمک تغییر متغیر $y = t^{\alpha}$ همگن می شوند و به کمک شیوه شماره ۲ جدایی پذیر و حل می شوند.

دسته اول:

$y' = f(ax+by+c) \quad b \neq 0$

راه حل: $ax+by+c = u \Rightarrow u' = a + by' \Rightarrow y' = f(u) = \frac{u'-a}{b} \rightsquigarrow$ جدایی پذیر

eg: $y' = (y+4x-1)^2$ حل شد

eg: $y' = -\sin^2(x+y+3)$ حل شد

eg: $y' = \cos^2(2x+y-1) - 2$ $\quad 2x+y-1 = u \Rightarrow 2 + y' = u' \Rightarrow y' = u' - 2$

$\Rightarrow u' - 2 = \cos^2 u - 2 \Rightarrow u' = \cos^2 u \Rightarrow \frac{du}{\cos^2 u} = dx$

$\rightarrow \tan u = x + c \Rightarrow \tan(2x+y-1) = x + c$

تعریف تابع همگن:

$\forall t > 0 \Rightarrow f(tx, ty) = t^n f(x, y)$

دراینصورت تابع f همگن از مرتبه n است.

eg: $f(x,y) = \ln(\frac{x}{y}) - 1$

$f(tx, ty) = \ln(\frac{tx}{ty}) - 1 = \ln(\frac{x}{y}) - 1 \rightsquigarrow$ تابع همگن از درجه صفر

eg: $f(x,y) = x^2 - y^2$

$f(tx, ty) = t^2x^2 - t^2y^2 = t^2(x^2 - y^2) = t^2 f(x,y)$ تابع همگن از درجه 2

eg: $f(x,y) = y\ln(\frac{y}{x}) + x^2$

$f(tx, ty) = ty\ln(\frac{y}{x}) + t^2x^2$ تابع همگن نیست.

معادله $y'=f(x,y)$ را همگن گوییم هرگاه $f(x,y)$ همگن **فقط** از درجه صفر باشد.

معادله دیفرانسیلی $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ را همگن گوییم هرگاه توابع $M(x,y)$ ، $N(x,y)$ همگن و هم درجه باشند.

eg: $y'=\frac{-11xy}{x^2-3y^2}$ حل شد

eg: $y'=\frac{y}{2x}+\frac{x}{2}y^{-1}$

معکوس شود

eg: $y'=\frac{y}{x+\sqrt{xy}}=\frac{x(y/x)}{x(1+\sqrt{y/x})}$ حل شد

متغیر مستقل با توان t

eg: $y'=\frac{y^2+2xy}{x^2}=\frac{x^2((y/x)^2+2(y/x))}{x^2}$ حل شد

eg: $y'=\frac{y}{x}+\csc(y/x)$ حل شد

eg: $y'-y/x=\cos^2(y/x)$ حل شد

~~eg: $y'=\frac{2xy\,e^{(x/y)^2}}{y^2+y^2e^{(x/y)^2}+2x^2e^{(x/y)^2}}$~~ حل شد

eg: $xy'+y\ln x=y\ln y+y$ حل شد

حل: $y'=f(x,y)=f(tx,ty)=\begin{cases} f(1,y/x) & x>0 \\ f(-1,-y/x) & x<0 \end{cases}$

$\forall t>0 \rightarrow$ تعریف میکنیم $t=\begin{cases} 1/x & x>0 \\ -1/x & x<0 \end{cases}$

$\frac{y}{x}=u \Rightarrow y'=xu'+u$

$xu'+u=\begin{cases} f(1,u) \\ f(-1,-u) \end{cases}$

$y=ux$ پس میشود حل

eg: $y'-y/x+\csc(y/x)=0$

همگن ، درجه صفر ✓

$\frac{y}{x}=u \Rightarrow y=ux \Rightarrow y'=xu'+u$

$\Rightarrow xu'+\cancel{u}-\cancel{u}+\csc u=0 \Rightarrow x\frac{du}{dx}=-\csc u \rightarrow \int -\sin u\,du=\int\frac{dx}{x}+c$

$\Rightarrow \cos u=\ln|x|+c \Rightarrow \cos u=\ln|x|+\ln|c| \Rightarrow \cos u=\ln|cx|$

$\Rightarrow \cos y/x=\ln|cx|$

نکته ، $y'^{-1} = x'$

نکته: در سوالات کسری که جملات مخرج بیشتر از صورت بود باید کسر را وارون کنیم.

$$y' = \frac{2xy\, e^{(\frac{x}{y})^2}}{y^2 + y^2 e^{(x/y)^2} + 2x^2 e^{(\frac{x}{y})^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{dx}{dy} = x' = \frac{y^2 + y^2 e^{(x/y)^2} + 2x^2 e^{(\frac{x}{y})^2}}{2xy\, e^{(\frac{x}{y})^2}}$$

$$y \neq 0,\ \frac{x}{y} = u \Rightarrow x = yu \Rightarrow x' = u'y + u$$

$$\Rightarrow u'y + u = \frac{\cancel{y^2}\left(1 + e^{(x/y)^2} + 2(\frac{x}{y})^2 e^{(x/y)^2}\right)}{\cancel{y^2}\left(2(x/y)\, e^{(x/y)^2}\right)}$$

$$u'y + \cancel{u} = \frac{1 + e^{u^2} + 2u^2 e^{u^2}}{2u e^{u^2}} = \frac{1}{2ue^{u^2}} + \frac{1}{2u} + \cancel{u}$$

$$\cancel{dy}\ y\frac{du}{dy} = \frac{1 + e^{u^2}}{2ue^{u^2}} \Rightarrow \frac{2ue^{u^2}\,du}{1 + e^{u^2}} = \frac{dy}{y}$$

$$\overset{\int}{\Rightarrow} Ln|1 + e^{u^2}| = Ln|y| + c \Rightarrow 1 + e^{u^2} = cy$$

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}\right)$$

1. if $c = 0 \overset{\text{Then}}{\Rightarrow} y' = f\left(\frac{ax + by}{a'x + b'y}\right) \rightsquigarrow$ همگن

2. لااقل یکی از c و c' صفر نباشد.

$2\text{-}1: \frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$. دو خط متقاطع اند ← تغییر مبدأ می دهیم.

$2\text{-}2: \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ دو خط موازی اند ← یعنی دو خط مضرب اسکالر از هم اند.

$$\begin{matrix} 2\text{-}1: & ax + by + c = 0 \\ 2\text{-}2: & a'x + b'y + c' = 0 \end{matrix} \xrightarrow[\text{تلاقی}]{\text{نقطه}} \begin{matrix} x = x_0 \\ y = y_0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x - x_0 = X \Rightarrow dx = dX \\ y - y_0 = Y \Rightarrow dy = dY \end{matrix}$$

$$y' = f\left(\frac{a(X + x_0) + b(Y + y_0) + c}{a'(X + x_0) + b'(Y + y_0) + c'}\right) = f\left(\frac{aX + bY}{a'X + b'Y}\right)$$ همگن

eg: $(2x-y+3)dx-(3x+2y-1)dy=0$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x-y+3}{3x+2y-1}$$

$$\begin{cases}2x-y=-3\\3x+2y=1\end{cases}\Rightarrow 7x=-5\Rightarrow x=-5/7$$

$$\Rightarrow y=\frac{-10}{7}+3=\frac{11}{7}\quad\Rightarrow\begin{cases}X=x+5/7\\Y=y-11/7\end{cases}$$

$$\Rightarrow Y'=\frac{2X-Y}{3X+2Y}=\frac{X(2-\frac{Y}{X})}{X(3+2Y/X)}=\frac{2-u}{3+2u}\Rightarrow u'X+u=\frac{2-u}{3+2u}$$

to be Continued

$$2-2:\ \frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=k\Rightarrow\begin{cases}a=a'k\\b=b'k\end{cases}\rightarrow y=f\left(\frac{k(a'x+b'y)+c}{a'x+b'y+c'}\right)$$

$$\boxed{a'x+b'y=u}$$

eg: $y'=\dfrac{2x-3y+1}{6x-4y-5}=\dfrac{2x-3y+1}{-2(2x-3y)-5}$ $\quad u=2x-3y$, $w=2-3y'$

$$\frac{2-u'}{3}=\frac{u+1}{-2u-5}$$

to be Continued

.12.2

eg: $(2x-\sin y+1)\cos y\,dy-(4x-2\sin y)dx=0$ $\quad 2x-\sin y=u$, $2-\cos y.y'=u'$, $(2-u')=\cos y\,y'$

$$\frac{(2x-\sin y+1)\cos y.y'}{2(2x-\sin y)}=1\Rightarrow$$

$$\frac{(u+1)(2-u')}{2u}=1$$

$L\ (2x-t+1)dt-(4x-2t)dx=0$

دسته سوم:

$$y\,f(x\cdot y)\,dx + x\,g(x\cdot y)\,dy = 0$$

راه حل: $xy = u$

eg: $(x^2y^3 + y)\,dx + (x + x^3y^2)\,dy = 0$ حل شود

eg: $xy' - y(\ln(xy) - 1) = 0$ $\quad du - \frac{u}{x}dx - \frac{u}{x}dx(\ln u - 1) = 0$

$$du - \frac{u}{x}dx - \frac{u\ln u}{x}dx + \frac{u}{x}dx = 0$$

$$\frac{du}{u\ln u} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln u = cx$$

$$\ln xy = cx$$

دسته چهارم: $y = t^\alpha$ راه حل

eg: $(y^4 - x^2)\,dy + xy\,dx = 0$ حل شود

eg: $y(1+\sqrt{x^2y^4+1})\,dx + 2x\,dy = 0$

$y = t^\alpha \Rightarrow t^\alpha(1+\sqrt{x^2t^{4\alpha}+1})\,dx + 2x\alpha t^{\alpha-1}\,dt = 0$

$F(x,t) = F(\lambda x, \lambda t) \Rightarrow \lambda^\alpha t^\alpha(1+\sqrt{x^2\lambda^2\lambda^{4\alpha}t^4+1})\,dx + 2x\alpha\lambda^\alpha t^{\alpha-1}\,dt = 0$

$$\Rightarrow 4\alpha + 2 = 0 \Rightarrow \alpha = -\tfrac{1}{2}$$

$y = t^{-1/2} \Rightarrow t^{-1/2}(1+\sqrt{x^2t^{-2}+1})\,dx + 2x(-\tfrac{1}{2})t^{-3/2}\,dt = 0$

$$\Rightarrow (1+\sqrt{(x/t)^2+1})\,dx + x/t\,dt = 0$$

$\frac{x}{t} = u \Rightarrow x = ut \Rightarrow$ to be Continued:..

$t/x = u$

eg: $(x+1)y' + (y-1)\tan\left(\frac{y+x}{x+1}\right) = 0$ با کدام تغییر متغیر معادله فوق تفکیک پذیر می‌شود.

1. $u = y/x$
2. $u = \frac{y+x}{x+1}$
3. $u = \frac{y}{x+1}$
4. $u = \frac{y-1}{x+1}$ ✓

سؤال: آیا $\frac{y+x}{x+1}$ می‌توان معادله را حل کرد؟ تفکیک پذیر می‌شود.

مشکل را حل کنید. حل شد

معادلات کامل:

$y = f(x) \longrightarrow dy = \overset{\text{مشتق}}{f_x}\, dx$

دیفرانسیل کل: $z = f(x,y) \Rightarrow dz = df = f_x dx + f_y dy$

تعریف دیفرانسیل کامل:

if $\exists f$: $f_x = M(x,y)$, $f_y = N(x,y)$ Then $df = 0 \Rightarrow f = c$

$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

مشتق نسبت به y: $f_{xy} = M_y = \frac{\partial M}{\partial y}$

مشتق نسبت به x: $f_{yx} = N_x = \frac{\partial N}{\partial x}$

اگر f_y, f_x, f در بازه پیوسته باشند $\Rightarrow f_{xy} = f_{yx}$

شرط کامل بودن معادله: $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

* $f(x,y) = x^3 e^{y^2}$

$f_x = 3x^2 e^{y^2}$ $\quad$ $f_y = 2ye^{y^2}x^3$

$f_{xy} = 6x^2 y e^{y^2}$ $\quad$ $f_{yx} = 6x^2 y e^{y^2}$

$\Leftarrow$ معادله دیفرانسیل کامل: $M(x,y)dx + N(x,y)dy = df$

شیوه حل: 1. روش مستقیم

2. روش شتی (دو حدی)

3. روش شتی (اجتماع) x

eg: $(x^3+\cos y+\frac{1}{x})dy=(\frac{y}{x^2}-3yx^2)dx$ حل شد

eg: $(-\sin x+y^2e^x)dx+2(ye^x+4y^3)dy=0$ حل شد

eg: $y'=\frac{2+ye^{xy}}{2y-xe^{xy}}$ حل شد

eg: $2y\frac{\ln x}{x}\cdot\frac{1}{y'}+(\ln x)^2=0$ حل شد

eg: $ye^x dx+(y+e^x)dy=0$ حل شد

eg: $(y^{-3}-y^{-2}\sin x)y'+y^{-1}\cos x=0$ حل شد

eg: $(e^{\frac{1}{x}}\ln y+y\sin x)dx+(\frac{e^x}{y}-\cos x)dy=0$ حل شد

$y'=\frac{2+ye^{xy}}{2y-xe^{xy}} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{2+ye^{xy}}{2y-xe^{xy}} \Rightarrow \underbrace{(2y-xe^{xy})}_{N}dy-\underbrace{(2+ye^{xy})}_{M}dx=0$

$M_y=-(e^{xy}+xye^{xy})$

$N_x=-(e^{xy}+xye^{xy})$

$\Rightarrow M_y=N_x \Rightarrow$ کامل

$\begin{cases} f_x=M \\ f_y=N \end{cases} \longrightarrow f_x=-(2+ye^{xy})$

$\downarrow \int_x$

$f=-2x-e^{xy}+\overset{\text{ثابت}=g(y)}{c''} \Rightarrow f=-2x-e^{xy}+y^2=c$

$\downarrow$

$f_y=-xe^{xy}+g'(y)=N$

$-xe^{xy}+g'(y)=2y-xe^{xy}$

$g'(y)=2y \Rightarrow g(y)=y^2$

راه ساده تر: $f_x = -(2+ye^{xy}) \xrightarrow{\int_x} f = -2x - e^{xy}$

$f_y = 2y - xe^{xy} \xrightarrow{\int_y} f = y^2 - e^{xy}$

$\xrightarrow{\cup} f = -2x + y^2 - e^{xy} = c$

راه ساده تر: $\int M dx + \int N^* dy = c$

N^* یعنی جملات فاقد x از N

یا

$\int N dy + \int M^* dx = c$

M^* یعنی جملات فاقد y از M

$\Rightarrow \int -(2+ye^{xy})dx + \int 2y\,dy = c$

$-2x - e^{xy} + y^2 = c$

eg: $e^{3x}(2xy + 3x^2y + y^3)dx + (x^2e^{3x} + y^2e^{3x})dy = 0$ حل شود

.12 .7

معادلات غیر کامل:

$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$

eg: $xdy - ydx = 0 \qquad \frac{\partial M}{\partial y} = -1 \;,\; \frac{\partial N}{\partial x} = 1 \rightarrow$ کامل نیست

$\xrightarrow{\times 1/y^2} \frac{x}{y^2}dy - \frac{1}{y}dx = 0 \rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1}{y^2} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{1}{y^2} \rightarrow$ کامل است

جواب دیگر $\rightarrow d\left(\frac{-x}{y}\right) = 0 \rightarrow \frac{-x}{y} = c \Rightarrow$ جواب عمومی معادله

* این تابع $\frac{1}{y^2}$ منحصر به فرد نیست $\frac{a}{y^2}$

یا $\xrightarrow{\times \frac{1}{x^2+y^2}} \frac{1}{x^2+y^2}(xdy - ydx) = d\left(\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)\right) = 0 \Rightarrow \tan^{-1}\frac{x}{y} = c$

* فرض می کنیم تابع مانند $\mu = \mu(x,y)$ وجود داشته باشد که در معادله ضرب می شود که معادله کامل شود:

$$\mu M dx + \mu N dy = 0$$

شرط کامل بودن $\qquad \dfrac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \dfrac{\partial(\mu N)}{\partial x}$

$$\Rightarrow \frac{\partial \mu}{\partial y} M + \frac{\partial M}{\partial y}\mu = \frac{\partial \mu}{\partial x} N + \frac{\partial N}{\partial x}\mu \Rightarrow \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu = \frac{\partial \mu}{\partial y} M - \frac{\partial \mu}{\partial x} N$$

$$(M_y - N_x) = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial \mu}{\partial x} N - \frac{\partial \mu}{\partial y} M\right) \; *$$ حفظ شود.

واضح است که پیدا کردن تابع $\mu(x,y)$ ای که در تساوی فوق صادق باشد کار مشکلی است. بر این اساس می‌توان حالتهای خاص را در نظر بگیریم.

① $\mu(x,y) = \mu(x) \Rightarrow \dfrac{\partial \mu}{\partial y} = 0 \; , \; \dfrac{\partial \mu}{\partial x} = \dfrac{d\mu}{dx} \rightarrow$ چون تک متغیره است.

$$\xrightarrow[\text{در } *]{\text{جایگذاری}} (M_y - N_x) = \frac{1}{\mu}\left(\frac{d\mu}{dx} N\right) \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = \frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N} dx$$

$$\Rightarrow \ln \mu = \int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dx \Rightarrow \boxed{\mu = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N} dx}}$$ فاکتور انتگرال ساز

✓ eg: $(y^3 + 4x)dx + xy^2 dy = 0$

✓ eg: $(2y \sin x + 3y^4 \sin x \cos x)dx - (4y^3 \cos^2 x + \cos x)dy = 0$

✓ eg: $2\sin y^2 dx + xy \cos y^2 dy = 0$

✓ eg: $y^2 \sin x \, dx - y \cos x \, dy = 0$

✓ eg: $y^2 + 4ye^x + 2(y + e^x)y' = 0$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2\sin x + 12y^3 \sin x \cos x \; , \; \frac{\partial N}{\partial x} = 8y^3 \cos x \sin x + \sin x$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 2\sin x + 12y^3 \sin x \cos x - 8y^3 \cos x \sin x - \sin x = \sin x + 4y^3 \sin x \cos x$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{\sin x(1 + 4y^3 \cos x)}{-4y^3 \cos^2 x - \cos x} = -\operatorname{tg} x \, dx \Rightarrow \mu = e^{\int -\operatorname{tg} x \, dx} = e^{-\ln|\cos x|} = \cos x$$

ابتدا μ را در معادله ضرب کنید معادله حتماً کامل است و ...

