

تمرین سری دو لایه همگن و متناهی

انرژی

۱. ۲ پرسته کروی هم مرکز بدون بار به شعاع a و b ($a < b$) در فضای آزاد قرار دارند یک بار همی ساکن در فضای بین a و b میانی به شدت $E = E_0 \left(\frac{1}{R} - \frac{a}{R^2} \right) \hat{R}$ را ایجاد می کند
- الف) چگالی بار همی بین a و b را بیابید.
- ب) اختلاف پتانسیل بین a و b را بیابید.
- ج) شدت میدان الکتریکی در سایر نقاط را بیابید.
- د) انرژی الکتریکی ذخیره شده بین a و b را بدست آورید.

حل: الف)

$$\nabla \cdot E = \rho_v / \epsilon_0 \Rightarrow \nabla \cdot E = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} (R^2 E_R)$$

$$= \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} (E_0 (R - a)) = \frac{E_0}{R^2} \Rightarrow \rho_v = \epsilon_0 \frac{E_0}{R^2}$$

ب)

$$V = - \int \vec{E} \cdot d\vec{l} \Rightarrow V_a - V_b = - \int_b^a E_0 \left(\frac{1}{R} - \frac{a}{R^2} \right) dR$$

$$\Rightarrow V_{ab} = -E_0 (\ln(q_b) + 1 - q_b)$$

ج)

$$R < a \Rightarrow E = 0$$

$$R > b \quad \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho_v dv \rightarrow D_R (4\pi R^2) = \int_V \frac{\epsilon_0}{R^2} E_0 R^2 \sin \theta dR d\theta d\phi$$

$$= 4\pi (b - a) \epsilon_0 E_0$$

$$D_R = \frac{b-a}{R^2} \epsilon_0 E_0, \quad E = \frac{b-a}{R^2} E_0 \hat{R}$$

$$W = \frac{1}{2} \int_V \epsilon_0 E^2 dv = \frac{\epsilon_0}{2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_a^b E_0^2 \left(\frac{1}{R} - \frac{a}{R^2} \right)^2 R^2 \sin \theta dR d\theta d\phi$$

$$\Rightarrow W = \frac{4\pi \epsilon_0 E_0^2}{2} \left[(b-a) - 2a \ln \frac{b}{a} + a(1 - q_b) \right]$$

۲. از سطح کروی هم مرکز، کره بیرونی به شعاع c و کره درونی به شعاع a انتقال زمین شده اند و در هر کره میدان به شعاع b بار q قرار دارد. انرژی ذخیره شده در این سیستم چقدر است.

حل: چون کره c زمین شده است پس $R < a$ میدان صفر است و انتقال فوق فقط $a < R < b$ دارد مقدار است چقدر داخل کره a بار نیست میدان در $R < a$ نیز صفر است.

$$W_e = W_{e1} + W_{e2}$$

$$= \frac{1}{2} \int_a^b \epsilon E_1^2 dv + \frac{1}{2} \int_b^c \epsilon E_2^2 dv$$

$$\vec{E}_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon R^2} \hat{a}_R \quad a < R < b$$

$$\vec{E}_2 = \frac{q + Q_1}{4\pi\epsilon R^2} \hat{a}_R \quad b < R < c$$

$$W_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 (4\pi) \left\{ \int_a^b \frac{Q_1^2}{(4\pi\epsilon R^2)^2} R^2 dR + \int_b^c \frac{(q + Q_1)^2}{(4\pi\epsilon R^2)^2} R^2 dR \right\}$$

$$\Rightarrow W_e = \frac{q^2}{8\pi\epsilon} \frac{(c-b)(b-a)}{b^2(c-a)}$$

۳. انرژی الکتریکی سازه که در ناحیه $b < R$ ، پیرامون یک قطب الکتریکی با استوار P ذخیره می گردد را بدست آورید ($b \gg d$)

$$\vec{E} = \frac{\vec{P}}{4\pi\epsilon R^3} (2\cos\theta \hat{a}_R + \sin\theta \hat{a}_\theta)$$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2} \int_V \epsilon |\vec{E}|^2 dv = \frac{\epsilon}{2} \left(\frac{P}{4\pi\epsilon} \right)^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \int_0^\infty \frac{1}{R^6} (4\cos^2\theta + \sin^2\theta) R^2 \sin\theta d\theta d\phi dR$$

$$= \frac{P^2}{12\pi\epsilon b^3}$$

۴. کره‌ای از دی الکتریک به فریب نفوذپذیری ϵ و شعاع a در خلأ قرار دارد. حجم این کره با چگالی بار حجمی $\rho = \rho_0 \frac{a}{r}$ باردار می‌شود. در این رابط ۲ از مرکز سنجیده می‌شود انرژی الکتریکی ذخیره شده در این سیستم را بیابید!

