تمرین سری هشتم (ط) الکترومغناطیس «قانون گوس»

۱. بار سطحی با چگالی یکنواخت روی سطح $2x+y+3z=6$ مطلوبست محاسبه میدان الکتریکی در مبدا مختصات؟

حل:

$$\vec{E} = \frac{\rho_s}{2\varepsilon}\hat{a}_n \qquad \hat{a}_n = \frac{\vec{\nabla} f}{|\vec{\nabla} f|} = \frac{2\hat{a}_x+\hat{a}_y+3\hat{a}_z}{\sqrt{14}}$$

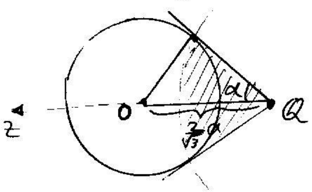
اگر نقطه‌ی مورد نظر مبداء مختصات است زیر سطح بار دار باشد $\hat{a}_n$ منفی است و اگر بالا محور مختصات باشد a_n مثبت است.

در مثال بالا مبداء کوچکتر از مقدار صفر است (به جای x و y و z صفر میگذاریم) ⇐ به جای $\hat{a}_n$ باید $-\hat{a}_n$ بگذاریم.

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\left[-\frac{2\hat{a}_x+\hat{a}_y+3\hat{a}_z}{\sqrt{14}}\right]$$

---

۲. بار $Q = 2^c$ در فاصله‌ی $\frac{2}{\sqrt{3}}a$ از کره ای به شعاع a قرار دارد. شار الکتریکی وارد شده بر کره را بیابید؟



شار وارد شده از رابطه‌ی $\int E.ds$ محاسبه می‌شود که در این انتگرال سطح ی قسمتی از کره است که مرکز آن بار Q است و با زاویه $\theta=\alpha$

$$\sin\alpha = \frac{a}{\frac{2}{\sqrt{3}}a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \Psi = \int E\cdot ds = \int_0^{2\pi}\int_0^{\alpha}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}R^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \frac{Q}{2}(1-\cos\alpha) = \frac{2}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

«دقت شود که در حل این مثال محور z را خط $\overrightarrow{OQ}$ در نظر گرفتیم»

---

۳. پوسته کروی توخالی به شعاع $a<R<b$ دارای چگالی بار $\rho = \frac{K}{R^2}$ است میدان الکتریکی در $R<a$ و $a<R<b$ ، $R>b$ بیابید.

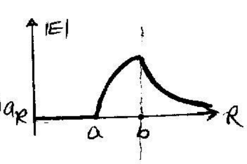
حل:

$R<a: \quad Q_{in}=0 \Rightarrow E=0$

$a<R<b: \quad \oint E\cdot ds = E4\pi R^2 = \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho_v\, dv = \frac{1}{\varepsilon_0}\int\frac{K}{R^2}R^2\sin\theta\, dR\, d\theta\, d\varphi = \frac{4\pi K}{\varepsilon_0}(R-a)\hat{a}_R$

$$\Rightarrow E = \frac{K}{\varepsilon_0}\left(\frac{R-a}{R^2}\right)\hat{a}_R$$

$R>b: \quad \oint E\cdot ds = E(4\pi R^2) = \frac{4\pi K}{\varepsilon_0}(b-a) \Rightarrow E = \frac{K}{\varepsilon_0}\left(\frac{b-a}{R^2}\right)a_R$



۴. برای کره‌ای به شعاع a که به طور یکنواخت با بار حجمی به چگالی $\rho_v = \rho_0 \ (C/m^3)$ باردار شده صحت قانون گوس را برای یک سطح مکعبی به ضلع $2b$ که هم مرکز با کره و داخل کره است را بررسی کنید.

حل: پیداست که بار داخل مکعب برابر است با:

$$Q = \int \rho_v \, dv = \rho_0 (2b)^3 = 8\rho_0 b^3$$

$\Rightarrow$ قبلاً میدان داخل کره‌ای با بار یکنواخت را به صورت $E = \frac{\rho_0 R}{3\varepsilon_0}\hat{a}_R$ محاسبه کردیم.

حال شار عبوری از هر یک از وجوه مکعب را بدست می‌آوریم و بر اساس اصل تقارن آن را در ۶ ضرب می‌کنیم.

$$\psi_1 = \text{شار عبوری از وجه بالایی} = \int E\cdot ds = \int \frac{\rho R}{3\varepsilon}\hat{a}_R \cdot dx\,dy\,\hat{a}_z = \int_{-b}^{b}\int_{-b}^{b}\frac{\rho R\cos\theta}{3\varepsilon_0}\,dx\,dy$$

ولی $R\cos\theta = z$ است و روی این سطح $z = b$ است.

$$\Rightarrow \psi_1 = \frac{\rho b}{3\varepsilon_0}\int_{-b}^{b}\int_{-b}^{b} dx\,dy = \frac{4\rho b^3}{3\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \psi = 6\psi_1 = \frac{8\rho b^3}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \oint_{total} E\cdot ds = \frac{8\rho b^3}{\varepsilon_0} = \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0} = \frac{8\rho b^3}{\varepsilon_0}$$

---

۵. در فضای آزاد بار حجمی به صورت روبرو داده شده است.

$$\rho = \begin{cases} \rho_0 \frac{R}{a} & R<a \\ \beta\rho_0 & a<R<2a \\ 0 & R>2a \end{cases}$$

الف) شدت میدان الکتریکی را در کلیه نقاط فضا بیابید.