② $\mu(x,y) = \mu(y) \Rightarrow \frac{\partial \mu}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{d\mu}{dy}$

جایگذاری در $\xrightarrow{}$ $*$

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{1}{\mu}\left(\frac{-d\mu}{dy} M\right) \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = \frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{-M}$$

$$\to \mu = e^{\int \frac{M_y - N_x}{-M} dy}$$

حل شد

✓ eg: $y\,dx + (2xy - e^{-2y})\,dy = 0$ ✓ $\overset{*}{\text{eg}}$: $(1+y^2)dx - (tg^{-1}y - x)dy = 0$

حل شد

× eg: $(x + 6xy^3 - 4y^3)dx - (2x + 4y^3)dy = 0$ ✓ $\overset{\circledast}{\text{eg}}$: $y\,dx + (x + yx^3(1+Lny))dy = 0$ حل شد

eg: $Cy\,dx + (\cancel{2xy} - 3x\,Siny)dy = 0$ حل شود

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1 + 3x^2y(1 + Lny) \to$$ در طبقه بعدی قرار دارد.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1 \Rightarrow \frac{\partial M/\partial y - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M} = \frac{1-2y}{1+y^2}$$

$$\to \mu = e^{\int \frac{1-2y}{1+y^2}}$$ to be Continued ...

③ $\mu(x,y) = \mu(u) \quad , \quad u = xy$

$$\frac{d\mu}{du} \quad \mu$$

$$\mu_x = y\frac{d\mu}{du} \quad , \quad \mu_y = x\frac{d\mu}{du}$$

$$\to \frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{Ny - Mx} du \to \mu = e^{\int \frac{M_y - N_x}{Ny - Mx}}$$

تمرین: $yN - xM = xy + x^3y^2(1 + Lny) \to \frac{\partial M/\partial y - \frac{\partial N}{\partial x}}{Ny - Mx} = \frac{-3}{xy} = -3/u$

$$\mu = e^{\int \frac{-3}{u} du} = 1/u^3$$

$g(x) = Ln\,1/x$

e.g: $y' = \frac{xy^2 - y}{x}$ حل شد

e.g: $(2xy^2 + y)dx + (x + 2x^2y - x^4y^3)dy = 0$ حل شد

e.g: $(xy - 2y^2)dx + (3xy - x^2)dy = 0$ حل شد

نکته: $Z = x^\alpha y^\beta$: با تغییر متغیر $y(Ax^ay^b + Bx^cy^d)dx + x(A'x^ay^b + B'x^cy^d)dy = 0$

$$\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \alpha, \beta = \text{ مجهول}$$

e.g: برای عامل

حل شد $(3x^4 - y)dy + (4x^7 - 12x^3y - 8x^3)dx = 0$

فاکتور انتگرال سازی $\mu(x,y) = \mu(x^4 + y)$.

میان ترم ها: $\mu = \mu(y^2 - x^2)$ حل شد $(x^2 + y^2 + 1)dx - 2xydy = 0$

حل شد $(xy - 2y^2)dx + (3xy - x^2)dy = 0 \quad \mu = \mu(xy^2)$

* ذکر: $Mdx + Ndy = 0$ معادله همگن است ثابت کنید حل شد $\mu(x,y) = \frac{1}{Mx + Ny}$

* $f(tx, ty) = t^n f(x,y) \Rightarrow x f_x + y f_y = nf$

$$\mu = e^{\int \frac{-12x^3 - 12x^3}{(4x^7 - 12x^3y - 8x^3)4x^3 - (3x^4 - y)}} = e^{\int \frac{-24x^3}{\quad}}$$

.12.9

$d(x.y) = ydx + xdy$

$d(x/y) = \frac{ydx - xdy}{y^2}$

$d(\sqrt{x^2 + y^2}) = \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

$d(\sqrt{x^2 - y^2}) = \frac{xdx - ydy}{\sqrt{x^2 - y^2}}$

$d(Ln(x.y)) = \frac{d(xy)}{x.y} = \frac{ydx + xdy}{x.y}$

$d(Ln(y/x)) = \frac{d(y/x)}{y/x} = \frac{xdy - ydx}{y/x}$

$d(tg^{-1}(y/x)) = \frac{d(y/x)}{1 + y^2/x^2} = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$

eg: $(x+x^2y)dy+(xy^2-y)dx=0$

$$(x\,dy-y\,dx)+xy(x\,dy+y\,dx)=0 \qquad \frac{x\,dy-y\,dx}{xy}+(x\,dy+y\,dx)=0$$

$$d\left(\ln(y/x)\right)+d(xy)=0 \Rightarrow \ln y/x + xy = c$$

eg: $(x+2xy^2)dy+y\,dx=0$ حل شود

$\ln(x\cdot y)+y^2=c$

eg: $x\,dy=(y+x^2+9y^2)dx$ حل شود

$3\operatorname{arctg}\frac{x}{3y}-x=c$

eg: $(x+3x^2\sqrt{x^2-y^2})dx-y\,dy=0$ حل شود

$\sqrt{x^2-y^2}+x^3=c$

eg: $y(y')^2+2xy'-y=0$

$$y'=\frac{-2x\pm\sqrt{4x^2+4y^2}}{2y}=\frac{-x\pm\sqrt{x^2+y^2}}{y} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{-x\pm\sqrt{x^2+y^2}}{y}$$

$$\Rightarrow y\,dy=-x\,dx\pm\sqrt{x^2+y^2}\,dx \Rightarrow (y\,dy+x\,dx)=\pm\sqrt{x^2+y^2}\,dx$$

$$\Rightarrow \pm\sqrt{x^2+y^2}=x+c$$

دسته دیگری از معادلات که غیر کامل هستند را می‌توان آنها را کامل کرد.

معادلات خطی مرتبه اول:

$$\left.\begin{array}{l} y'+p(x)y=q(x) \\ x'+p(y)x=q(y) \end{array}\right\}$$

معادلات برنولی:

$$\left.\begin{array}{l} y'+p(x)y=q(x)y^n \\ x'+p(y)x=q(y)x^n \end{array}\right\}$$

$$y'+p(x)y=q(x) \Rightarrow dy+(p(x)y-q(x))dx=0$$

$M_y=p(x)$, $N_x=0$ $\Rightarrow$ غیر کامل $\Rightarrow$ هدف یافتن μ است. $\Rightarrow \mu$ ، $\mu(x)$

شرط کامل $\Rightarrow M_y=N_x \Rightarrow \mu p(x)=\frac{d\mu}{dx} \Rightarrow \boxed{\mu=e^{\int p(x)dx}}$

$$e^{\int p(x)dx}dy+e^{\int p(x)dx}(p(x)y-q(x))dx=0$$

$$e^{\int p(x)dx} dy + e^{\int p(x)dx} p(x) y\, dx = e^{\int p(x)dx} q(x)\, dx$$

$$d\left(y \cdot e^{\int p(x)dx}\right) = e^{\int p(x)dx} q(x) dx$$

$$y \cdot e^{\int p(x)dx} = \int e^{\int p(x)dx} q(x) dx + c$$

$$y = \frac{1}{e^{\int p(x)dx}} \left(\int e^{\int p(x)dx} q(x) dx \right) + \frac{c}{e^{\int p(x)dx}}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{\mu}\left(\int \mu q(x) dx + c \right)}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{\mu}\left(\int \mu q(y) dy + c \right)}$$

eg: $y' - \cot x \cdot y = \tan x$ حل شد

eg: $1 + y^2 + y'\left(x - e^{\operatorname{Arctg} y}\right) = 0$ حل شد

eg: $y' + \sin y + x(1 + \cos y) = 0$

eg: $yy' + 1 = (x-1) e^{-y^2/2}$ حل شد

eg: $xe^{y} y' - e^{y} = 2/x$ حل شد

eg: $y' \cos x + y + (1 + \sin x)\cos x = 0$ حل شد

eg: $-y' \sin y + \cos y (2\cos x) = \sin^2 x \cos x$ حل شد

eg: $y' - \frac{y}{1+x} \ln y = (x+1) y$ حل شد

eg: $x' + \frac{2}{y} x = y^{-3}$ حل شد

eg: $y' + y \tanh x = \operatorname{sech}^3 x$ حل شد

eg: $y' + \frac{1}{x} y = \frac{1}{x} + 2$ حل شد

eg: $y' \sin y = \cos y (1 - x \cos y)$ حل شد

if: $\cos y = u \Rightarrow -u' = u - xu^2$ برنولی حل

eg: $\frac{y'}{\sqrt{1-y^2}} + 2x \underbrace{\sin^{-1} y}_{u} = 2x$ حل شد

eg: $\tan\theta \frac{dr}{d\theta} - r = \tan^2\theta$ حل شد

eg. $y' = \dfrac{y}{2y\ln y + y - x}$ حل شد eg: $1-y^2 = y'(xy + \sqrt{1-y^2}\,.\,\sin y)$ حل شد

* $xe^{y}y' - e^{y} = \frac{2}{x} \Rightarrow xu' - u = \frac{2}{x}$

* $y' - \frac{1}{1+x} y\ln y = (x+1)y \qquad \ln y = u \Rightarrow \frac{y'}{y} = u'$

$$u' - \frac{u}{1+x} = x+1 \Rightarrow \mu = e^{\int p(x)dx} = e^{\int \frac{-1}{1+x}dx} = \frac{1}{1+x}$$

$$\Rightarrow u = \frac{1}{\frac{1}{1+x}}\left[\int dx + c\right] = u = (x+c)(x+1)$$

* $yy' + 1 = (x-1)e^{-y^2/2} \Rightarrow e^{y^2/2}yy' + e^{y^2/2} = (x-1) \Rightarrow u' - u = 2/x$

* $-\sin y\, y' + \cos y(2\cos x) = \sin^2 x \cos x$

$u' + u\,2\cos x = \sin^2 x \cos x$

* $y' = \dfrac{y}{2y\ln y + y - x} \Rightarrow x' = \dfrac{2y\ln y + y - x}{y} = (2\ln y + 1) - \dfrac{x}{y}$

$x' + \frac{x}{y} = 2\ln y + 1 \Rightarrow \mu_{(y)} = e^{\int \frac{1}{y}dy} = y$

$$x = \frac{1}{y}\left[\int y(2\ln y + 1)\,dy + c\right] = \frac{1}{y}\left[y^2\ln y + y^2/2 - \int y\,dy + c\right]$$

$x = \frac{1}{y}\left[y^2\ln y + c\right]$

$$y' + p(x)y = Q(x)y^n$$

$$\xrightarrow{/y^n} \frac{y'}{y^n} + p(x)y^{1-n} = Q(x)$$

$y^{1-n} = u \Rightarrow (1-n)y'y^{-n} = u'$

eg: $(1-x^3)y'-2(1+x)y=y^{5/2}$ حل شد

eg: $2\cos x\,dy=(y\sin y-y^3)\,dx$ — if $=\sin x \rightarrow$ حل شد

eg: $y'+\frac{1}{x}=y^2\ln x$ — if $=y/x \rightarrow$ حل شد

eg: $y'-\frac{1}{2}\,tg\,x\cdot y=\frac{1}{2}\sec x\,y^3$ حل شد

eg: $xy'+y-y^2e^{2x}=0$ حل شد

eg: $(2xy+2x^2y^3)y'=1$ حل شد

eg: $y'+y=y^2(\cos x-\sin x)$ حل شد

eg: $(e^y-2xy)y'=y^2$ حل شد (خطی)

eg: $y'=\frac{x^2}{x^3+e^y}$ حل شد

eg: $2y'\sin x+y\cos x=y^3\sin^2 x$ حل شد

پوش: (جوابهای منفرد - جواب تکین)

کلرو: فرمت: $y=y'x+p(y')$

لاگرانژ: فرمت: $y=f(y')x+g(y')$

$f(t)=t$

$y=y'x+g(y') \longrightarrow y=mx+b$ معادلات کلرو معادلهٔ خط‌اند:

یعنی $y'=m$ و شیب خط ثابت است.

$\Rightarrow y=mx+g(c)$

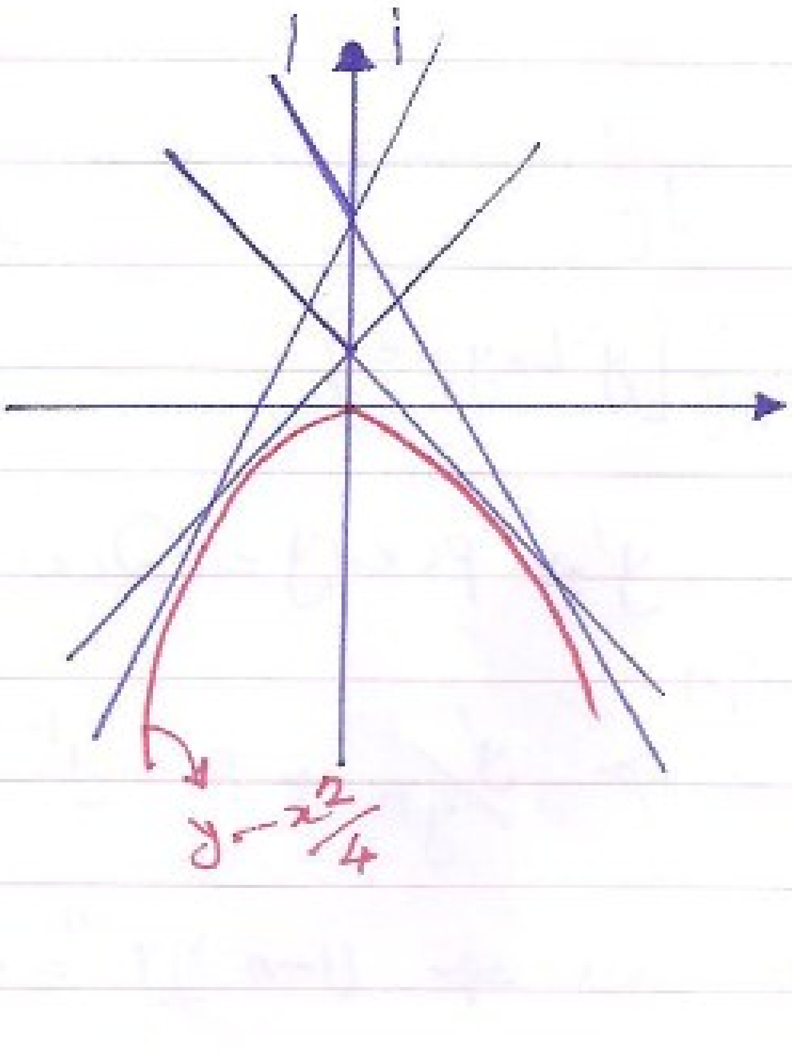
eg: $y=y'x+y'^2 \xrightarrow{y'=c} y=cx+c^2$

$c=1 \Rightarrow y=x+1$

$c=-1 \Rightarrow y=-x+1$

$c=2 \Rightarrow y=2x+4$

$c=-2 \Rightarrow y=-2x+4$



ادعا می‌کنیم $y=-\frac{x^2}{4}$ جواب معادله است چون در معادله صادق است

پس درست است. حالا رسم می‌کنیم:

پوش یا جواب منفرد: تابعی است که هر نقطه‌ای از آن در تماس باشیم. عضوی از خانواده منحنی‌ها (جواب عمومی)

وجود دارد که در این نقطه برابر تابع مماس است.

طرز پیدا کردن پوش:

$$y = cx + c^2$$

$$\xrightarrow[\text{نسبت به } c]{\text{مشتق می‌گیریم}} \quad 0 = x + 2c \Rightarrow c = \frac{-x}{2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{-x^2}{2} + \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{4}$$

راه حل دوم:

$$y' = p \;;\; p = p(x)$$

$$* \; \boxed{y = p x + p^2} \xrightarrow[x \text{ به}]{\text{مشتق نسبت}} y' = p'x + p + 2pp'$$

$$\Rightarrow p = p'x + p + 2pp' \Rightarrow p'(x + 2p) = 0 \begin{cases} p' = 0 \Rightarrow p = c \\ p = \frac{-x}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow * \; y = cx + c^2 \;,\; y = \frac{-x^2}{4}$$

eg: $x = y^2 + \frac{y}{y'}$ حل شود — eg: $y^2 = xy' - y'^3$ حل شود. * پوش در معادله صادق نیست.

eg: $y = xy' + \sqrt{1 + y'^2}$ حل شود — eg: $y = xy' + \sqrt{y'}$ حل شود

eg: $y = xy' - \frac{y'^2}{4}$ حل شود

لاگرانژ: شیوه حل معادلات لاگرانژ مشابه شیوه دوم معادلات کلرو است.

eg: $y = xy'^2 + y'^3$ $\qquad y' = p \;;\; p = p(x)$

$$* \; \boxed{y = p^2 x + p^3} \Rightarrow y' = p^2 + 2pp'x + 3p'p^2$$

$$p - p^2 = pp'(2x + 3p) \Rightarrow \text{if: } p - p^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} p = 0 & y = 0 \;\checkmark \\ p = 1 \Rightarrow y = x + 1 \;\checkmark \end{cases}$$

جوابهای منفرد

$$\text{if: } p - p^2 \neq 0 \Rightarrow p' = \frac{1-p}{2x+3p} \Rightarrow x' = \frac{2x+3p}{1-p} \Rightarrow \boxed{x' + \frac{2x}{p-1} = \frac{-3p}{p-1}}$$

معادله خطی

$$\mu(p) = e^{\int \frac{2}{p-1} dp} = (p-1)^2$$

$$x = \frac{1}{(p-1)^2}\left(\int p(p-1)\,dp + c\right) = \frac{1}{(p-1)^2}\left(-p^3 + \frac{3}{2}p^2 + c\right)$$

$\Rightarrow$ در * بجای x معادله عبارت فوق را قرار می‌دهیم $\Rightarrow y = \cdots \Rightarrow \begin{cases} x = f(p) \\ y = f^*(p) \end{cases} \Rightarrow$ "جواب‌ها پارامتری"

* در معادله لاگرانژ جواب منفرد یک خط است.