حل: برای محاسبه انرژی ذخیره شده در کل سیستم باید چگالی انرژی را در نقاط مختلف بدست آوریم و برای این کار به چگالی شار معادله در نقاط مختلف نیاز داریم. مقدار بار ذخیره شده در کره‌ای به شعاع r برابر با:

$$q = \int \rho dv = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{R=0}^R \int_{\theta=0}^{\pi} \rho_0 \frac{a}{R} R^2 \sin\theta d\theta d\varphi dR$$

$$q = 2\pi a \rho_0 R^2$$

$$D_1 = \frac{q}{4\pi R^2} \hat{a}_R = \frac{a \rho_0}{2} \hat{a}_R \quad R < a \quad \text{چگالی شار الکتریکی در ناحیه داخلی}$$

$$D_2 = \frac{q(R=a)}{4\pi R^2} \hat{a}_R = \frac{a^3 \rho_0}{2R^2} \hat{a}_R \quad R > a \quad \text{چگالی شار الکتریکی در ناحیه خارجی}$$

$$\Rightarrow W = \int_{R=0}^a \frac{1}{2\epsilon} |D_1|^2 dv + \frac{1}{2\epsilon} \int |D_2|^2 dv$$

$$= \frac{\pi \rho_0^2 a^5}{6\epsilon} + \frac{\pi \rho_0^2 a^5}{2\epsilon}$$

۵. کره به شعاع a و چگالی بار حجمی ρ مفروض است. کار لازم برای ترکیب کردن این کره و ساختن یک کره واحد چقدر است؟ (با بیان چگالی)

حل: ابتدا به بار \leftarrow شعاع کره جدید $b=2a$ برآید

$$8 \times \frac{4}{3} \pi a^3 \rho = \rho \frac{4}{3} \pi b^3$$

$$\Rightarrow W = 8 \times \frac{4\pi \rho^2 a^5}{15\epsilon_0} = \frac{32\pi \rho^2 a^5}{15\epsilon_0} \quad \text{کار لازم جهت ساختن کره به شعاع } a \text{ و چگالی } \rho$$

$$\Rightarrow W' = \frac{4\pi \rho^2 b^5}{15\epsilon_0} = \frac{4\pi \rho^2 (2a)^5}{15\epsilon_0} = \frac{128\pi \rho^2 a^5}{15\epsilon_0} \quad \text{کار لازم جهت ساختن کره به شعاع } 2a \text{ و چگالی } \rho$$

$$W_b = W' - W = \frac{96\pi \rho^2 a^5}{15\epsilon_0}$$

۶. یک پوسته کروی به شعاع داخلی a و شعاع خارجی $3a$ دارای بار الکتریکی به چگالی حجمی $\rho \frac{a^2}{R^2}$ می باشد. اگر بخواهیم پتانسیل در خارج پوسته ثابت بماند بار الکتریکی نقطه ای که باید در مرکز پوسته قرار گیرد چقدر است؟

حل: اگر بخواهیم پتانسیل در خارج پوسته ثابت باشد باید میدان در خارج پوسته همزمان شود چون میدان شعاعی است (بر دلیل تقارن کروی) باید کل بار داخل کره کوسی که به شعاع R بزرگتر از شعاع خارجی پوسته می باشد همزمان باشد بنابراین بارش را باید در مرکز پوسته قرار کرد باید میدان در مختلف نقاط پوسته باشد

$$\Rightarrow Q = - \int_a^{3a} \rho (4\pi R^2) dR = - \int_a^{3a} \rho \frac{a^2}{R^2} 4\pi R^2 dR = -8\pi \rho a^3$$

$$\int_a^{3a} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \rho dv$$

۷. روی کره به شعاع a و $2a$ بارهای الکتریکی به چگالی سطحی ρ_s و $2\rho_s$ توزیع شده اند انرژی ذخیره شده در فضا را بدست آورید؟

حل: $R < a \rightarrow E_1 = 0$ $a < R < 2a \Rightarrow E_2 = \frac{\rho_s 4\pi a^2}{4\pi \epsilon_0 R^2}$

$R > 2a \rightarrow E_3 = \frac{\rho_s 4\pi a^2 + 2\rho_s 4\pi (2a)^2}{4\pi \epsilon_0 R^2} = \frac{9\rho_s a^2}{\epsilon_0 R^2}$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int E^2 dV = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_a^{2a} E_2^2 4\pi R^2 dR + \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_{2a}^{\infty} E_3^2 4\pi R^2 dR$$

$$= \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_a^{2a} \frac{\rho_s^2 a^4}{\epsilon_0^2 R^4} 4\pi R^2 dR + \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_{2a}^{\infty} \frac{81 \rho_s^2 a^4}{\epsilon_0 R^4} 4\pi R^2 dR$$

$$= \frac{4\pi \rho_s^2 a^4}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{2a} \right) + \frac{4\pi \rho_s^2 a^4}{2\epsilon_0} \left(\frac{81}{2a} \right) = \frac{82\pi \rho_s^2 a^3}{\epsilon_0}$$