ب) شار الکتریکی را که از سطح کروی نیم‌کره‌ی بالایی به شعاع $\frac{3a}{2}$ به مرکز مبدا می‌گذرد را حساب کنید.

حل: الف)

$\boxed{R<a}$

$$\int_S E\cdot ds = \int_V \frac{\rho}{\varepsilon}dv \Rightarrow E(4\pi R^2) = \int \rho_0 \frac{R}{a} R^2\sin\theta\, d\theta\, dR\, d\varphi$$

$$\Rightarrow E(4\pi R^2) = \int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\rho_0 R^3}{a}\sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dR = \frac{\rho_0}{a}4\pi\times\frac{1}{4}R^4 \Rightarrow E = \frac{\rho_0 R^2}{4\varepsilon_0 a}\hat{a}_R$$

$\boxed{a<R<2a}$

$$\int E\cdot ds = \int_V \frac{\rho}{\varepsilon}dv \Rightarrow E(4\pi R^2) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a}\rho_0\frac{R}{a}R^2\sin\theta\, dR\, d\theta\, d\varphi + \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_a^R \beta\rho_0 R^2\sin\theta\, dR\, d\theta\, d\varphi$$

$$\Rightarrow E(4\pi R^2) = 4\pi\left(\int_0^a \rho_0\frac{R^3}{a}dR + \int_a^R \beta\rho_0 R^2 dR\right) \Rightarrow E = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0 R^2}\left(\frac{a^3}{4} + \frac{\beta}{3}(R^3 - a^3)\right)\hat{a}_R$$

$\boxed{R>2a}$

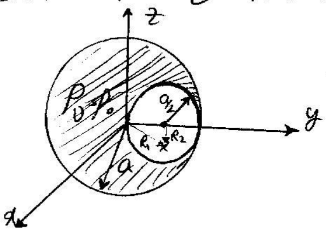
$$\int E\cdot ds = \int_V \frac{\rho}{\varepsilon}dv \Rightarrow E(4\pi R^2) = 4\pi\left(\int_0^a \rho_0\frac{R^3}{a}dR + \int_a^{2a}\beta\rho_0 R^2 dR\right) \Rightarrow E = \frac{\rho_0 a^3}{R^2}\left(\frac{1}{4} + \frac{7\beta}{3}\right)\hat{a}_R$$

ب)

$$\psi = \int E\cdot ds = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{\rho_0}{\varepsilon_0 R^2}\left(\frac{a^3}{4} + \frac{\beta}{3}(R^3 - a^3)\right)\hat{a}_R\cdot\left(R^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, \hat{a}_R\right)\Big|_{R=2a/3}$$

$$\Rightarrow \psi = \frac{\pi\rho_0 a^3}{2\varepsilon_0}\left(1 + \frac{19}{6}\beta\right)$$

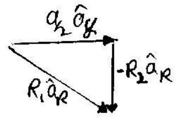
۶. میدان ناشی از توزیع با $\rho_v = \rho_0$ را در داخل حفره کروی به شعاع $\frac{a}{2}$ درون کره‌ای به شعاع a مطابق شکل بیابید.



حل: ابتدا فرض می‌کنیم که یک کره کامل با چگالی $\rho_v = \rho_0$ و شعاع a داریم.

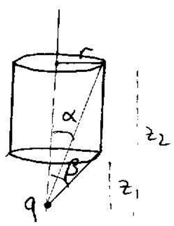
$$\Rightarrow E_{\text{داخل کره}} = \frac{\rho_0 R_1}{3\varepsilon_0}\hat{a}_R$$

سپس فرض می‌کنیم که یک کره کامل با چگالی $\rho_v = -\rho_0$ و شعاع $\frac{a}{2}$ داریم.



$$\Rightarrow E_{\text{داخل کره کوچک}} = \frac{-\rho_0 R_2}{3\varepsilon}\hat{a}_R$$

$$\Rightarrow E\Big|_{\text{داخل حفره}} = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\left[R_1\hat{a}_R - \vec{R}_2\hat{a}_R\right] = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\frac{a}{2}\hat{a}_y = \frac{\rho_0 a}{6\varepsilon_0}\hat{a}_y$$



۷. در شکل روبرو شار عبوری از سطح جانبی استوانه را بیابید؟

حل: شار عبوری از سطح جانبی برابر تفاضل شار عبوری سطح پایینی و سطح بالایی است

$$\Rightarrow \varphi = \frac{q}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z_1}{\sqrt{z_1^2 + r^2}} - 1 + \frac{z_2}{\sqrt{z_2^2 + r^2}}\right)$$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{q}{2\varepsilon}\left(\frac{z_2}{\sqrt{z_2^2 + r^2}} - \frac{z_1}{\sqrt{z_1^2 + r^2}}\right) = \frac{q}{2\varepsilon}(\cos\alpha - \cos\beta)$$