* معادلات مرتبه (ضمنی) $x = f(y, y')$ یا $y = f(x, y')$

شیوه حل: $y' = p \;;\; p = p(x)$

eg: $y'^2 - yy' + e^x = 0 \Rightarrow -yy' = -y'^2 - e^x$

$$\Rightarrow y = y' + \frac{e^x}{y'} \xrightarrow{y' = p} \boxed{y = p + \frac{e^x}{p}} \; *$$

if: $p = 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow y = c$ $\rightarrow$ جواب منفرد نیست

$$\Rightarrow y' = p' + \frac{pe^x - p'e^x}{p^2} \Rightarrow p = p' + \frac{1}{p}e^x - \frac{p'}{p^2}e^x$$

$$\Rightarrow \left(p - \frac{1}{p}e^x\right) = p'\left(1 - \frac{1}{p^2}e^x\right) \Rightarrow p\left(1 - \frac{1}{p^2}e^x\right) = p'\left(1 - \frac{1}{p^2}e^x\right)$$

$\Rightarrow$ if: $1 - \frac{1}{p^2} e^x = 0 \overset{(*)}{\Rightarrow} p^2 = e^x \Rightarrow y^2 = 4e^x$ جواب منفرد

if: $1 - \frac{1}{p^2} e^x \neq 0 \Rightarrow p = p' \Rightarrow p\,dx = dp \Rightarrow x + c = \ln p$

$\Rightarrow x = \ln|p| - c$

$\Rightarrow p = e^x . e^c$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} y = e^x . e^c + \frac{e^x}{e^x . e^c} \Rightarrow y = e^x . e^c + e^{-c}$$

مهمترین مبحث درسی برای آینده؛ بهره‌گیری از زمان حال است. (از اکبر کاموا!!)

eg: $y^2 y' + 3xy' - y = 0$

$$3x = \frac{y}{y'} - y^2 \Rightarrow y' \neq 0 \to y' = p = 0 \to y = c = 0$$

$$\Rightarrow 3x = \frac{y}{p} - y^2$$

eg: $x = y' + e^{y'}$ حل شد

eg: $x = 2y' + \sin y'$ حل شد

eg: $x = 2y' + \sin y'$ تمرین

eg: $y = xy' + y'^2 + x$ حل شد (به شکل کلرو تبدیل می‌شود)

معادلات ریکاتی:

$$y' = f_0(x) + f_1(x)y + f_2(x)y^2 \quad , \quad f_2(x) \neq 0$$

اولاً حتماً باید یک جواب خصوصی در اختیار داشته باشیم.

y_1 یا در صورت مسأله ذکر می‌شود یا چیزهایی مثل $y_1 = 1, x, x^2, e^x, \ln x, \sin x, \cos x, \sec x$

در اینصورت جواب عمومی: $y = y_1 + u \xrightarrow[\text{مسأله}]{\text{در صورت}}$ معادله برنولی

$y = y_1 + \frac{1}{u} \xrightarrow{\text{نتیجه}}$ معادله خطی $\to u' + u(2y_1 f_2(x) + f_1(x)) = f_0(x)$

eg: $y' = 2\tan x \sec x - y^2 \sin x \quad , \; y_1 = \sec x \xrightarrow{\text{با تغییر}} u' - u(2y_1 f_2(x) + f_1(x)) = f_0(x)$

$$y = y_1 + 1/u \Rightarrow y = \sec x + \frac{1}{u} \Rightarrow y' = \sec x \tan x - \frac{u'}{u^2}$$

$$\frac{-u'}{u^2} = 2\tan x \sec x - \left(\sec^2 x + \frac{1}{u^2} + \frac{2\sec x}{u}\right)\sin x$$

$$\Rightarrow u' = \sin x - 2\tan x \cdot u \longrightarrow u' + 2\tan x \cdot u = \sin x$$

معادله خطی ----- $\leftarrow$ جایگذاری در $*$

.12.16

مسیرهای قائم :

دکارتی : دسته منحنی ← خانواده ← معادله دیفرانسیل (y') ← $y' \to -\frac{1}{y'}$

← معادله دیفرانسیل جدید ← خانواده قائم.

eg: $y+xy'=0 \Rightarrow y-\frac{x}{y'}=0 \to ydy=xdx \Rightarrow y^2-x^2=2c$

قطبی : مراحل فوق فقط $y' \to -\frac{1}{y'} \equiv \frac{r'}{r} \to -\frac{r}{r'}$

eg: $r=a(1+\cos\theta)$

$* \ \frac{r}{r'} \to \frac{r'}{r} \Rightarrow r' \to \frac{-r^2}{r'}$

معادلات مراتب بالاتر:

1. حالت خاص
- a. معادله فاقد y باشد. (متغیر)
- b. معادله فاقد y و x باشد.
- c. معادله فاقد x باشد. (آزاد)

شیوه / اصل ← کافیست $y'=p$ را ... قرار دهیم. (کاهش مرتبه)

تذکر: در شیوه کاهش مرتبه باید پایین ترین مرتبه را برابر با p بگیریم.

eg: $y'''=\sqrt{1+y''^2}$ $\qquad y''=p \ ; \ p=p(x)$

$\Rightarrow p'=\sqrt{1+p^2} \Rightarrow \frac{dp}{dx}=\sqrt{1+p^2} \Rightarrow \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}}=dx \xrightarrow{\int} \sinh^{-1}(p)=x+c$

$p=\sinh(x+c) \Rightarrow y''=\sinh(x+c) \xrightarrow{\int} y'=\cosh(x+c)+c' \xrightarrow{\int} y=\sinh(x+c)+c'x+c''$

$*\left[\sinh^{-1}x=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]'$

eg: $2x^2y''+y'^3=2xy'$ $\qquad y'=p \ , \ p=p(x)$ $\qquad 2x^2p'+p^3=2xp$

خطی

$\Rightarrow p'-\frac{p}{x}=\frac{p^3}{2x^2} \xrightarrow{\text{برنولی}} p^{-3}p'-\frac{p^{-2}}{x}=\frac{1}{2x^2} \to u'/2-u/x=1/2x^2$

to be Continued...

c: معادلات فاقد x:

شیوه حل:

$y' = p$; $(p = p(y))$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot p$$

eg: $yy'' - y'^2 - y'^3 = 0$

$y' = p$; $(p = p(y))$ $\quad y'' = p \cdot \frac{dp}{dy}$

$$yp \cdot \frac{dp}{dy} - p^2 - p^3 = 0 \Rightarrow p\left(y\frac{dp}{dy} - p - p^2\right) = 0 \xRightarrow{\text{if:}} p = 0 \Rightarrow y = c$$

if: $p \neq 0 \Rightarrow y\frac{dp}{dy} - p - p^2 = 0 \Rightarrow \frac{y}{dy} = \frac{p+p^2}{dp} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dp}{p+p^2}$

$$\ln c + \ln y = \ln \frac{p}{p+1} \Rightarrow cy = \frac{p}{p+1} \Rightarrow \frac{p+1-1}{p+1} = cy \Rightarrow 1 - \frac{1}{p+1} = cy$$

$$\Rightarrow 1 - cy = \frac{1}{p+1} \Rightarrow p+1 = \frac{1}{cy-1} \Rightarrow p = \frac{1}{cy-1} - 1 = \frac{cy}{1-cy}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cy}{1-cy} \Rightarrow \frac{1-cy}{cy}dy = dx \Rightarrow \frac{1}{c}\ln y - y = x + c'$$

فرم معادلات مرتبه دوم خطی: $y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$ ① (I) معادله غیر همگن

if: $y'' + p(x)y' + Q(x)y = 0$ ② $\xrightarrow{\text{Then}}$ (II) معادله همگن

قضیه: جواب عمومی معادله غیر همگن = جواب عمومی معادله همگن + جواب خصوصی معادله غیر همگن

بحث در مورد معادله ② جواب عمومی معادله همگن ← به کمک قضایا ← دو تا جواب خصوصی ← جواب عمومی
دارای شرایط باشند

شرایط جواب عمومی: بطور کلی: if in (I) $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ پیوسته باشند حتماً جواب دارد

if: $x_0 \in [a,b]$, y_0, y_1 در نقطه داده ← فقط دارای یک جواب $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$ در شرط مرزی اولیه

قضیه ①: اگر در معادله (2) همگن باشد و $P(x)$, $Q(x)$ در بازه‌ی ما فقد (a,b)

if: $y_g(x, c_1, c_2)$ جواب عمومی $_{II}$ و $y_p(x)$ جواب خصوصی (I) $\rightarrow y_G = y_g + y_p$

پیوسته باشد و (a, b) ∋ x_0 که $y(x_0) = y_0$ و $y'(x_0) = y'_0$ آنگاه حتماً دارای یک جواب یکتا خواهد.

if: y_1, y_2 answer II $\Rightarrow c_1y_1 + c_2y_2 \xrightarrow{c_1, c_2 \text{ دلخواه}}$ II جواب

قضیه ②: اگر y_1 و y_2 دو جواب عمومی معادله (2) باشند آنگاه $y = c_1y_1 + c_2y_2$ هم جواب معادله (2) خواهد بود.

$\exists k ; \forall x \quad \frac{y_1}{y_2} = k$ وابسته خطی

اگر بخواهیم جواب عمومی برسیم باید یک ترکیب خطی از جوابها در اختیار داشته باشیم.

if: y_1, y_2 III دو جواب $\Rightarrow W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}$ or $= 0$ or $\neq 0$

رونسکین

تعریف ترکیب خطی: $y_1, y_2 \rightarrow c_1y_1 + c_2y_2$

if: $W \neq 0 \Leftrightarrow$ مستقل خطی , $W = 0 \Leftrightarrow$ وابسته خطی

قضیه ③: اگر y_1 و y_2 با شرایط زیر باشند آنگاه جواب عمومی معادله (2) بصورت $y = c_1y_1 + c_2y_2$ می باشد.

صورت دقیق: هر جوابی انتخاب کنید آن جواب بصورت $c_1y_1 + c_2y_2$ قابل نوشتن.

if: y_1, y_2 II دو جواب مستقل خطی $\Rightarrow y_{g_{II}}(x, c_1, c_2) = c_1y_1 + c_2y_2$

شرایط:

① $y_1 \neq 0$ و $y_2 \neq 0$ زیرا جواب عمومی یک بار صفر بدست می آید

② y_1 و y_2 مضربی از هم دیگر نباشند. $y = (c_1k + c_2)y_2$ if: $y_1 = ky_2$ $\quad y_1 \neq ky_2$

③ y_1 و y_2 استقلال خطی داشته باشند.

تعریف استقلال خطی: $c_1y_1 + c_2y_2 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$ و $c_2 = 0$ رونسکین - رونسکی - رونسکین

قضیه: $W(y_1, y_2) \neq 0 \rightarrow \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ y_1 و y_2 مستقل خطی اند

$\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}; \quad c_1y_1 + c_2y_2 = 0 \xrightarrow{\text{حکم}} c_1 = 0, c_2 = 0$

مشتق میگیریم $\quad c_1y'_1 + c_2y'_2 = 0 \rightarrow AC = 0 \Rightarrow \underbrace{A^{-1}A}_{I}C = 0$

$A = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{bmatrix}$ $\det A \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$ $\quad \Rightarrow C = 0 \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{cases}$

$C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$

سؤال: اگر یک جواب در اختیار داشته باشیم جواب دوم چگونه است؟

y_1 جواب خصوصی معادله (II) است $y_1 \rightarrow y_2 = ?$ $\Rightarrow \frac{y_2}{y_1} = v(x) \Rightarrow y_2(x) = v(x) y_1(x)$

$\Rightarrow \boxed{y_2 = v y_1}$ $\qquad y_1 \begin{cases} x^n \\ e^x \\ \ln x \\ \sin x \\ \cos x \end{cases}$

هدف یافتن $v(x)$ است.

می‌خواهیم y_2 یک جواب خصوصی معادله (2) باشد پس در معادله صادق است.

$(f.g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{n-k} g^k$ مشتق n-ام.

$v'' y_1 + 2v' y_1' + v y_1'' + P(v' y_1 + v y_1') + Q \cdot v \cdot y_1 = 0$

y_1 جواب خصوصی معادله است.

$v[\underbrace{y_1'' + P y_1' + Q y_1}_{0}] + v'' y_1 + 2 v_1' y_1' + P v' y_1 = 0$

$\xrightarrow{/v' y_1} \frac{v''}{v'} = -\frac{2y_1'}{y_1} - p \xrightarrow{\int_x} \ln v' = \ln y_1^{-2} - \int p\,dx$

$\Rightarrow v = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p\,dx} dx \qquad \Rightarrow y_2 = y_1 \left[\int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p\,dx} dx \right]$ آبل

eg: $xy'' + 2y' + xy = 0 \qquad y_1 = \frac{\sin x}{x}$

$y_2 = \frac{\sin x}{x} \int \frac{x^2}{\sin^2 x} \cdot \frac{1}{x^2} dx = -\frac{\cos x}{x}$

eg: $xy'' - y' = 0$

روش اول: مادرل

$y_1 = 1 \quad , \quad y_2 = \int e^{-\int -\frac{1}{x} dx} = \frac{x^2}{2}$

$y_g = c_1 y_1 + c_2 y_2 \Rightarrow y_g = c_1 + c_2 \frac{x^2}{2}$

* اگر ضرایب معادله ثابت باشد:

$y'' + Py' + qy = 0 \qquad p, q : cte$

* زمانیکه ضرایب ثابت است می‌توان یک جواب را به فرم $y=e^{mx}$ در نظر بگیریم. (چون مشتق تابع نمایی، شامل خود تابع نیز هست.)

$$y' = me^{mx}$$
$$y'' = m^2e^{mx}$$

$$e^{mx}(m^2+pm+q)=0 \rightarrow m^2+pm+q=0 \Rightarrow m=?$$

$\Delta>0 \rightarrow m^2+pm+q=0 \rightarrow$ دو ریشه حقیقی متمایز $\Rightarrow m_1 \neq m_2$

$$y_1 = e^{m_1x} , \quad y_2 = e^{m_2x}$$

① $y_1 \neq y_2 \neq 0$ ② $y_2/y_1 = e^{(m_2-m_1)x} \Rightarrow y_2/y_1 \neq c$

③ $w(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{m_1x} & e^{m_2x} \\ m_1e^{m_1x} & m_2e^{m_2x} \end{vmatrix} = (m_2-m_1)e^{(m_1+m_2)x} \neq 0$

$$y_g = c_1e^{m_1x} + c_2e^{m_2x}$$

در معادله درجه ۳ ← اگر جمع ضرایب یکی در میان صفر شود ← یک ریشه $m=-1$

eg: $y''+3y'+2y=0$

$m^2+3m+2=0 \quad m=-1, m=-2 \Rightarrow y=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}$

eg: $3y'''-5y''+3y'-y=0$

$3m^3-5m^2+3m-1=0 \Rightarrow m=1$

$\Delta<0$

هورنر	3	-5	3	-1
1	0	3	-2	1
	3	-2	1	0

ضرایب

عدد ثابت است

اگر باقی مانده صفر باشد معادله را تقسیم کنیم → باقی مانده

if: $\Delta=0$ Then $m_1=m_2=m=\frac{-b}{2a}=\frac{-p}{2}$ ریشه مضاعف

$$y_1 = e^{-\frac{p}{2}x} \qquad y_2 = vy_1$$

اثبات: $y_2 = e^{-\frac{p}{2}x}\int \frac{1}{e^{-px}} e^{-\int p\,dx} dx = xe^{-\frac{p}{2}x}$

$$y_g = c_1e^{mx}+c_2xe^{mx}$$

ریشه‌ای با بیش از ۲ بار تکرار نیز به فرم زیر است:

$$y_g = c_1e^{mx}+c_2xe^{mx}+c_3x^2e^{mx}+c_4x^3e^{mx}+\cdots$$

if: $\Delta < 0 \quad m^2+pm+q=0 \Rightarrow m_1=a+ib \,,\; m_2=a-ib$

$$y_1=e^{(a+ib)x}=e^{ax}(\cos bx+i\sin bx)$$
$$y_2=e^{(a-ib)x}=e^{ax}(\cos bx-i\sin bx)$$

$$\Rightarrow Y_1=\tfrac{1}{2}y_1+\tfrac{1}{2}y_2=e^{ax}\cos bx$$
$$Y_2=\tfrac{1}{2i}y_1-\tfrac{1}{2i}y_2=e^{ax}\sin bx$$
$$\Rightarrow y_g=c_1y_1+c_2y_2 \Rightarrow y_g=e^{ax}(c_1\cos bx+c_2\sin bx)$$

eg: ادامه سؤال قبل $\quad 3m^2-2m+1=0$

$$\Delta=4-12=-8=8i^2$$
$$m=\frac{2\pm2\sqrt{2}\,i}{6}=\underbrace{\tfrac{1}{3}}_{a}\pm\underbrace{\tfrac{\sqrt{2}}{3}}_{b}\,i$$

$$\Rightarrow y_g=c_1y_1+c_2y_2 \Rightarrow y_g=c_1e^{1x}+e^{\frac{1}{3}x}\left(c_1\cos\tfrac{\sqrt{2}}{3}x+c_2\sin\tfrac{\sqrt{2}}{3}x\right)$$

eg: $y^{(4)}-y=0$ $\qquad$ eg: $y^{(4)}+2y''+y=0$

eg: $y^{(4)}+y=0$

حل معادلات غیرهمگن:

ابتدا باید معادله همگن را حل کنیم و y_g را بیابیم و آنگاه به دنبال جواب خصوصی معادله غیرهمگن به نام y_p باشیم و نهایتاً طبق قضیه‌ای

$$\underbrace{y_g}_{\text{غیرهمگن}}=\underbrace{y_g}_{\text{همگن}}+y_p$$

یافتن y_p:

1) ضرایب نامعین: برای معادلات با ضرایب ثابت و حالتهای خاصی از $f(x)$

2) تغییر پارامتر (لاگرانژ) ← برای هر نوع معادلات

3) عملگر D ← با ضرایب ثابت ـ اویلر

روش اول ضرایب نامعین:

① $f(x)=P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0 \Rightarrow y_p=q_n(x)=A_nx^n+A_{n-1}x^{n-1}+\cdots+A_0$

eg: $y''+2y'-y=x^2-5$

① $y''+2y'-y=0 \Rightarrow m^2+2m-1=0 \Rightarrow \Delta=8 \Rightarrow m=-1\pm\sqrt{2}$

$$y_g=c_1e^{(-1-\sqrt{2})x}+c_2e^{(-1+\sqrt{2})x}$$

$$\Rightarrow y_p=Ax^2+Bx+C \Rightarrow y_p'=2Ax+B \,,\; y_p''=2A$$

$\xrightarrow{\text{جایگذاری}}$ $2A+4Ax+2B-(Ax^2+Bx+C)=x^2-5 \Rightarrow A=-1 \,,\; 4A-B=0 \Rightarrow B=-4$

$2A+2B-C=-5 \qquad C=-5$

$$y_p = -x^2 - 4x - 5 \Rightarrow y_g = c_1 e^{(-1-\sqrt{2})x} + c_2 e^{(-1+\sqrt{2})x} + (-x^2 - 4x - 5)$$

eg: $y'' \cancel{-} 4y' \cancel{+} = x^3 - x + 1$

eg: $y''' - y'' = x^3 - x + 1$

$f(x)$	y_p
$P_n(x)$	$x^K q_n(x)$

K: تعداد دفعات تکرار ریشه صفر معادله مشخصه

$q_n(x)$: استاندارد

$m^3 - m^2 = 0 \Rightarrow m = 0$ ۲ بار تکرار

$m = 1$

$\cancel{x^2(Ax^3 - Bx + 1)} \Rightarrow y_p = q_n(x) \cdot x^K = x^2 (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)$

to be Continued...

(2) $f(x) = n e^{ax} \rightarrow y_p = x^K \cdot A \cdot e^{ax}$

K: تعداد تکرار ریشه a در معادله مشخصه

$\Rightarrow f(x) = P_n(x) e^{ax} \rightarrow y_p = x^K \cdot q_n(x) \cdot e^{ax}$

حال اگر a صفر باشد می‌شود حالت اول.

eg: $y'' - 3y' + 5y = xe^{3x}$

$m^2 - 3m + 5 = 0 \Rightarrow m = \frac{3 \pm \sqrt{11}\, i}{2} \Rightarrow y_g = e^{\frac{3}{2}x}\left(c_1 \cos \frac{\sqrt{11}}{2}x + c_2 \sin \frac{\sqrt{11}}{2}x\right)$

$y_p = e^{3x}(Ax + B) \Leftarrow$ a=3 این ریشه در معادله مشخصه نیست

$y_p' = (A + 3Ax + 3B)e^{3x}$

$y_p'' = (6A + 9Ax + 9B)e^{3x}$

$\Rightarrow (6A + 9Ax + 9B)e^{3x} - 3(A + 3Ax + 3B)e^{3x} + 5(Ax + B)e^{3x} = xe^{3x}$

$\Rightarrow 5A = 1 \Rightarrow A = 1/5 \qquad 3A + 5B = 0 \Rightarrow B = -3/25$

$y_p = (\frac{1}{5}x - \frac{3}{25})e^{3x} \Rightarrow y_G = y_g + y_p$

(3) $f(x) = r\,Sin\,bx \,,\; r\,Cos\,bx \,,\; r\,Sin\,bx + L\,Cos\,bx$

$$y_p = x^k (A\,Sin\,bx + B\,Cos\,bx)$$

k: تعداد تکرار $\pm ib$ در ریشه‌های معادله مشخصه.

$f(x) = P_n(x) \cdot (Sin\,bx)$

$\quad\quad\quad\quad\;\; " \quad (Cos\,bx)$

$\quad\quad\quad\quad\;\; " \quad (Sin\,bx + Cos\,bx)$ $\rightarrow y_p = x^k (q_n(x)\,Sin\,bx + r_n(x)\,Cos\,bx)$

$P_n(x)\,Sin\,bx + q_m(x)\,Cos\,bx \rightarrow y_p = x^k (q_s(x)\,Sin\,bx + r_s(x)\,Cos\,bx)$

$s = max\{m, n\}$

k: تعداد تکرار $a \pm ib$ در ریشه‌های معادله مشخصه

(4) $f(x) = P_n(x)\,Sin\,bx\,e^{ax}$

$\quad\quad \vdots \quad\quad -- \quad y_p = x^k e^{ax} (\quad " \quad)$

eg: $y'' + y = Cos\,3x$

$m^2 + 1 = 0 \Rightarrow m = \pm i$

آیا $\pm 3i$ ریشه معادله مشخصه است؟ خیر

$y_p = A\,Sin\,3x + B\,Cos\,3x$

eg: $y'' + y = Cos\,x$

آیا $\pm i$ ریشه معادله مشخصه است؟ آری

$y_p = x(A\,Sin\,x + B\,Cos\,x)$

eg: $y'' + y = x^2 e^{3x} Cos\,5x$

آیا $3 \pm 5i$ ریشه معادله مشخصه است؟ خیر

$$y_p = e^{3x}\left((Ax^2 + Bx + C)\,Sin\,5x + (Dx^2 + Ex + F)\,Cos\,5x\right)$$

(5) $f(x) = h(x) + g(x) + k(x) + \cdots$

$y_p = y_{p_{h(x)}} + y_{p_{g(x)}} + y_{p_{k(x)}} + \cdots$ طبق اصل برهم نهی

اگر به صورت Cohen نباشد باید به فرم عادی بنویسیم.

روش تغییر پارامتر (لاگرانژ)

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$$

$$y_g = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

دو جواب خصوصی معادله همگن است.

$$y_p = v_1(x) y_1 + v_2(x) y_2$$

با جایگذاری v_1 و v_2 حاصل می‌شود.

$$(v_1y_1 + v_2y_2)'' + P(v_1y_1+v_2y_2)' + Q(v_1y_1+v_2y_2) = f(x)$$

$$v_1''y_1 + 2v_1'y_1' + v_1y_1'' + v_2''y_2 + 2v_2'y_2' + v_2y_2''$$

$$+P(v_1'y_1 + v_1y_1' + v_2'y_2 + v_2y_2') + Q(v_1y_1 + v_2y_2) = f(x)$$

$$v_1(\underbrace{y_1'' + P(x)y_1' + Qy_1}_{0}) + v_2(\underbrace{y_2'' + Py_2' + Qy_2}_{0})$$

$$+ v_1''y_1 + 2v_1'y_1' + v_2''y_2 + 2v_2'y_2' + P(v_1'y_1 + v_2'y_2) = f(x)$$

یک معادله و دو مجهول ← معادله دوم آزادی ← بی‌شمار جواب.

می‌توان →
$$\begin{cases} v_1'y_1 + v_2'y_2 = 0 \\ v_1''y_1 + 2v_1'y_1' + v_2''y_2 + 2v_2'y_2' = f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1'y_1' + v_2'y_2' = f \\ v_1'y_1 + v_2'y_2 = 0 \end{cases}$$

مشتق

$$v_1''y_1 + v_2''y_2 + v_1'y_1' + v_2'y_2' = 0$$

$$v_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{-f\cdot y_2}{\omega} \Rightarrow v_1 = \int \frac{-f(x)\cdot y_2(x)}{\omega(y_1, y_2)}\,dx$$

$$v_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f \end{vmatrix}}{\omega(y_1, y_2)} = \frac{y_1 f}{\omega} \Rightarrow v_2 = \int \frac{f(x)\cdot y_1(x)}{\omega(y_1, y_2)}\,dx$$

eg: $(1-x)y'' + xy' - y = 2(x-1)^2 e^{-x}$ $\qquad y_g = c_1 x + c_2 e^{x}$

eg: $y_g = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 x + c_2 e^{x} \Rightarrow y_p = ?$

$y_p = V_1 x + V_2 e^{x}$ $\qquad V_1 = \int \frac{-e^{x} 2(x-1)e^{-x}}{(x-1)e^{x}} dx = -2 \int \ldots e^{-x} dx = \ldots$

$\omega = (x-1)e^{x}$

$V_2 = \int \frac{x\, 2(x-1)e^{-x}}{(x-1)e^{x}} dx = \ldots$

to be Continued...

eg: $y'' - 3y' + 2y = \sin(e^{-x})$ $\qquad$ eg: $y'' + 2y' + 2y = 2e^{-x}(tg^2 x)$

eg: $x^2 y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = x\sqrt{x}$ $\qquad$ eg: $y''' + y' = \sec x$ $\quad$ y_p را در $x < \pi/2$ بیابید

$y_g = c_1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + c_2 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \rightarrow y_p ?$

eg: $y'' + y = \cot x$ $\qquad$ eg: $y'' + y = \sec x$

eg: $y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^{-x}}$ $\qquad$ eg: $y^{(4)} - 2y'' + y = x \cosh x$

یافتن y_p با روش عملگر D:

اپراتور (عملگر)

$D = \frac{d\ldots}{dx}$

$Dy = \frac{dy}{dx} = y' \quad D^2 y = D(y') = y'' \ldots \Rightarrow D^{(n)} y = y^{(n)}$

$\frac{1}{D} = D^{-1} = \int$

$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = f(x)$

$(D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0)y = f(x)$

$L(D)y = f(x)$

چند جمله‌ای اپراتور - عملگر

$L(D)y = f(x)$ معادله دیفرانسیل خطی مرتبه n ام با ضرایب ثابت

همگن $L(D)y = 0 \Rightarrow L(D) = 0 \Rightarrow D = ?$

غیرهمگن $y_p = \frac{1}{L(D)} f(x)$

eg: $(D^2 - 3D + 1)y = 0 \qquad y_g = c_1 e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}x} + c_2 e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}x}$

طبقه بندی $f(x)$:

(1) $f(x) = P_n(x)$ چندجمله‌ای

$\frac{1}{L(D)}(P_n(x)) = \cdots$

$* \quad \frac{1}{1-D} = 1 + D + D^2 + \cdots$

$* \quad \frac{1}{1+D} = 1 - D + D^2 - D^3 + \cdots$

eg: $(D^2 - 2D + 3)y = x^2 - 1$

$y_g = \cdots$

$y_p = \frac{1}{D^2 - 2D + 3}(x^2 - 1) \Rightarrow y_p = \frac{1}{3\left(1 + \frac{D^2 - 2D}{3}\right)}(x^2 - 1)$

نکته: $D(f \pm g) = Df \pm Dg$

$D(cf) = c\,Df$

$D^n(D^m f) = D^m(D^n f)$

$(D+1)(D-2) = (D-2)(D+1)$ ✓

$(D+x)(D-2) \neq (D-2)(D+x) \rightarrow (D^2 - 2D + xD - 2)y$

$= y'' - 2y' + xy' - 2$

$(D^2 + 1 - 2D - 2x)y = y'' + y - 2y' - 2xy$

$\Rightarrow \boxed{xD \neq Dx}$

ادامه:

$$y_p = \frac{1}{3}\left(1 - \left(\frac{D^2-2D}{3}\right) + \left(\frac{D^2-2D}{3}\right)^2 + \cdots\right)(x^2-1)$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{D^2}{3} + \frac{2}{3}D + \frac{D^4}{9} - \frac{4D^3}{9} + \frac{4D^2}{9}\right)(x^2-1)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{D^2}{9} + \frac{2}{3}D + 1\right)(x^2-1) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{9} + \frac{4x}{9} + x^2 - 1\right)$$

eg: $y_p = \frac{1}{D(D+2)}(3x-1)$

$$\frac{1}{2(\frac{D}{2}+1)}(3x-1) = \frac{1}{2}\Big[\underbrace{(1-\tfrac{D}{2})(3x-1)}_{3x-1-\frac{3}{2}}\Big] \Rightarrow \frac{1}{D}\left(\frac{3}{2}x - \frac{5}{4}\right)$$

$$\Rightarrow y_p = \frac{3}{4}x^2 - \frac{5}{4}x$$

(2) $f(x) = k e^{ax}$

$D(e^{ax}) = a e^{ax}$

$$\Rightarrow y_p = \frac{1}{L(D)}(k e^{ax}) = k\frac{1}{L(D)}\{e^{ax}\} \overset{L(a)\neq 0}{=\!=} k\frac{1}{L(a)}\{e^{ax}\}$$

if $L(a) = 0 \Rightarrow ?$

قضیه انتقال: $\frac{1}{L(D)}\{e^{ax} \cdot f(x)\} = e^{ax}\frac{1}{L(D+a)}\{f(x)\}$

اثبات: $D(e^{ax} f(x)) = a e^{ax} f(x) + e^{ax} D f(x) = e^{ax} f(x)(D+a)$

$$y_p = \frac{1}{D^2-1}\{e^x\} = \frac{1}{(D-1)(D+1)}\{e^x\} = \frac{1}{D-1}\{\tfrac{1}{2}e^x\} = \tfrac{1}{2}x e^x \cancel{dx}$$

$$y_p = \frac{1}{(D-2)^3}\{e^{2x}\} = e^{2x} \cdot \frac{1}{D^3}\{1\} = e^{2x} \cdot \frac{x^3}{6}$$

63 انتگرال

if: $L(a)=0$ then $y_p = \dfrac{x^n}{L^{(n)}(a)} e^{ax}$ اگر لگاریتمی:

ه: مرتبه ریشه ها برابر باشد.

L ریشه

③ $f(x) = \sin ax$ ل $\cos ax$

$$y_p = \frac{1}{L(D^2)}\begin{pmatrix}\sin ax\\ \cos ax\end{pmatrix} \overset{L(-a^2)\neq 0}{=} \frac{1}{L(-a^2)}\begin{Bmatrix}\sin ax\\ \cos ax\end{Bmatrix}$$

eg: $y_p = \dfrac{1}{D-1}(\sin 5x) = \dfrac{D+1}{D^2-1}(\sin 5x) = (D+1)\left(\dfrac{-\sin 5x}{26}\right)$

$= -\frac{1}{26}(5\cos 5x + \sin 5x)$

eg: $y_p = \dfrac{1}{D^2-3D+7}(\cos 6x)$

$y_p = \dfrac{1}{-36-3D+7}(\cos 6x) = \dfrac{-1}{29+3D}\cos 6x$ حالا مزدوج.

eg: $y_p = \dfrac{1}{D^2+1}\{\cos x\}$ $\quad D^2+1\Big|_{D^2=-1} = 0$

$y_p = \dfrac{1}{(D-i)(D+i)}\{\cos x\} = Re\left\{\dfrac{1}{(D-i)(D+i)}e^{ix}\right\} = Re\left\{\dfrac{1}{D-i}\left(\dfrac{1}{2i}e^{ix}\right)\right\}$

$= Re\left\{\dfrac{1\times i}{2i\times i}\dfrac{1}{D-i}(e^{ix})\right\} = \frac{1}{2}Re\left\{-ixe^{ix}\right\}$

$e^{ix}\dfrac{1}{D}\{1\}$

xe^{ix}

بعد از عوض - آنگاه n بار

$$\text{if } L(-a^2)=0 \Rightarrow \text{then} \quad y_p = \frac{x^n}{L^n(D^2)}\Bigg|_{D^2=-a^2} \begin{matrix}\sin ax \\ \cos ax\end{matrix}$$

$-a^2$ جای n بار

$$y_p = \frac{1}{D^2+1}\{\cos x\} = \frac{x}{2D}\{\cos x\} = \tfrac{1}{2}\, x \sin x$$

eg: $$y_p = \frac{1}{D^4-5D}\cosh 3x = \frac{1}{D^4-5D}\left(\frac{e^{3x}}{2}+\frac{e^{-3x}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{66}\times\frac{1}{2}e^{3x} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{96}e^{-3x}$$

eg: $$y_p = \frac{1}{D^3+D}\left\{(x^2-1)e^{3x}\right\} = e^{3x}\frac{1}{(D+3)^3+(D+3)}(x^2-1)$$

eg: $$y_p = \frac{1}{\underset{(D+\frac{5}{2})^2-\frac{37}{4}}{D^2+5D-3}}\left\{e^{-\frac{5}{2}x}(x^2+5x)\right\} = e^{-\frac{5}{2}x}\frac{1}{D^2-\frac{37}{4}}(x^2+5x)$$

$$= \frac{1}{(D-\frac{\sqrt{37}}{2})(D+\frac{\sqrt{37}}{2})}(x^2+5x)$$

$$y_p = \frac{1}{D^2-2D}\left\{e^{3x}\sin 5x\right\}$$

تغییر متغیر :

sin داریم باید D^2 داشته باشیم.

اگر ترکیبی بود باید انتقال دهیم.

$$= \frac{1}{(D-1)^2+1}\left\{e^{3x}\sin 5x\right\} = e^{3x}\frac{1}{(D+2)^2+1}\sin 5x$$

$$= e^{3x}\frac{1}{D^2+4D+3}\{\sin 5x\} = e^{3x}\frac{1}{4D-22}\{\sin 5x\}$$

$$\frac{1}{L(D)}\left\{x f(x)\right\} = x\frac{1}{L(D)}\left\{f(x)\right\} - \frac{L'(D)}{L^2(D)}\left\{f(x)\right\}$$

$$y_p = \frac{1}{D^2-5D}\left\{x\sin 2x\right\} = x\frac{1}{D^2-5D}\left\{\sin 2x\right\} - \frac{2D-5}{(D^2-5D)^2}\left\{\sin 2x\right\}$$

* $y''+p(x)y'+Q(x)y=0$: «معادلات» این معادلات قابل تبدیل به معادلات با ضرایب ثابت تبدیلی هستند.

تغییر متغیر: $u=\int\sqrt{Q(x)}\,dx$ ، $u=u(x)$

$$y' = y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = y_u\cdot u_x = Y'\cdot u_x$$

$$y'' = \frac{d(y_u\cdot u_x)}{dx} = \underbrace{\frac{d(y_u)}{dx}}_{\frac{dy_u}{du}\cdot\frac{du}{u_x}}\cdot u_x + \frac{d(u_x)}{dx}\,y_u = y_{uu}\cdot(u_x)^2 + y_u\cdot u_{xx}$$

$$= Y''\cdot(u_x)^2 + Y'\cdot u_{xx}$$

جایگذاری در (*)

$$Y''\cdot(u_x)^2 + Y'(u_{xx}) + P(x)\cdot Y'\cdot u_x + Q(x)Y = 0 \quad (**)$$

$u=\int\sqrt{Q(x)}dx$ جایگذاری در (**)

$$Y''\cdot Q(x) + Y'\frac{Q'(x)}{2\sqrt{Q(x)}} + P(x)\cdot Y'\cdot\sqrt{Q(x)} + Q(x)Y = 0$$

$$Q(x)\cdot Y'' + \frac{Q'(x)+2P(x)\cdot Q(x)}{2\sqrt{Q(x)}}\cdot Y' + Q(x)Y = 0$$

$$\Rightarrow Y'' + \boxed{\frac{Q'(x)\cdot 2P(x)\cdot Q(x)}{2Q(x)\sqrt{Q(x)}}}\,Y' + \bullet\, Y = 0$$

اگر این جمله برابر یک عدد ثابت شود

یعنی برای چنین معادلاتی تبدیل مجاز است.

معادله اویلر «دومی»

$$x^2y'' + xy' + y = 0 \qquad p(x) = \frac{1}{x},\ Q(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{Q'+2PQ}{2Q\sqrt{Q}} = cte$$

$$u = \int\sqrt{Q(x)}\,dx = \int\sqrt{\frac{1}{x^2}}\,dx = \ln x$$

$$\cancel{a_2'y'} + \underset{\alpha}{a_2 y''} + a_1'y - a_2''y + \underset{\alpha}{a_1 y_2'} - \cancel{a_2'y'} = 0$$

از دو جمع داریم $\quad -a_0 y + a_1'y - a_2''y = 0 \quad \Rightarrow \quad a_2'' - a_1' + a_0 = 0$ معکوس:

eg: $\underset{a_2}{\sin x}\, y'' - \underset{a_1}{\cos x}\, y' + \underset{a_0}{2\sin x}\, y = 0$

$a_2'' - a_1' + a_0 \overset{?}{=} 0 \qquad -\sin x - \sin x + 2\sin x = 0 \checkmark$

$$\frac{d}{dx}\left[\sin x\,(y') + (-\cos x - \cos x)\,y\right] = 0$$

$y'\sin x - 2y\cos x = c \Rightarrow y' - 2y\,\mathrm{ctg}\,x = c/\sin x$ معادله خطی مرتبه اول:

$\Rightarrow \mu = e^{\int p(x)\,dx} \quad ; \quad y = \frac{1}{v}\left[\int v \cdot Q \cdot dx + c\right]$

تمرین: $y'' + 2y'\,\mathrm{ctgh}\,x + y = 0$

معادلات همگن نسبت به y و مشتقاتش:

eg: $yy'' - y'^2 = 6xy^2$

$f(x, ty, \dots) = t^k f(x, y, \dots)$

$y = e^{\int u\,dx} \rightarrow y' = u \cdot y \rightarrow y'' = u'y + uy' \rightarrow y'' = u'y + u^2 y$

$\Rightarrow u'y^2 + u^2y^2 - u^2y^2 = 6xy^2$

$\Rightarrow u' = 6x \Rightarrow u = 3x^2 + c \quad \rightarrow y = e^{\int 3x^2 + c} = e^{x^3 + cx + c'}$

$$\cancel{a_2'y'} + \underset{\alpha}{a_2y''} + a_1'y - a_2''y + \underset{\alpha}{a_1y'} - \cancel{a_2'y'} = 0$$

منعکس : $-a_0y + a_1'y - a_2''y = 0 \Rightarrow a_2'' - a_1' + a_0 = 0$ از صورت هم داریم

eg: $\underset{a_2}{\sin x}\, y'' - \underset{a_1}{\cos x}\, y' + \underset{a_0}{2\sin x}\, y = 0$

$a_2'' - a_1' + a_0 \overset{?}{=} 0 \qquad -\sin x - \sin x + 2\sin x = 0$ ✓

$$\frac{d}{dx}\left[\sin x\,(y') + (-\cos x - \cos x)\,y\right] = 0$$

$y'\sin x - 2y\cos x = c \Rightarrow y' - 2y\,\mathrm{ctg}\,x = c/\sin x$ معادله خطی مرتبه اول :

$\Rightarrow \mu = e^{\int p(x)dx}$; $y = \frac{1}{v}\left[\int v\cdot Q\cdot dx + c\right]$

تمرین : $y'' + 2y'\,\mathrm{ctgh}\,x + y = 0$

معادلات همگن نسبت به y و مشتقاتش :

eg: $yy'' - y'^2 = 6xy^2$

$f(x, ty, \dots) = t^k f(x, y, \dots)$

$y = e^{\int u\,dx} \rightarrow y' = u\cdot y \rightarrow y'' = u'y + uy' \rightarrow y'' = u'y + u^2y$

$\Rightarrow u'y^2 + u^2y^2 - u^2y^2 = 6xy^2$

$\Rightarrow u' = 6x \Rightarrow u = 3x^2 + c \rightarrow y = e^{\int 3x^2 + c} = e^{x^3 + cx + c'}$

eg: $(x^2D^2 - xD + 4)y = \cos(\ln x) + x\sin(\ln x)$

$D(D-1)y - Dy + 4y = \cos u + e^u \sin u$

$\hookrightarrow (D^2 - 2D + 4)y = 0 \qquad m^2 - 2m + 4 = 0 \Rightarrow \Delta = -12 \Rightarrow m = 1 \pm \sqrt{3}\, i$

$y_g = e^u(C_1 \cos\sqrt{3}u + C_2 \sin\sqrt{3}u)$

$y_g = x(C_1 \cos(\sqrt{3}\ln x) + C_2 \sin(\sqrt{3}\ln x))$

$\cos u + e^u \sin u: \quad y_p = \dfrac{1}{D^2 - 2D + 4}(\cos u + e^u \sin u)$

$* \ (ax+b)^2 y'' + (ax+b)y' + y = 0 \ \text{یا} \ f(x)$

$(3x+2)^2 y'' - \frac{27}{4} y = 9(6x+1)\sqrt{3x+2}$

$3x + 2 = t \Rightarrow y_x = y_t \cdot t_x \Rightarrow y' = 3 \cdot y'_t \Rightarrow y'' = 3 \cdot \dfrac{dy'_{(t)}}{dt} \cdot \dfrac{dt}{dx} = 9 \cdot y''_{(t)}$

$9t^2 y''_{(t)} - \frac{27}{4} y_{(t)} = 9(2t-3)\sqrt{t}$

$y_g \quad u = ? \ \ldots$

eg: $y_1 = x^{1/2}, \ y_2 = x^{-1/2} \xrightarrow{\text{جواب‌های مستقل}} y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \Rightarrow P(x) = ?$

$Q(x) = ?$

$e^{\frac{1}{2}u} = x^{1/2}, \quad e^{-\frac{1}{2}u} = x^{-1/2}$

$x^2y'' + axy' + by = 0 \Rightarrow (D^2 - D)y + aDy + by = 0$

$\Rightarrow D^2y + (a-1)Dy + by = 0$

$m^2 + (a-1)m + b = 0$

$\Rightarrow a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1 \qquad b = -\frac{1}{4}$

$x^2y'' + xy' - \frac{1}{4}y = 0$

$x^2 - 3xy + 5y = 0$

$\Rightarrow a = -3, \ b = 5 \Rightarrow m^2 - 4m + 5$

معادله دیفرانسیل $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ را کامل گوییم هرگاه معادل باشد با:

$$\frac{d}{dx}\left[a_2(x)y' + (a_1(x) - a_2'(x))y\right] = 0$$

$$a_2x^2y'' + a_1xy' + a_0y = 0$$ و در حالت کلی تر

$$a_nx^ny^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1xy' + a_0y = 0$$ و در حالت کلی تر

eg: $x^2y'' - 3xy' + 5y = 0$

$u = \ln x$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = Y'\cdot u_x = \frac{1}{x}\cdot Y' \Rightarrow Y' = xy'$$

$$y'' = \frac{d(Y'\cdot u_x)}{dx} = \frac{d(Y')}{dx}\cdot u_x + \frac{d(u_x)}{dx}\cdot Y' = Y''\cdot(u_x)^2 + Y'\cdot(u_{xx}) = Y''\cdot\frac{1}{x^2} - Y'\frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow y'' = \frac{1}{x^2}(Y'' - Y') \quad \Rightarrow x^2y'' = Y'' - Y' = (D^2 - D)Y = D(D-1)Y$$

$\Rightarrow$ با استقرا می توان ثابت کرد. $$x^ny^{(n)} = D(D-1)(D-2)\cdots(D-(n-1))Y$$

eg: $\rightarrow D(D-1)Y - 3DY + 5Y = 0$

$$(D^2 - 4D + 5)Y = 0$$

$m^2 - 4m + 5 = 0 \Rightarrow \Delta = -4 \Rightarrow m = 2 \pm i$

$$Y_g = e^{2u}(c_1\cos u + c_2\sin u)$$ اگر معادله غیر همگن باشد تبدیل به یک معادله خطی غیر همگن می شود.

$$\Rightarrow y_g = x^2(c_1\cos\ln x + c_2\sin\ln x)$$

eg: $(x^2D^2 - xD + 4)y = \cos(\ln x) + x\sin(\ln x)$

eg: $y'' + \frac{1}{4(x-1)^2}y = 0$

eg: $x^3y''' + xy' - y = x\sin\ln(x^2) + x^2$

eg: $x^3y''' + 2xy' - 2y = 2x^2 + x$

eg: $(3x+2)^2y'' - \frac{27}{4}y = 9(6x+1)\sqrt{3x+2}$

eg: $(2x+1)^3y''' + 20(2x+1)y' - 20y = 16x$

لاپلاس:

تبدیل انتگرال $T(f_{(t)}) = \int_a^b k(s,t) f_{(t)}\, d_t = F(s)$

این تبدیل ها خطی اند: $T(c_1 f + c_2 g) = c_1 T(f) + c_2 T(g)$

$k(s,t) \longrightarrow$ هسته تبدیل (kernel)

لاپلاس $L_1(f_{(t)}) = \underbrace{\int_0^\infty e^{-st} f_{(t)}\, d_t}$

وجود لاپلاس منوط به همگرا بودن انتگرال $\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \Rightarrow$ انتگرال ناسره

$L\{f_{(t)}\} = \int_0^\infty e^{-st} f_{(t)}\, d_t = F(s)$ معکوس

$f_{(t)} = L^{-1}\{F(s)\}$

eg: $L\{1\} = \int_0^\infty e^{-st} d_t = -\frac{1}{s} e^{-st}\Big|_0^\infty = \lim_{t \to \infty} -\frac{1}{s} e^{-st} + \frac{1}{s} = \frac{1}{s}$, $s>0$

eg: $L^{-1}\{\frac{1}{s}\} = 1$

eg: $L\{k\} = k/s$

eg: $L\{t\} = \int_0^\infty e^{-st} \cdot t\, d_t = -\frac{1}{s} t e^{-st} - \frac{1}{s^2} e^{-st}\Big|_0^\infty = \frac{1}{s^2}$, $s>0$

	t	e^{-st}
$+$	t	e^{-st}
$-$	1	$-\frac{1}{s}e^{-st}$
	0	$\frac{1}{s^2}e^{-st}$

eg: $L\{t^n\} = \int_0^\infty e^{-st} \cdot t^n\, d_t = \frac{-t^n}{s} e^{-st}\Big|_0^\infty + \frac{n}{s}\int_0^\infty t^{n-1} e^{-st} d_t$

همان لاپلاس جز آن است

$\overset{s>0}{\Rightarrow} L\{t^n\} = \frac{n}{s} L\{t^{n-1}\} = \frac{n}{s} \cdot \frac{n-1}{s} L\{t^{n-2}\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$

eg: $L\{t^4\} = \frac{4!}{s^5} \Rightarrow L^{-1}\{\frac{4!}{s^5}\} = t^4$

eg: $L\{1+t-2t^2\} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} - \frac{4}{s^3}$ eg: $L^{-1}\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3}\} = 1 - t + \frac{t^2}{2!}$

$* \; L\{e^{at}\} = \int_0^\infty e^{-st} \cdot e^{at} dt = \int_0^\infty e^{(a-s)t} dt = \frac{1}{a-s} e^{(a-s)t} \Big|_0^\infty$

$s>a$ باشرط $= 0 + \frac{1}{s-a}$

eg: $L\{e^{-3t}\} = \frac{1}{s+3}$ eg: $L^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} = e^{-2t}$

نکته:

$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \Rightarrow F(s) \xrightarrow[s \to \infty]{} 0$

$* \; L\{\sin at\} = \int_0^\infty e^{-st} \sin at \, dt =$

جواب میده

$* \; L\{\cos at\} = \int_0^\infty e^{-st} \cos at \, dt =$

$* \; L\{e^{iat}\} = L\{\cos at + i \sin at\} = L\{\cos at\} + i L\{\sin at\}$

$\Rightarrow L\{e^{iat}\} = \frac{1}{s-ia} \times \frac{s+ia}{s+ia} = \frac{s+ia}{s^2+a^2} = \underbrace{\frac{s}{s^2+a^2}}_{L\{\cos at\}} + i \underbrace{\frac{a}{s^2+a^2}}_{L\{\sin t\}}$

$\Rightarrow$ eg: $L\{\sin 5t\} = \frac{5}{s^2+25}$

eg: $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+2}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \sqrt{2} t$

eg: $L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+5}\right\} = \cos \sqrt{5} t$

eg: $L^{-1}\left\{\frac{s-1}{s^2+1}\right\} = \cos t - \sin t$

eg: $L^{-1}\left\{\frac{s-1}{s+1}\right\} =$ نمی‌شود چون

درجه صورت = درجه مخرج است.

$* \; L\{\sinh at\} = L\left\{\frac{e^{at} - e^{-at}}{2}\right\} = \frac{a}{s^2-a^2}$

* $L\{\cosh at\} = \frac{s}{s^2-a^2}$

$\Rightarrow \cos iat = \cosh t \xrightarrow{L} \frac{s}{s^2+(ia)^2} = \frac{s}{s^2-a^2}$

$\frac{e^x-e^{-x}}{2} = \sinh x$, $\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} = \sin x$

$\sinh ax = i\sin iax \xrightarrow{L} \frac{i(ia)}{s^2-a^2} = \frac{-a}{s^2-a^2}$ تناقض

$L^{-1}\left\{\frac{2}{s^2-\sqrt{5}}\right\} = \frac{2}{\sqrt{5}}\sinh\sqrt{5}\,t$

قضیه وجودی لاپلاس:

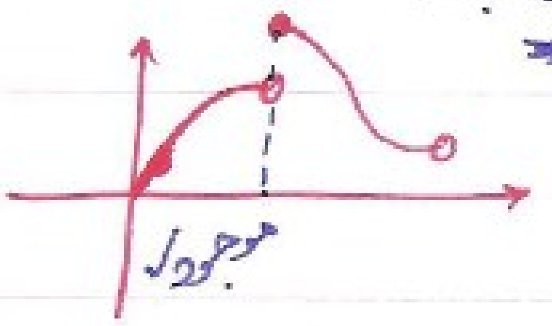
① پیوستگی قطعه‌ای ② مرتبه نمایی بودن تابع.

تابع f در (a,b) پیوسته نیست اما این بازه را می‌توان به زیر بازه‌هایی تبدیل کرد که f در آن زیر بازه‌ها پیوستگی قطعه‌ای دارد.

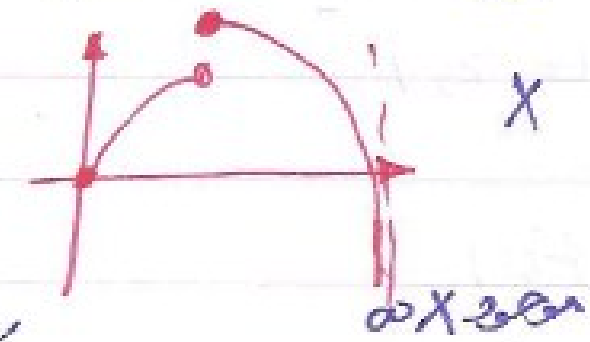
شرایط:

① f در نقاط روی زیر بازه‌ها پیوسته باشد. (از نیست $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ صدق باشد)

② f در نقاط مرزی زیر بازه‌ها موجود باشد



✓



X

اگر $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = c$ $\Leftarrow$ تابع $f(x)$ را از مرتبه $g(x)$ گویند و می‌نویسند $f(x)=O(g(x))$

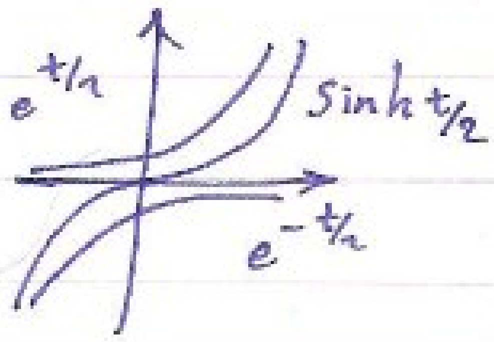
یک عدد مشخص و متناهی

به عبارت دیگر $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{e^{ax}} = c$ پس $f(x)$ را از مرتبه نمایی گویند هرگاه

$\exists M,a,T\,;\ |f(t)| \le Me^{at}$ for $t \ge T$

eg: $\sinh t/2$ از مرتبه $e^{t/2}$ است.

$\lim \frac{e^{t/2}-e^{-t/2}}{2e^{t/2}} = 1/2$



$$L\{f(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}(f(t))dt=\int_0^T e^{-st}f(t)dt+\int_T^\infty e^{-st}f(t)dt$$

وجود لاپلاس

$$\left|\int_T^\infty e^{-st}f(t)dt\right|\leq\int_T^\infty e^{-st}|f(t)|dt\leq\int_T^\infty e^{-st}\cdot Me^{at}dt$$

$s>a$

eg: $L\{\sin^2 t\}=L\left\{\frac{1-\cos 2t}{2}\right\}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+4}\right\}$

eg: $f(x)=\begin{cases}2 & 5<x\\ x & 0\leq x<5\end{cases}$

$$L\{f(x)\}=\int_0^5 x\cdot e^{-sx}dx=\int_5^\infty 2\cdot e^{-sx}dx=\cdots$$

$L(f(bt))=\frac{1}{b}F\left(\frac{s}{b}\right)=\frac{1}{b}L^{-1}(f(t/b))$, $L^{-1}F(ks)=\frac{1}{k}f\left(\frac{t}{k}\right)$:نکته

اثبات:

$F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt=\int_0^\infty e^{-\frac{st}{b}}f(t)dt \xrightarrow{t/b=u} F(s/b)=\int_0^\infty e^{-su}f(bu)b\,du=b\,L f(bt)$

eg: if: $L\left(\frac{1-e^{-t}}{t}\right)=\ln(1+1/s)$ then $L(f(t))=L\left(\frac{1-e^{-2t}}{2t}\right)=?$

جواب $\rightarrow L(f(t))=\frac{1}{2}\ln(1+2/s)$

$$\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt=F(s)$$

قضیه انتقال:

$$L\{e^{at}f(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}e^{at}=f(s-a)$$

eg: $L^{-1}\left\{\frac{s}{(s+2)^3}\right\}=e^{-2t}L^{-1}\left\{\frac{s-2}{s^3}\right\}=e^{-2t}(t-t^2)$

eg: $L^{-1}\left\{\frac{8}{s^3(s^2-s-2)}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s^3}+\frac{D}{s-2}+\frac{E}{s-1}\right\}$

$A=\frac{1}{2!}\lim\left[\frac{16s+8}{(s^2-s-2)^2}\right]'=\frac{1}{2}\left(\frac{64-3}{16}\right)=1$, $B=\frac{1}{1!}\lim_{s\to 0}\left(\frac{8}{s^2-s-2}\right)'=\lim_{s\to 0}\frac{16s+8}{(s^2-s-2)^2}=2$

$C=-4$, $D=\frac{1}{3}$, $E=8/3$

$$L^{-1}\left\{\frac{8}{s^3(s^2-s-2)}\right\}=1+2t-2t^2+\frac{1}{3}e^{2t}+\frac{8}{3}e^{-t}$$

تبدیل لاپلاس مشتق :

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\,dt = e^{-st} f(t)\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

$$= sF(s) - f(0)$$

eg: $\mathcal{L}(\sin^2 t) = \mathcal{L}\{\sin 2t\} = \frac{2}{s^2+4} = \mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\}$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s}\left(\frac{2}{s^2+4}\right)$$

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n\mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - s^{n-3}f''(0) \ldots - f^{(n-1)}(0)$$

eg: $y'' - 5y' + 6y = 0 \qquad y(0) = 1 \,,\; y'(0) = -1$

$$\mathcal{L}(y'' - 5y' + 6y) = 0 \Rightarrow \mathcal{L}(y'') - 5\mathcal{L}(y') + 6\mathcal{L}(y) = 0$$

$$\left(s^2\mathcal{L}(y) - s + 1\right) - 5\left(s\mathcal{L}(y) - 1\right) + 6\mathcal{L}(y) = 0$$

$$\mathcal{L}(y)\left[s^2 - 5s + 6\right] = s - 6 \Rightarrow y = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-6}{s^2-5s+6}\right\}$$

$$* \quad \mathcal{L}^{-1}\{sF(s) - f(0)\} = f'(t) \quad , \quad \mathcal{L}(f(t)) = F(s)$$

قضیه مقدار ابتدایی :

$$\mathcal{L}\{\underbrace{f'(t)}_{G(s)}\} = sF(s) - f(0) \Rightarrow \lim_{s\to\infty} sF(s) = f(0)$$

$$F'(0) = \lim_{s\to\infty}\left(s^2F(s) - sF(0)\right) \qquad F''(0) = \lim_{s\to\infty}\left(s^3F(s) - s^2F(0) - sF'(0)\right)$$

قضیه تبدیل لاپلاس انتگرال :

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^T f(x)\,dx\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^x \left(e^{-2t} + e^{3t}\right)dt\right\} = \frac{2s-1}{s(s+2)(s-3)}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^t f(x)\,dx$$

eg: $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+4)}\right\} = \int_0^x \frac{1}{2}\sin 2t\,dt = -\frac{1}{4}\cos 2t\Big|_0^x = -\frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{4}$

eg: $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3+1}\right\}$ eg: $\mathcal{L}^{-1}\ \frac{s^2}{(s^2+1)^2}$

eg: $\mathcal{L}^{-1}\left\{s\operatorname{Ln}\frac{s}{s-1} - 1\right\} = ?$

eg: $\int_0^\infty e^{-2t}\cos 4t\,dt = \lim\limits_{s\to 2}\int_0^\infty e^{-st}\cos 4t\,dt = \frac{s}{s^2+16} = \frac{1}{10}$

eg: $\mathcal{L}\left\{e^{at}f(t)\right\} = F(s-a)$ $\mathcal{L}\left\{\int_0^x f(t)\,dt\right\} = \frac{F(s)}{s}$

$\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\} = s\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} - f(0)$

دقت کنیم: $f(t) = \begin{cases} x & x<2 \\ x^2 & x\geq 2\end{cases}$ $\to \mathcal{L}\left\{f'(t)\right\} = s\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} - f(0) - \sum_{i=1}^{n}\left[f_+(x_i) - f_-(x_i)\right].T$

x_0 = نقاط ناپیوستگی $f(x)$

$\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\} = s\mathcal{L}\left\{f\right\} - f(0) - (4-2)e^{-2s}$

$\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = F(s)$

مشتق تبدیل لاپلاس:

$\frac{d}{ds}F(s) = \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt = \int_0^\infty \underbrace{\left(\frac{d}{ds}e^{-st}\right)}_{-te^{-st}} f(t)\,dt = -\mathcal{L}\left\{t f(t)\right\}$

$\to \frac{d^n}{ds^n}\left\{\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}\right\} = (-1)^n\mathcal{L}\left\{t^n f(t)\right\}$

eg: $\mathcal{L}\left\{t\sin t\right\} = -\left(\frac{1}{s^2+1}\right)'$ $\to \mathcal{L}(t f(t)) = -(F(s))'$

$\mathcal{L}\left\{t^n f(t)\right\} = (-1)^n\left(F^{(n)}(s)\right)$

eg: $\mathcal{L}^{-1}\left\{\operatorname{Ln}\frac{s-1}{s+1}\right\} = ?$ $F(s) = \operatorname{Ln}(s-1) - \operatorname{Ln}(s+1) \to F'(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1}$

$-t f(t) = e^{t} - e^{-t}$ $\to f(t) = \frac{-e^{t} + e^{-t}}{t}$

eg: $\mathcal{L}^{-1}(\operatorname{Arctg} s) \Rightarrow \lim_{s\to\infty} \operatorname{Arctg} s = \pi/2 \Rightarrow F(s) \not\to 0$ موجود نیست

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = G(s)$$

$$G'(s) = -\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = -F(s)$$

قضیه اول حساب.

$$G(s) = -\int_a^s F(v)\,dv = \int_s^a F(v)\,dv \Rightarrow \lim_{s\to\infty} G(s) = 0 \Rightarrow a = \infty$$

$$\Rightarrow G(s) = \int_s^\infty F(v)\,dv$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(v)\,dv$$

eg: $\mathcal{L}\left\{\frac{e^{3t}}{t}\right\} = \int_s^\infty \frac{1}{v-3}\,dv = \ln|v-3|\Big|_s^\infty = \infty$

eg: $\mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} = \int_s^\infty \frac{1}{s^2+1}\,ds = \operatorname{Arctg} s\Big|_s^\infty = \pi/2 - \operatorname{Arctg} s$

if: $\lim_{t\to 0^+} \frac{f(t)}{t}$ = موجود باشد $\quad F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ $\qquad$: حل

then $\Rightarrow \int_0^\infty \frac{f(t)}{t} = \int_0^\infty F(s)\,ds \Rightarrow \lim_{s\to 0^+} \mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \lim_{s\to 0^+} \int_s^\infty F(s)\,ds$

$$\lim_{s\to 0^+} \int_0^\infty e^{-st}\frac{f(t)}{t} = \int_0^\infty F(s)\,ds$$

eg: $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt = \int_0^\infty \frac{1}{1+s^2} = \operatorname{Arctg} s\Big|_0^\infty = \pi/2$

eg: $\mathcal{L}\left\{t e^{-2t}\int_0^t \frac{e^x - e^{-x}}{x}\,dx\right\}$

$\hookrightarrow \int_s^\infty \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1} = \ln\left|\frac{s-1}{s+1}\right|\Big|_s^\infty = -\ln\left|\frac{s-1}{s+1}\right| = \ln\left|\frac{s+1}{s-1}\right|$

$\frac{f(x)}{x}$

$$\mathcal{L}\left\{e^{-2t}\,t\int_0^t \frac{e^{x}-e^{-x}}{x}\right\}$$

$f(x)=e^{x}-e^{-x} \rightarrow F(s)=\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s+1}$

$\frac{f(x)}{x} \longrightarrow \int_s^\infty F(s)\,ds$

$\int_s^\infty \frac{1}{s-1}-\frac{1}{s+1} = \ln\frac{s+1}{s-1}$

$\frac{1}{s}\ln\left|\frac{s+1}{s-1}\right|$

$-\left(\frac{1}{s}\ln\left|\frac{s+1}{s-1}\right|\right)'$

$s \to s+2$ بعد از تبدیل

eg: $\int_0^\infty \int_0^t \frac{e^{-t}\sin u}{u}\,du\,dt = \pi/4$ نشان دهید

$\int_0^\infty e^{-t}\int_0^t \frac{\sin u}{u}\,du\,dt =$

$$\lim_{s\to 1} \mathcal{L}\left\{\int_0^t \frac{\sin u}{u}\,du\right\} = \lim_{s\to 1}\frac{\int_s^\infty \frac{ds}{1+s^2}}{s} = \lim_{s\to 1}\frac{\operatorname{Arctg} s\,\Big|_s^\infty}{s} = \pi/2-\pi/4 = \pi/4$$

eg: $\int_0^\infty \frac{e^{-x}(1-\cos x)}{x}\,dx$ $\quad \int_0^\infty \frac{f(t)}{t}\,dt = \int_0^\infty F(s)\,ds$ eg: $\int_0^\infty \frac{e^{-3t}-e^{-6t}}{t} = \ln 2$

eg: $\mathcal{L}\{|\sin t|\} = ?$ $\quad$ برای توابع متناوب ← دوره تناوب را در نظر می‌گیریم. T = دوره تناوب $f(t)$ اصلی

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt = \int_0^T e^{-st}f(t)\,dt + \int_T^\infty e^{-st}f(t)\,dt$$

$T+u=t$

$$\int_0^\infty e^{-s(T+u)}f(T+u)\,du = e^{-sT}\mathcal{L}\{f(t)\}$$

$$\Rightarrow (1-e^{-sT})\,\mathcal{L}(f(t)) = \int_0^T e^{-st}f(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\,f(t) = \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st}f(t)\,dt$$

$$\mathcal{L}\{|\sin t|\} = \underbrace{\frac{1}{1-e^{-\pi s}}\int_0^{\pi} e^{-st}\sin t\,dt}_{I} =$$

e^{-st}	$\sin t$
$-se^{-st}$	$-\cos t$
s^2e^{-st}	$-\sin t$

$$I = -e^{-st}\cos t - se^{-st}\sin t - \int s^2 e^{-st}\sin t$$

$$(1+s^2)I = -e^{-st}[\cos t + \sin t]$$

$$I = \frac{-e^{-st}[\cos t + \sin t]\Big|_0^{\pi}}{1+s^2}$$

$$I = \frac{1+e^{-\pi s}}{1+s^2}$$

$$\frac{1}{1-e^{-\pi s}} \times \frac{1+e^{-\pi s}}{1+s^2} = \frac{1+e^{-\pi s}}{1-e^{-\pi s}} \times \frac{1}{1+s^2}$$

$$\coth\frac{\pi s}{2} \cdot \frac{1}{1+s^2}$$

$$\coth\frac{x}{2} = \frac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}}, \quad \tanh\frac{x}{2} = \frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

eg: $f(x)\begin{cases} x & 0<x<\pi \\ 2\pi - x & \pi<x<2\pi \end{cases}$

غیر دوره‌ای: $\mathcal{L}(f(x)) = \int_0^{\pi} e^{-sx}x\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} e^{-sx}(2\pi - x)\,dx$

دوره‌ای: $\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\left[\int_0^{\pi} e^{-sx}\cdot x\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} e^{-sx}\cdot(2\pi - x)\,dx\right]$

تمرین برای:

eg: $ty'' + (1-2t)y' - 2y = 0$

$$-\frac{d}{ds}(\mathcal{L}\{y''\}) + \mathcal{L}\{y'\} + 2\frac{d}{ds}(\mathcal{L}\{y'\}) - 2\mathcal{L}\{y\} = 0$$

$$-\frac{d}{ds}(s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0)) + s\mathcal{L}\{y\} - y(0) + \frac{2d}{ds}(s\mathcal{L}\{y\} - y'(0)) - 2\mathcal{L}(y) = 0$$

$$-2sF(s) - s^2F'(s) + 1 + sF(s) - 1 + 2F(s) + 2sF'(s) - 2F(s) = 0$$

$$s(2-s)F'(s) - sF(s) = 0$$

اغلب در این موقعیت به یک معادله مرتبه اول می‌رسیم که از این روش حل می‌شود.

$$\mu = e^{\int p(s)ds} \rightarrow F(s) = \frac{1}{\mu}\left[\int \mu\cdot Q\,ds + c\right]$$

$$\frac{F'(s)}{F(s)} = \frac{-1}{s-2} \Rightarrow \ln F(s) = -\ln|s-2| \Rightarrow F(s) = \frac{1}{s-2} \Rightarrow y = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} = e^{2t}$$

نکته: در کلاس می‌توان از بسط تیلور استفاده کرد:

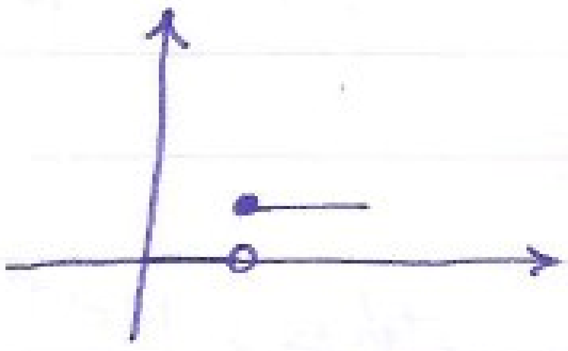
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-1/s}}{s}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1+\left(\frac{-1}{s}\right)+\left(\frac{-1}{s}\right)^2+\left(\frac{-1}{s}\right)^3+\cdots}{s}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s^3}-\cdots\right\}_s$$

$$1-t+\frac{t^2}{2}-\cdots$$

تابع پله‌ای واحد:

$$\star\quad u_c(x) = \begin{cases} 0 & 0\leq x<c \\ 1 & x\geq c \end{cases}$$

تعریف تابع



$$\mathcal{L}\{u_c(x)\} = \int_0^\infty e^{-sx}u_c(x)\,dx = \int_0^c e^{-sx}u_c(x)\,dx + \int_c^\infty e^{-sx}u_c(x)\,dx = -\frac{1}{s}e^{-sx}\Big|_c^\infty$$

$$= \frac{1}{s}e^{-sc}$$

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & 0\leq x<a_1 \\ f_2(x) & a_1\leq x<a_2 \\ f_3(x) & x\geq a_2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = f_1(x)+\left[f_2(x)-f_1(x)\right]u_{a_1}(x)+\left[f_3(x)-f_2(x)\right]u_{a_2}$$

eg: $[x] = \begin{cases} 0 & 0\leq x<1 \\ 1 & 1\leq x<2 \\ 2 & 2\leq x<3 \\ \vdots & \vdots \end{cases}$ $\quad [x] = u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+u_4(x)+\cdots$

$\frac{1}{s}e^{-sc}$

$$\mathcal{L}\{[x]\} = \mathcal{L}\{u_1(x)\}+\mathcal{L}\{u_2(x)\}+\cdots$$

$$= \frac{1}{s}\left[e^{-s}+e^{-2s}+\cdots\right] = \frac{e^{-s}}{s}\left[\underbrace{1+e^{-s}+\cdots}_{\left(\frac{1}{1-e^{-s}}\right)}\right] = \frac{e^{-s}}{s(1-e^{-s})}$$

اگر تابع $f(x)$ مفروض باشد، راجع به تابع $f(x-c)\cdot u_c(x)$ چه می‌توان گفت:

$$\begin{cases} 0 & 0\leq x<c \\ f(x-c) & c\leq x \end{cases}$$

انتقال در جهت مثبت محور x به اندازه c:

$$\mathcal{L}\{f(x-c)\cdot u_c(x)\} = \int_c^\infty e^{-sx}f(x-c)\,dx = e^{-sc}\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt = e^{-sc}\mathcal{L}\{f(t)\}$$

$$= e^{-cs}F(s)$$

if $f(x-c)=1$ then $\mathcal{L}\{u_c(x)\} = e^{-sc}\cdot\frac{1}{s}$

eg: $f(t) = \begin{cases} 0 & 0\leq t<a \\ t^n & t\geq a \end{cases} \Rightarrow \mathcal{L}\{f(t)\}$.

① $\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_a^\infty e^{-st}\, t^n\, dt = \ldots$

② $t^n = ((t-a)+a)^n = (t-a)^n + na(t-a)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}a^2(t-n)^{n-2} + \cdots + a^n$

$f(t) = t^n u_a(t)$

$f(t) = (t-a)^n u_a(t) + na(t-a)^{n-1}u_a(t) + \cdots + a^n u_a(t)$

$\mathcal{L}\{f(t)\} = e^{-as}\frac{n!}{s^{n+1}} + n.a.\, e^{-as}\frac{(n-1)!}{s^n} + \cdots + e^{-sa}\frac{1}{s}$

تابع گاما: $\Gamma(x)$

شرط همگرایی Γ : $x>0$ $\quad \Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$

$\boxed{x\geq 0}$

$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t}\,dt = -t^x e^{-t}\Big|_0^\infty + x\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$ جزء به جزء

$= 0 + x\Gamma(x) \Rightarrow \Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$

$\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n) = n!$

$(n-1)\,\Gamma(n-1)$

$(n-2)\,\Gamma(n-2)$

$(n-3)\,\Gamma(n-3)$

$\cdots\ \Gamma(1)$

$\Rightarrow \Gamma(n+1) = n! \qquad \mathcal{L}\{t^n\} = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} = \frac{n!}{s^{n+1}}$

$\mathcal{L}\{t^{1/2}\} = \frac{\frac{1}{2}!}{s^{3/2}} = \frac{\Gamma(3/2)}{s^{3/2}} = \frac{\frac{1}{2}\Gamma(1/2)}{s^{3/2}}$

$\Gamma(1/2) = \int_0^\infty t^{-1/2}e^{-t}\,dt = \int_0^\infty 2e^{-u^2}\,du = 2\int_0^\infty e^{-u^2}\,du$

$t = u^2$

تمرین ۵: 90.3.31 ← Lob

eg: $\int_0^\infty \sqrt[5]{x}\cdot e^{-2\sqrt{x}}\,dx =$

eg: $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\ln \frac{1}{x}}}$ « راهنمایی: $t = -\ln x$ »

eg: $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

eg: $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\ln \frac{1}{x}}} = \int_0^1 (-\ln x)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \int_\infty^0 u^{-\frac{1}{2}}(-e^{-u})\,du = \int_0^\infty u^{-\frac{1}{2}} e^{-u}\,du = \Gamma(\tfrac{1}{2})$

$-\ln x = u$

$\Gamma = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\,dt$ « Lob »

$\Rightarrow \int_0^1 (-\ln x)^p\,dx = \Gamma(p+1)$

eg: $\int_0^\infty x^n e^{-2x}\,dx = \int_0^\infty \frac{t^n}{2^n} e^{-t}\,\frac{dt}{2} = \frac{1}{2^{n+1}}\Gamma(n+1) = \frac{n!}{2^{n+1}}$

$2x = t$

eg: $\int_0^1 x^m (\ln x)^n\,dx = \int_0^\infty e^{-mx}\cdot(-u)^n e^{-u}\,du = (-1)^n \int_0^\infty e^{-(m+1)u} u^n\,du$

$-\ln x = u$ $(m+1)u = t$

$= (-1)^n \int_0^\infty \frac{e^{-t} t^n}{(m+1)^{n+1}}\,dt = \frac{(-1)^n}{(m+1)^{n+1}}\Gamma(n+1) = n!$

eg: $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \int_0^\infty \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t}\,dt = \frac{1}{2}\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$x^2 = t$

$2x\,dx = dt \Rightarrow dx = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}}\,dt$

① قطبی
② Lob
③ ...

$G(t) = \int_0^\infty e^{-tx^2}\,dx \Rightarrow G(1) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$\mathcal{L}\{G(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\int_0^\infty e^{-tx^2}\,dx\cdot dt = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-st} e^{-tx^2}\,dx\,dt$

$= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-st} e^{-tx^2}\,dt\,dx = \int_0^\infty \frac{1}{s+x^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{s}}\operatorname{Arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{s}}\right)\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2\sqrt{s}}$

$\mathcal{L}\{G(t)\} = \frac{\pi}{2\sqrt{s}} \Rightarrow G(t) = \frac{\pi}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s}}\right\} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}\right\} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} t^{-\frac{1}{2}}$

$G(1) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

تابع بتا: $\beta(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx$ $m,n>0 \Rightarrow$ همگرا

$\rightarrow \beta(m,n) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$

فنواز - آزمون

eg: $\int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1}\theta \cdot \cos^{2n-1}\theta \, d\theta$ eg: $\int_0^{\pi/2} \sin^p\theta \cos^p\theta \, d\theta$ $\begin{cases} 2m-1=p \\ 2n-1=0 \end{cases}$

$$\int_0^{\pi/2} (\sin^2\theta)^{\frac{2m-1}{2}} (\cos^2\theta)^{\frac{2n-1}{2}} d\theta = \int_0^{\pi/2} (\sin^2\theta)^{\frac{2m-1}{2}} (1-\sin^2\theta)^{\frac{2n-1}{2}} d\theta$$

$$\sin^2\theta = x \Rightarrow 2\sin\theta\cos\theta \, d\theta = dx$$

$$\int_0^{\pi/2} x^{\frac{2m-1}{2}} \cdot (1-x)^{\frac{2n-1}{2}} \frac{dx}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} = \frac{1}{2}\int^{\pi/2} x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx = \frac{1}{2}\beta(m,n) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

eg: $\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi} \quad 0<p<1$

eg: $\int_0^{\pi/2} \sin^p\theta \, d\theta = \int_0^{\pi/2} \cos^p\theta \, d\theta = \begin{cases} \frac{1\times3\times5\times\dots\times(p-1)}{2\times4\times6\times\dots\times p} \cdot \frac{\pi}{2} & \text{p: زوج و مثبت} \\ \frac{2\times4\times6\times\dots\times(p-1)}{1\times3\times\dots\times p} & \text{p: یک عدد صحیح مثبت و فرد} \end{cases}$

* انتگرال پیچیش یا کانولوشن - تلفیق:

معادله انتگرال: تابع مجهول در داخل انتگرال ظاهر می‌شود:

$$h(x) f(x) = g(x) + \int_a^b k(x,t) \cdot f(t) \, dt$$

$$g(x) = \int_{f(x)}^{h(x)} k(x,t) \, dt$$

$$g'(x) = h'(x)\, k(x, h(x)) - f'(x)\, k(x, f(x)) + \int_{f(x)}^{h(x)} \frac{\partial k(x,t)}{\partial x} dt$$

if: $a, b \rightarrow$ ج $\rightarrow$ دو عدد $\rightarrow$ معادله انتگرال فردهلم

if: $\begin{matrix} a=0 \\ b=x \end{matrix} \rightarrow$ ولترا

if: $g(x) = 0 \rightarrow$ معادله همگن

if: $h(x) = 0 \rightarrow$ نوع اول
$h(x) = 1 \rightarrow$ نوع دوم

a و b متناهی باشد یا $K(x,t)$ در نقطه یا نقاطی از $[a,b]$ تعریف نشده باشد.
(معادله منفرد، تکین)

if: $f(t)$ ① $\rightarrow$ توان آن یک باشد خطی $\rightarrow$ در غیر این صورت غیرخطی

کانولوشن دو تابع f و g :
$$f(x) * g(x) = \int_0^x f(t-x)\cdot g(t)\,dt$$

eg: $e^x * \sin x = \int_0^x \sin t \cdot e^{t-x}\,dt$

$$\mathcal{L}\{f*g\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^x f(t-x)\cdot g(t)\,dt\right\} = \mathcal{L}\{\overset{F(s)}{f(x)}\}\cdot\mathcal{L}\{\overset{G(s)}{g(x)}\}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\cdot G(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}\cdot\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$$

نکته : $\mathcal{L}\{f\cdot g\} \neq \mathcal{L}\{f\}\cdot\mathcal{L}\{g\}$

eg: $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\cdot\frac{1}{s^2+1}\right\} = \int_0^x \cos(x-t)\cdot\sin t\,dt$. معکوس تبدیل شود :

eg: $y(t) = t + e^t - \int_0^t y(x)\cdot\cosh(t-x)\,dx$

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s-1} - \mathcal{L}\{y(t)\}\cdot\mathcal{L}\{\overset{\frac{s}{s^2-1}}{\cosh t}\}$$

$$\left(1+\frac{s}{s^2-1}\right)\mathcal{L}\{y(t)\} = 1/s^2 + 1/(s-1) \Rightarrow \mathcal{L}\{y(t)\} = \frac{s+1}{s^2}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{1/s + 1/s^2\right\} = 1+t$$

eg: $y' + 3y + 2\int_0^t y(u)\,du = 3 \quad , \; y(0)=1$ $\qquad \mathcal{L}\left\{\int_0^x f(t)\,dt\right\} = \frac{F(s)}{s}$

eg: $\mathcal{L}\left\{\underset{\text{انتقال}}{e^{-t}}\int_0^t \underset{x\frac{1}{s}}{}\underset{\text{انتقال}}{e^x}\cdot\underset{\text{تبدیل}}{\sin x}\,dx\right\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t e^{-(x-t)}\cdot\sin x\,dx\right\} = \mathcal{L}\{e^{-x}\}\cdot\mathcal{L}\{\sin x\}$

$$= \frac{1}{s+1}\cdot\frac{1}{s^2+1}$$

eg: $\int_0^1 \sqrt{x-x^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{x}\sqrt{1-x}\,dx = \frac{\Gamma(3/2)\cdot\Gamma(3/2)}{\Gamma(3)} \ldots$

حل دستگاه با روش لاپلاس (دارای شرایط اولیه):

eg: $\begin{cases} \frac{dy}{dt} = 3x - 4y \\ \frac{dx}{dt} = 2x + y \end{cases} \quad y(0)=1, \; x(0)=-1$ $\qquad \begin{cases} s\mathcal{L}\{y\} = 3\mathcal{L}\{x\} - 4\mathcal{L}\{y\} + y(0) \\ s\mathcal{L}\{x\} = 2\mathcal{L}\{x\} + \mathcal{L}\{y\} + x(0) \end{cases} \ldots$

کامل

$$\mathcal{L}\{x\} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -(s+4) \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -(s+4) \\ 2s & 1 \end{vmatrix}} \Rightarrow x = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+3}{-s^2-2s+11}\right\}$$

دستگاه به روش عملگر: (خیلی مهم)

$$\begin{cases} (D^2+3)x + Dy = e^{-t} \\ -4Dx + (D^2+3)y = \sin 2t \end{cases}$$

کرامر:

$$x = \frac{4e^{-t} - 2\cos 2t}{D^4+10D^2+9} \qquad y = \frac{-\sin 2t - 4e^{-t}}{D^4+10D^2+9}$$

$$D^4+10D^2+9 = 0 \Rightarrow D^2 = -1 \Rightarrow D = \pm i \ , \ D^2 = -9 \Rightarrow D = \pm 3i$$

$$x_g = c_1\cos x + c_2\sin x + c_3\cos 3x + c_4\sin 3x \qquad y_g = c_5\cos x + c_6\sin x + c_7\cos 3x + c_8\sin 3x$$

$$x_p = \frac{1}{D^4+10D^2+9}(4e^{-t} - 2\cos 2t) = \frac{1}{5}e^{-t} + \frac{2}{15}\cos 2t \ , \ y_p = \frac{1}{D^4+10D^2+9}(-\sin 2t - 4e^{-t}) = \frac{1}{15}\cos 2t - \frac{1}{5}e^{-t}$$

$$X = c_1\cos x + c_2\sin x + c_3\cos 3x + c_4\sin 3x + \frac{1}{5}e^{-t} + \frac{2}{15}\cos 2t$$

$$Y = c_5\cos x + c_6\sin x + c_7\cos 3x + c_8\sin 3x - \frac{1}{5}e^{-t} + \frac{1}{15}\sin 2t$$

مرتبه 4 است

اما D^4+10D^2+9 (برای حذف 4 ثابت دیگر اضافی (زیرا $(D^4+10D^2+9)y=0$)) کافیست جوابها را در یکی از معادلات دستگاه قرار دهیم.

$$(D^2+3)x + Dy = e^{-t}$$

$$\left(-c_1\cos x - c_2\sin x - 9c_3\cos 3x - 9c_4\sin 3x + \cancel{\tfrac{1}{5}e^{-t}} - \tfrac{8}{15}\cancel{\cos 2t}\right) +$$

$$\left(3c_1\cos x + 3c_2\sin x + 27c_3\cos 3x + 27c_4\sin 3x + \cancel{\tfrac{3}{5}e^{-t}} + \cancel{\tfrac{6}{15}}\cos 2t\right) +$$

$$\left(-c_5 \overset{\sin}{\cancel{\cos}} x + c_6\cos x - 3c_7\sin 3x + 3c_8\cos 3x + \cancel{\tfrac{1}{5}e^{-t}} + \tfrac{2}{15}\cancel{\cos 2t}\right) = \cancel{e^{-t}}$$

$$\cos x(2c_1 + c_6) + \sin x(2c_2 - c_5) + \cos 3x(3c_8 - 6c_3) + \sin 3x(-6c_4 - 3c_7) = 0$$

$$\Rightarrow c_6 = -2c_1 \qquad c_5 = 2c_2 \qquad c_8 = 2c_3 \qquad c_7 = -2c_4$$

سریها:

روش مشتق متوالی:

eg: $e^x y'' + xy' - y = x \qquad y(0) = 1 \ , \ y'(0) = -1$

$$e^0 y''(0) + 0 - 1 = 0 \Rightarrow y''(0) = -1$$

$$\xrightarrow{D} e^x(y'' + y''') + y' + xy'' - y' = 1$$

$$-1 + y'''(0) = 1 \Rightarrow y'''(0) = 2$$

$$\therefore \Rightarrow y(0) = 1 \ , \ y'(0) = -1 \ , \ y''(0) = -1 \ , \ y'''(0) = 2$$

$$\Rightarrow y = y(0) + \frac{y'(0)\,x}{1!} + \frac{y''(0)\,x^2}{2!} + \cdots$$

$$\Rightarrow y = 1 - x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$$

$$y'' + P(x)\,y' + Q(x)\,y = R(x)$$

جواب معادله را بصورت یک سری توانی ارائه کنیم:

سری توانی (یا درزری): $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ ، a_n دنباله ، x_0 مرکز

شعاع همگرایی: R

$f(x) \to$ if: $a_n = \frac{f^{n}(x_0)}{n!}$

eg: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-1)^n}{2^n(3n-1)}$ شعاع و بازه همگرایی

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x|} < 1$ or $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$

تعیین: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ مثال ، $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ و

$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}\,|x-1|}{2\sqrt[n]{3n-1}} = \frac{|x-1|}{2} < 1 \to -1 < x < 3$

$x=-1,\ x=3 \Rightarrow$ (شرط همگرایی را نداره) واگرا $\sum \frac{(-1)^n n \cdot 2^n}{2^n(3n-1)}$

$R=2 \Rightarrow$ در $(-1, 3)$ همگرایی مطلق است.

تعریف: a را یک نقطه تحلیلی تابع $f(x)$ می نامند اگر بتوان سری تیلور را حول a نوشت:

$$f(x) \simeq f(a) + \frac{f'(a)(x-a)}{1!} + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \cdots$$

مثلاً: صفر برای $\frac{1}{x}$ تحلیلی نیست.

ـ اگر نقطه x_0 طوری باشد که یک نقطه تحلیلی توابع $P(x)$ ، $Q(x)$ ، $R(x)$ باشد، x_0 یک نقطه عادی معادله است.

ـ اگر x_0 یک نقطه عادی معادله نباشد، به آن نقطه غیرعادی (یا تکین یا منفرد) می گوییم.

نقطه غیرعادی (تکین): ① منظم ، ② غیرمنظم

① منظم:

eg: $x^2y'' + 5x^3y' + y = x$

$y'' + 5xy' + \frac{1}{x^2}y = \frac{1}{x}$

$x=0 \Rightarrow$ یک نقطه غیرعادی $\Rightarrow$ برای اینکه منظم باشد باید 3 شرط زیر همزمان برقرار باشد:

$$\left(\lim (x-x_0)P(x) = L_0 ,\ \lim (x-x_0)^2 Q(x) = L_1 ,\ \lim (x-x_0)^2 R(x) = L_2\right)$$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} (x)\,5x = 0$ ، $\lim_{x\to 0} x^2 \frac{1}{x^2} = 1$ ، $\lim_{x\to 0} x^2 \cdot \frac{1}{x} = 0$

if: x_0 = نقطه غیرعادی باشد $\Rightarrow y=(x-x_0)^r \sum a_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0} a_n (x-x_0)^{n+r}$

فروبنیوس:

eg: $y''+xy'-xy=0$, $x=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=-1$

$x=0 \xrightarrow[\text{است؟}]{\text{چه نوع نقطه‌ای}}$ عادی $\Rightarrow y=\sum_{n=0} a_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0} a_n x^n$

$y=\sum_{n=0} a_n x^n$

$y'=\sum_{n=1} n(a_n) x^{n-1}$

$y''=\sum_{n=2} n(n-1) a_n x^{n-2}$

$\Rightarrow \sum_{n=2} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=1} n a_n x^n - \sum_{n=0} a_n x^{n+1} = 0$

اندیس‌ها یکسان شوند:

$$\sum_{n=0} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \sum_{n=1} n a_n x^n - \sum_{n=1} a_{n-1} x^n = 0$$

② $n=?$ باید یکی شوند. باید همه از $n=1$ شروع شوند.

$$2a_2 + \sum_{n=1} \left[(n+2)(n+1) a_{n+2} + n a_n - a_{n-1} \right] x^n = 0$$

$$\begin{cases} 2a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = 0 \\ a_{n+2} = \dfrac{a_{n-1} - n a_n}{(n+1)(n+2)} , \quad n \geq 1 \end{cases}$$

$n=1 \Rightarrow a_3 = \dfrac{-a_1 + a_0}{6} = -\frac{1}{6} a_1 + \frac{1}{6} a_0$

$n=2 \Rightarrow a_4 = \dfrac{-2a_2 + a_1}{12} = \frac{1}{12} a_1$, $a_2 = 0$

$n=3 \Rightarrow a_5 = \frac{1}{40} a_1 - \frac{1}{40} a_0$

$\Rightarrow y = \sum_{n=0} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \cdots$

$= a_0 + a_1 x + 0 - \frac{1}{6} a_1 x^3 + \frac{1}{6} a_0 x^3 + \frac{1}{12} a_1 x^4 + \frac{1}{40} a_1 x^5 - \frac{1}{40} a_0 x^5 \cdots$

$\Rightarrow y = a_0 \left(1 + \frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{40} x^5 + \cdots \right) + a_1 \left(x - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{12} x^4 + \frac{1}{40} x^5 + \cdots \right)$

$y(0)=1 \to a_0$ $\quad y'(0)=-1 \to a_1$

eg: $y''+xy'-xy = x \sin x$

$x\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots \right) = x^2 - \frac{x^4}{6} + \frac{x^6}{120} \cdots$

$\Rightarrow \sum a_n x^n \overset{\text{معادل}}{=\!=} x^2 - \frac{x^4}{6} + \frac{x^6}{120} \cdots$

$n=1$ ---

⋮

$n=\ldots$

e.g.: $y'' + (x-1)^2 y' + (x^2-1)y = 0$ $\quad (x_0 = 1)$

e.g.: $y'' - 2xy' + 2py = 0$, $p = cte$ معادله هرمیت . $\quad (x_0 = 0)$

e.g.: $(1-x^2)y'' - 2xy' + p(p+1)y = 0$ $\quad (x_0 = 0)$ لژاندر مرتبه p

$$x_0 - 1 = 0 \Rightarrow x_0 - 1 = t \quad \Rightarrow y'_x = Y'_t \quad , \quad y''_x = Y''_t$$

$$\Rightarrow Y'' + t^2 Y' + t(t+2)Y = 0 \qquad (t = 0)$$

$$y = \sum_{n=0} a_n t^n$$

e.g. $(1-x^2)y'' - 2xy' + p(p+1)y = 0$ $\quad x_0 = 0$, $p \geq 0$, cte , $|x|<1$

نقطه عادی x_0

$$y = \sum_{n=0} a_n x^n$$

$$y' = \sum_{n=1} n a_n x^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=2} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

$$\sum_{n=2} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=2} n(n-1)a_n x^n - 2\sum_{n=1} n a_n x^n - 2\sum_{n=0} p(p+1) a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=2} n(n-1)a_n x^n - 2\sum_{n=1} n a_n x^n - p(p+1)\sum_{n=0} a_n x^n = 0$$ بزرگترین نقطه شروع را می‌نویسیم :

$$2a_2 + p(p+1)a_0 + (6a_3 - 2a_1 + p(p+1)a_1)x +$$

$$+ \sum_{2} \Big[(n+2)(n+1)a_{n+2} + (\underbrace{-n(n-1) - 2n + p(p+1)}_{n^2 - p^2 + n - p}) a_n \Big] x^n = 0$$

$$\Rightarrow 2a_2 + p(p+1)a_0 = 0 \quad \Rightarrow a_2 = \frac{-p(p+1)a_0}{2!}$$

$$\Rightarrow (6a_3 - 2a_1 + p(p+1)a_1)x = 0 \quad \Rightarrow a_3 = -\frac{(p-1)(p+2)a_1}{3!}$$

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n(n-1) + 2n - p(p+1)a_n) = 0 \Rightarrow a_{n+2} = \frac{(n-p)(n+p+1)a_n}{(n+1)(n+2)}$$

$$a_2 = -\frac{p(p+1)a_0}{2!} \qquad a_3 = -\frac{(p-1)(p+2)}{3!}a_1 \qquad a_4 = -\frac{(p-2)(p+3)a_2}{12}$$

$$a_4 = \frac{p(p+1)(p+3)(p-2)}{4!}a_0 \qquad a_5 = -\frac{(p-3)(p+4)}{20}a_3 = \frac{(p-1)(p-3)(p+2)(p+4)}{5!}a_1$$

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

$$y = a_0\left(1 - \frac{p(p+1)}{2!}x^2 + \frac{p(p+1)(p-2)(p+3)}{4!}x^4 - \cdots\right) + a_1\left(x - \frac{(p-1)(p+2)}{3!}x^3 + \frac{(p-1)(p-3)(p+2)(p+4)}{5!}x^5\right)$$

$$= a_0 y_1 + a_1 y_2$$

eg: $x(1-x)y'' + (1-2x)y' + 2y = 0$

$1-2x = t \Rightarrow y' = -2Y', \quad y'' = 4Y'', \quad x = \frac{1-t}{2}$

$$4\left(\frac{1-t}{2}\right)\left(1-\frac{1-t}{2}\right)Y'' + \cancel{(1-t)}Y' + 2Y = 0$$

$\hookrightarrow p(p+1) = 2 \Rightarrow p = 1, \; p = -2$ ×

$$\Rightarrow y = a_0\left(1 - t^2 - \frac{t^4}{3} - \cdots\right) + a_1 t$$

$$= a_0\Big(1 - t\underbrace{\left(t - \frac{t^3}{3} - \cdots\right)}_{\text{اتحادی که با پاسخ } a_5}\Big) + a_1 t = a_0(1 - t\,\tanh^{-1} t) + a_1 t$$

$P = 0 \xrightarrow{y_1} P_0(x) = 1$ $\qquad\qquad$ $P_0(x) = 1$

$P = 1 \xrightarrow{y_2} P_1(x) = x$ $\qquad$ همسان می‌کنیم $\qquad$ $P_1(x) = x$

$P = 2 \xrightarrow{y_1} P_2(x) = 1 - 3x^2$ $\qquad$ یعنی چندجمله‌ای‌ها بر $\qquad$ $P_2(x) = \frac{1}{2}(-1+3x^2)$

$P = 3 \xrightarrow{y_2} P_3(x) = x - \frac{5}{3}x^3$ $\qquad$ مجموع ضرایب آنها تقسیم $\qquad$ $P_3 \; \cdots$

$P_i(1) = 1$ $\qquad$ شود

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n\left((x^2-1)^n\right)}{dx^n}$$ دستور رودریگ

if: $n = 2 \Rightarrow P_2(x) = \frac{1}{2^2 \cdot 2!}\left((x^2-1)^2\right)'' = \frac{1}{2}(3x^2-1)$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \simeq f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \qquad \frac{1}{2}(3x^2-1) = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\int_{-1}^{1} e^{-x^2}\,dx = e^{-1/3} + e^{-1/3}$$

$$\int_{-2}^{5} e^{-x^2}dx = \int_{-1}^{1} \cdots$$

حتماً باید در بازه [1,1-] باشد

$u = -1 + \frac{2}{7}(x+2)$

$u = -1 + \frac{2}{(b-a)}(x-a)$

$$\int_{-1}^{1} P_m(x) \cdot P_n(x)\,dx = 0$$

چند جمله‌ای لژاندر ← پایه اند و متعامد.

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\,dx = \frac{2}{2n+1} \neq 0$$

هر تابع پیوسته در بازه [1,1-] با ...

$$(m+1)P_{m+1}(x) = (2m+1)x\,P_m(x) - m\,P_{m-1}(x)$$

رابطه بازگشتی

(I) $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$

حل معادلات به کمک سری حول نقاط منفرد منظم:

$\lim_{x\to x_0} P(x)$ موجود نباشد $\lim_{x\to x_0} Q(x)$ موجود نباشد $\lim_{x\to x_0} P(x)\underbrace{(x-x_0)}$ موجود باشد. چرا ضرب کردیم

$\lim_{x\to x_0} Q(x)(x-x_0)^2$ موجود باشد. چرا ضرب کردیم

(II) $(x-x_0)^2y'' + (x-x_0)^2P(x)y' + (x-x_0)Q(x)y = 0$

$$y = \sum_0 a_n(x-x_0)^{n+r} \qquad y' = \sum (n+r)a_n(x-x_0)^{n+r-1}$$

$$y'' = \sum_0 (n+r)(n+r-1)a_n(x-x_0)^{n+r-2}$$

چرا صفر؟ چون جمله اول دیگر صفر نیست

(I) $\sum_0 (n+r)(n+r-1)a_n(x-x_0)^{n+r-2} + \sum_0 (n+r)a_n P(x)(x-x_0)^{n+r-1} + \sum Q(x)a_n(x-x_0)^{n+r}$

$$\sum_0 (n+r)(n+r-1)a_n(x-x_0)^{n+r-2} + \underline{P(x)(x-x_0)}\sum_0(n+r)a_n(x-x_0)^{n+r-2} + \underline{Q(x)\cdot(x-x_0)^2}\sum a_n\cdot(x-x_0)^{n+r-2}$$

بسط تیلور $P(x)\cdot(x-x_0)$ است. حول نقطه $x=x_0$. و این نیز

$$\lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0) + \frac{P'(x_0)(x-x_0)}{1!} \cdots = P(x_0) \qquad \lim_{x\to x_0} q(x) = q(x_0) + \frac{q'(x_0)(x-x_0)}{1!} \cdots = q(x_0)$$

if: $n=0 \Rightarrow r(r-1) + rP(x_0) + q(x_0) = 0$

n معادله مشخصه

eg: $x(x+1)y'' - (x+1)y' + y = 0$ $x_0 = -1$

eg: $x(x-1)y'' + (3x-1)y' + y = 0$ $x=0 \Rightarrow r=?$

eg: $4xy'' + 2y' + y = 0$ $x_0 = 0$ $r=?$

eg: $x(x+1)y'' - (x+1)y' + y = 0 \qquad x_0 = -1$

$x+1 = t$

$(t-1)ty'' - ty' + y = 0 \qquad t_0 = 0$ «نقطه منفرد منظم»

$p(t) = \frac{-1}{t-1} = \frac{1}{1-t} \quad , \quad Q(t) = \frac{1}{t(t-1)}$

$\lim_{t\to 0} p(t) = \frac{1}{1} \qquad \lim_{t\to 0} Q(t) = \infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{t\to 0} t\,p(t) = 0 \qquad \lim_{t\to 0} t^2 Q(t) = 0$

معادله شاخص: $r(r-1) + rp(t_0) + Q(t_0) = 0 \quad \Rightarrow r(r-1) = 0 \quad \begin{cases} r = 0 \\ r = 1 \end{cases}$

$y = \sum_{n=0} a_n t^{n+r} \Rightarrow y' = \sum_{n=0} (n+r) a_n t^{n+r-1} \qquad y'' = \sum_{n=0} (n+r-1)(n+r) a_n t^{n+r-2}$

$\sum_0 (n+r)(n+r-1) a_n t^{n+r} - \sum_0 (n+r)(n+r-1) a_n t^{n+r-1} - \sum_0 (n+r) a_n t^{n+r} + \sum_0 a_n t^{n+r} = 0$

$-r(r-1)a_0 t^{r-1} + \sum_1 (n+r)(n+r-1) a_n t^{n+r-1}$

$+ \sum_0 (n+r+1)(n+r) a_{n+1} t^{n+r}$

$\begin{cases} r(r-1) = 0 \Rightarrow r = 0 , r = 1 \\ \Big((n+r)(n+r-1) - (n+r-1) \Big) a_n + (n+r+1)(n+r) a_{n+1} = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow a_{n+1} = - \frac{(n+r-1)^2}{(n+r)(n+r+1)} a_n \; ; \; n \geq 0$

$r = 1 \Rightarrow a_{n+1} = - \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} a_n \; ; \; n \geq 0 \Rightarrow \begin{matrix} n = 0 \Rightarrow a_1 = 0 \\ n = 1 \Rightarrow a_2 = 0 \end{matrix} \rightarrow y_1 = \sum_0 a_n t^{n+1} = a_0 t$

$r = 0 \Rightarrow a_{n+1} = - \frac{(n-1)^2}{(n)(n+1)} a_n \; ; \; n \geq 0$ «نمی‌توان a_n ها را بدست آورد»

ج۲: $y_1 = a.t \qquad y_2 = a t \int \frac{1}{a^2 t^2} e^{-\int \frac{-1}{t-1} dt} dt = \frac{1}{a_0} t \ln t + 1$

$y = (x+1)\ln(x+1) + 1 \Rightarrow y = c_1 y_1 + c_2 y_2$

$$r(r-1)+rp(x_0)+Q(x_0)=0$$

$r_1 \neq r_2\,;\quad r_1-r_2 \in \mathbb{Z}\,,\ r_1>r_2 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \sum a_n x^{n+r_1} \\ y_2 = K y_1 \ln x + \sum b_n x^{n+r_2} \end{cases}$ (*)

با جایگذاری می توان ضرایب را بدست آورد.

$r_1-r_2 \notin \mathbb{Z}\,,\ r_1>r_2 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \sum a_n x^{n+r_1} \\ y_2 = \sum b_n x^{n+r_2} \end{cases}$

$r_1=r_2=r \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \sum a_n x^{n+r} \\ y_2 = y_1 \ln x + \sum b_n x^{n+r} \end{cases}$

(*) $\displaystyle y_2 = \frac{\partial}{\partial r}(r-r_2)\cdot y(x,r)\Big|_{r=r_2}$

eg: $x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0$ $\quad x=0$: نقطهٔ منفرد منظم $\quad$ معادله بسل مرتبه ν :

$y=\sum a_n x^{n+r}$

$y'=\sum (n+r)a_n x^{n+r-1}$ $\quad \Rightarrow \sum_0 (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r} + \sum_0 (n+r)a_n x^{n+r} + \sum a_n x^{n+r+2}$ (I)

$y''=\sum (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2}$ $\quad -\sum_0 \nu^2 a_n x^{n+r} = 0$ $\qquad \sum_2 a_{n-2} x^{n+r}$

جمله اول $n=0$: $r(r-1)a_0x^r + ra_0x^r - \nu^2a_0x^r = 0$ $\qquad$ تا شروع جمع‌ها از 2 شود:

$a_0(r^2-r+r-\nu^2)x^r=0 \xrightarrow{a_0 \neq 0\ \text{دلخواه}} r^2=\nu^2 \Rightarrow r=\pm\nu$ *

جمله دوم $n=1$: $r(r+1)a_1x^{r+1} + (1+r)a_1x^{r+1} - \nu^2a_1x^{r+1} = 0$ $\qquad$ (طبق *)

$(r(r+1)+(1+r)-\nu^2)a_1x^{r+1}=0 \Rightarrow \begin{cases}(r+1)^2-\nu^2 \neq 0 \Rightarrow r+1 \neq \pm\nu \\ a_1=0\end{cases}$

$(I)=0 \Rightarrow (n+r)(n+r-1+1)a_n = (n+r)^2a_n + a_{n-2} - \nu^2 a_n = 0$

$$\Rightarrow a_n = \frac{-a_{n-2}}{(n+r)^2-\nu^2} \qquad n \geq 2\,,\ r=\pm\nu$$

$$r=\nu \Rightarrow a_n = \frac{-a_{n-2}}{n(2\nu+n)} \qquad n \geq 2$$

$$n=2 \Rightarrow a_2 = \frac{-a_0}{4(\nu+1)} \qquad n=4 \Rightarrow a_4 = \frac{-a_2}{4(2\nu+4)} = \frac{a_0}{4^2(2(\nu+2))(\nu+1)} = \frac{a_0}{2^4 \cdot 2!(\nu+1)(\nu+2)}$$

$$\underset{\text{فرد}}{n=3} \Rightarrow a_3 = 0$$ چون $a_1=0$ است.

$$n=6 \Rightarrow a_6 = \frac{-a_0}{2^6 \cdot 3!\,(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}$$

$$\Rightarrow a_8 = \frac{+a_0}{2^8 \cdot 4!\,(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)(\nu+4)}$$

$$\Rightarrow a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{2^{2n} \cdot n!\,(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+n)}, \quad n=1 \longrightarrow$$ چون از روی a_2 می‌رود.

$$y_1 = \sum_{n=0} a_n x^{n+\nu} \quad (r=\nu) \quad \xrightarrow{\text{با زوج‌ها کار داریم}} y_1 = \sum_{n=0} a_{2n} x^{2n+\nu} = \sum_{n=0} \frac{(-1)^n a_0 x^{2n+\nu}}{2^{2n} \cdot n!(\nu+1)\cdots(\nu+n)}$$

$$a_0 \;\text{تعریف}\; = \frac{1}{2^\nu \cdot \nu!}$$

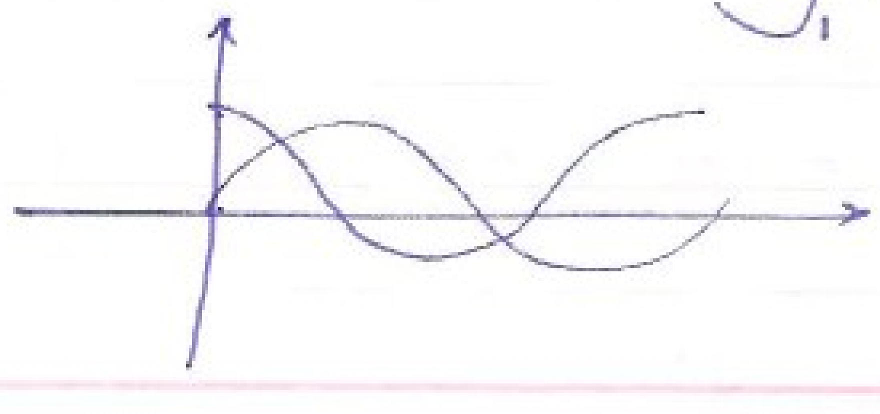
$$\Rightarrow y_1 = \sum_{n=0} \frac{(-1)^n}{n!\,(n+\nu)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}$$

$$\Rightarrow J_\nu(x) = \sum_{n=0} \frac{(-1)^n}{n!(n+\nu)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}$$

مشابه $\Rightarrow J_{-\nu}(x) = \sum_{n=0} \frac{(-1)^n}{n!\,(n-\nu)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-\nu}$

$$\nu=0 \Rightarrow J_0(x) = \sum \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \qquad \nu=1 \Rightarrow J_1(x) = \sum \frac{(-1)^n}{(n+1)!\,n!} x^{2n+1}$$

$$J_0(x) = 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 \qquad J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{16}$$



eg: $x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0$

$\nu^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \nu = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow y_g = c_1 J_{\frac{1}{2}}(x) + c_2 J_{-\frac{1}{2}}(x) \Rightarrow J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\sin x$

$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\cos x$

if: ν: عدد صحیح نباشد $\Rightarrow J_\nu(x)$ و $J_{-\nu}(x)$ مستقل خطی اند $\Rightarrow y_g = c_1 J_\nu(x) + c_2 J_\nu(x)$

if: ν: عدد صحیح باشد $\Rightarrow y_1 = J_\nu(x)$ یک جواب

جواب دوم را از رابطه ی زیر می یابیم:

فرم جواب:

$y_2 = k\,\mathrm{Ln}x \cdot J_\nu(x) + \sum b_n x^{n-\nu}$

eg: $xy'' + y' + xy = 0$

$\Rightarrow x^2y'' + xy' + x^2y = 0$

$\Rightarrow \nu = 0 \Rightarrow y_1 = J_0(x) \Rightarrow$ جواب

$y_1 = J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 2^4} - \cdots \qquad \Rightarrow J_0^2(x) = (1 - \frac{x^2}{4} + \cdots)(1 - \frac{x^2}{4} + \cdots) = 1 - \frac{x^2}{2} + \cdots$

$y_2 = J_0(x)\int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int \frac{1}{x}dx} dx = \int \frac{dx}{x J_0^2(x)} = \int \frac{dx}{x - \frac{x^3}{2} + \cdots}$

$\frac{1}{J_0^2(x)} = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + \cdots} = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots \Rightarrow b_0 = 1 \quad b_1 = 0 \quad b_2 = \frac{1}{2} \quad b_3 = 0 \quad b_4 = \frac{5}{32}$

$\frac{1}{J_0^2(x)} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{32}x^4 + \cdots \Rightarrow y_2 = \int \frac{1}{x} + \frac{1}{2}x + \frac{5}{32}x^4 + \cdots dx = \mathrm{Ln}x + \frac{x^3}{4} + \frac{5}{128}x^4$

راه دوم: $y = \sum a_n x^{n+r} \qquad P(x) = \frac{1}{2} \qquad Q(x) = 1 \qquad \Rightarrow \lim_{x\to 0} xp(x) = 1, \ \lim_{x\to 0} x^2 Q(x) = 0$

$\Rightarrow r(r-1) + r \times 1 + 0 = 0 \Rightarrow r^2 = 0 \Rightarrow r = 0$ تکراری

ریشه تکراری باشد: $y(r, x) = \sum a_n x^{n+r}$

$y_2 = \frac{\partial}{\partial r} y(r, x)\Big|_{r=r_1=0} \qquad y = x^r \sum_{n=0} a_n x^n$

$\frac{\partial y}{\partial r} = x^r \mathrm{Ln}x \left[a_0 + \sum_{n=1} a_n x^n\right] + x^r\left[\sum_{n=1} a_n'(r) x^n\right]$

$= y_1 \mathrm{Ln}x + \sum_{n=1} a_n'(r) x^{n+r}$

$x^2y'' + xy' + x^2y = 0$

$y = \sum a_n x^{n+r}$ --- رابطه بازگشتی: $a_n = \dfrac{-a_{n-2}}{(n+r)^2 - \nu^2}$ $n \geq 2$, $\nu = 0$, $r = 0$

$\Rightarrow a_n = \dfrac{-a_{n-2}}{(n+r)^2}$ $\qquad y(r,x) = a_0 x^r + a_1 x^{r+1} + a_2 x^{r+2} + \cdots$

a های فرد $= 0$ $\qquad a_2 = \dfrac{-a_0}{(2+r)^2}$, $a_4 = \dfrac{-a_2}{(4+r)^2} = \dfrac{a_0}{(2+r)^2(4+r)^2}$

$$y(r,x) = \left(a_0 x^r + \frac{-a_0}{(r+2)^2} x^{r+2} + \frac{a_0}{(r+2)^2(r+4)^2} x^{r+4} \cdots\right)$$

$$= a_0 x^r \left(1 - \frac{x^2}{(2+r)^2} + \frac{x^4}{(r+2)^2(r+4)^2} \cdots\right)$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial y}{\partial r}\right|_{r=0} = a_0 x^r \cdot \ln x \left(1 - \frac{x^2}{(r+2)^2} + \cdots\right) + a_0 x^r \left(\frac{2x^2}{(2+r)^3} \cdots\right)$$

$$= a_0 \underbrace{\ln x \left(1 - \frac{x^2}{2^2} \cdots\right)}_{J_0(x)} + a_0 \left(\frac{x^2}{4} \cdots\right)$$

if: $r_1 \neq r_2$, $r_1 - r_2 \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow y_1 = \sum a_n x^{n+r_1}$

$y_2 = \sum b_n x^{n+r_2} + k y_1 \ln x$

اثبات: $\dfrac{\partial}{\partial r}\Big[(r - r_2)\, y(r,x)\Big]_{r=r_2}$ ---

e.g. $4x^2y'' + 4xy' + (x - \frac{1}{4})y = 0$ $\qquad x = t^2$:تغییر متغیر

$y'' = \dfrac{d(y' \cdot \frac{1}{2t})}{dx} = \dfrac{d(y' \cdot \frac{1}{2t})}{dt} \cdot \dfrac{dt}{dx}$ $\qquad y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt} \cdot \dfrac{dt}{dx} = y'_{(t)} \cdot \frac{1}{2t}$

$= \left(y'' \cdot \frac{1}{2t} - \dfrac{y'}{2t^2}\right) \frac{1}{2t}$

$\Rightarrow 4t^4 \left(\dfrac{1}{4t^2} y''_{(t)} - \dfrac{y'}{4t^3}\right) + 4t^2 \cdot y' \cdot \dfrac{1}{2t} + (t^2 - \frac{1}{4}) \cdot y = 0$

$\Rightarrow t^2y'' - ty' + 2ty' + (t^2 - \frac{1}{4})y = 0 \Rightarrow t^2y'' + ty' + (t^2 - \frac{1}{4})y = 0$

$\nu^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \nu = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow y = c_1 J_{1/2}(x) + c_2 J_{-1/2}(x)$

eg: $y'' + (e^x - 4)y = 0 \qquad e^x = \frac{u^2}{4}$

$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = \frac{u}{2}\cdot Y'$

$y'' = \frac{d(\frac{u}{2}\cdot Y')}{dx} = \frac{d(\frac{u}{2}\cdot Y')}{du}\cdot\frac{du}{dx} = (\frac{1}{2}Y' + \frac{u}{2}Y'')\cdot\frac{u}{2} = \frac{u}{4}Y' + \frac{u^2}{4}Y''$

$\frac{u^2}{4}Y'' + \frac{u}{4}Y' + (\frac{u^2}{4} - 4)Y = 0$

$\Rightarrow u^2Y'' + uY' + (u^2 - 16)Y = 0 \quad \Rightarrow \quad \nu = \pm 4$

$Y_1 = J_4(u) \qquad Y_2 = k\,Ln(u)\cdot J_4(u) + \sum b_n u^{n-4}$

$\Rightarrow y_1 = J_4(\sqrt{4e^x}) \;---$

$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 4^2} - \cdots$ حاصل جمع بسط را بنویسید.

$\mathcal{L}\{J_0(x)\} = \frac{1}{s} - \frac{2!}{2^2 s^3} + \frac{4!}{2^2 4^2 s^5} - \cdots = \frac{1}{s}\left[1 - \frac{1}{2s^2} + \frac{3}{8s^4} - \cdots\right]$

بسط

بسط تیلور $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$; $x = \frac{1}{s^2} \Rightarrow \mathcal{L}\{J_0(x)\} = \frac{1}{s\sqrt{1+\frac{1}{s^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}$

چند رابطه مهم برای کنکور ارشد:

$J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x}J_\nu(x)$

$J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2J'_\nu(x)$

$\left[x^\nu J_\nu(x)\right]' = x^\nu J_{\nu-1}(x) \qquad \left[x^{-\nu}J_\nu(x)\right]' = -x^{-\nu}J_{\nu+1}(x)$

eg:

$(J_0(x))' = -J_1(x) \qquad \mathcal{L}\{J_1(x)\} = -\mathcal{L}\{J_0'(x)\} = -\left(s\mathcal{L}(J_0(x)) - J_0(0)\right)$

$\Rightarrow \mathcal{L}\{J_1(x)\} = \frac{1-s}{\sqrt{1+s^2}}$

$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\sin x \qquad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\cos x$

$J_{3/2}(x) = ? \xrightarrow{\nu = -1/2} J_{-1/2}(x) + J_{3/2}(x) = \frac{-1}{x} J_{1/2}(x)$

$J_{3/2} = - - -$

$* \int x^{\nu} J_{\nu-1}(x)\,dx = x^{\nu} J_{\nu}(x) \qquad * \int x^{\nu} J_{\nu+1}(x)\,dx = -x^{\nu} J_{\nu}(x)$

eg: $\int x^3 J_0(x)\,dx = \int x^2 (x J_0(x))\,dx = x^3 J_1(x) - 2\int x^2 J_1(x)\,dx = x^3 J_1(x) - 2x^2 J_2(x) + c$

x^2	$x J_0(x)$
$-2x$	$x^1 J_1(x)$
2	

$\nu \in Z: \begin{cases} y_1 = J_{\nu}(x) \\ y_2 = Y_{\nu}(x) = \frac{1}{\sin \nu\pi}\left(J_{\nu}(x)\cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)\right) \end{cases}$