

تمرین سیزدهم (۱۵) الکتروستاتیک

پتانسیل الکتریکی

۱. کدام یک از میدان‌های زیر الکترواستاتیک (پایه) است. برای آن میدان پتانسیل الکتریکی را تعیین کنید:

$$\vec{E} = K[y^2\hat{a}_x + (2xy + z^2)\hat{a}_y + 2yz\hat{a}_z]$$

$$\vec{E} = K[(xy)\hat{a}_x + (2yz)\hat{a}_y + 3zx\hat{a}_z]$$

حل: میدان‌های الکترواستاتیک (پایه) دارای کران برابر صفر باشند

$$\nabla \times \vec{E} = K \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & 2yz & 3zx \end{vmatrix} = K[-2y\hat{a}_x - 3z\hat{a}_y - x\hat{a}_z] \quad (\text{الف})$$

$$\nabla \times \vec{E} = K \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & 2xy + z^2 & 2yz \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{پایه است} \quad (\text{ب})$$

$$E = -\nabla V \Rightarrow E = -\frac{\partial V}{\partial x}\hat{a}_x - \frac{\partial V}{\partial y}\hat{a}_y - \frac{\partial V}{\partial z}\hat{a}_z$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -Ky^2 \Rightarrow V = -y^2x + f(y, z) \quad (1)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial V}{\partial y} = -K(2xy + z^2) \quad (2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -K(2yz) \quad (3)$$

$$(1) \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial y} = -2Kyx + \frac{\partial f}{\partial y} \Rightarrow -K(2xy + z^2) = -2Kyx + \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = -Kz^2$$

$$\Rightarrow V = (-y^2x - z^2y)K + g(z)$$

$$(\text{ب}) \quad \frac{\partial V}{\partial z} = -2Kyz + \frac{\partial g(z)}{\partial z} \Rightarrow -2Kyz + \frac{\partial g(z)}{\partial z} = -2Kyz$$

$$\Rightarrow g(z) = K'z$$

$$\Rightarrow V = -K(y^2x + z^2y) + K'z$$

۲. در فضای آزاد پتانسیل $v = v_0 \sin \alpha x \sin \beta y e^{-\gamma z}$ را در نظر بگیرید.

میدان الکتریکی و چگالی بار الکتریکی موجود در این فضای را بیابید.

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\frac{\partial V}{\partial x} \hat{a}_x - \frac{\partial V}{\partial y} \hat{a}_y - \frac{\partial V}{\partial z} \hat{a}_z \quad \text{حل:}$$

$$= -\alpha v_0 \sin \alpha x \sin \beta y e^{-\gamma z} \hat{a}_x - \beta v_0 \sin \alpha x \cos \beta y e^{-\gamma z} \hat{a}_y + \gamma v_0 \sin \alpha x \sin \beta y e^{-\gamma z} \hat{a}_z$$

$$\rho = \epsilon \nabla \cdot \vec{E}$$

$$= \epsilon \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right)$$

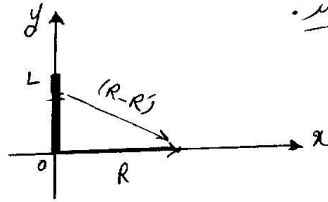
$$= -\epsilon v_0 e^{-\gamma z} (-\alpha^2 \sin \alpha x \sin \beta y - \beta^2 \sin \alpha x \sin \beta y + \gamma^2 \sin \alpha x \sin \beta y)$$

$$= -\epsilon v_0 e^{-\gamma z} \{(-\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2) \sin \alpha x \sin \beta y\}$$

$$= -\epsilon_0 v_0 e^{-\gamma z} (-2j\alpha\beta) \sin \alpha x \sin \beta y = 2\epsilon_0 v_0 j\alpha\beta e^{-\gamma z} \sin \alpha x \sin \beta y$$

$$\Rightarrow \rho = 0$$

۳. روی محور y در طول $0 \leq y \leq L$ بار الکتریکی خطی به چگالی $\rho_L = \rho_0 \frac{y}{a}$ قرار دارد. پتانسیل حاصل از این بار در یک نقطه روی محور x را با استفاده از ادغام پیدا کنید.



$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_L}{|\vec{R} - \vec{R}'|} dl$$

$$R = x\hat{a}_x \quad , \quad R' = y'\hat{a}_y$$

$$\Rightarrow V = \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0 a} \int \frac{y' dy'}{(x^2 + y'^2)^{3/2}} = \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0 a} (x^2 + y'^2)^{1/2} \Big|_0^L$$

$$= \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0 a} \{ \sqrt{x^2 + L^2} - |x| \}$$

۴. پتانسیل نقاط $A(2, 0, 0)$ و $B(\frac{1}{2}, 0, 0)$ به ترتیب $V_A = 15^V$ و $V_B = 3^V$ می باشد. مطلوب است پتانسیل نقطه $C(0, 0, 0)$ در $VC = 7.48$ زیر:

(الف) میدان فاش از بار Q در میدان
(ب) میدان فاش از بار خطی به چگالی ρ_L در محور x .

$$V_{AB} = V_A - V_B = - \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{1/2}^2 \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} dR \quad (\text{الف: الف})$$

$$\Rightarrow V_{AB} = -15 = \frac{-Q \times 15}{4\pi\epsilon_0} \Rightarrow Q = 40\pi\epsilon_0$$

$$\Rightarrow V_{AC} = V_A - V_C = - \int_1^2 \frac{40\pi\epsilon_0}{4\pi\epsilon_0 R^2} dR \Rightarrow V_{AC} = -5 \Rightarrow V_C = V_A + 5 = 20$$

$$V_{AB} = V_A - V_B = - \int_{1/2}^2 \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 r} dr = \frac{-1.39}{2\pi\epsilon_0} \rho_L$$

$$\Rightarrow -15 = \frac{-1.39}{2\pi\epsilon_0} \rho_L \Rightarrow \rho_L = 21.58 \epsilon_0 \pi$$

$$\Rightarrow V_{AC} = V_A - V_C = - \int_1^2 \frac{21.58 \epsilon_0 \pi}{2\pi\epsilon_0 r} dr \Rightarrow V_{AC} = -7.48$$

$$\Rightarrow V_C = V_A + 7.48 = 22.48$$

۵. توزیع بار متقابل را در نظر بگیرید.

$$\rho_1 = \rho_s \delta(z)$$

$$\rho_2 = \rho_s \delta(x) \delta(z-2d)$$

$$\rho_3 = +q \delta(x) \delta(y) \delta(z-d)$$

اشاره پتانسیل را برای نقطه $(0,0,d)$ و $(d,0,d)$ بدست آورید.

حل: واضح است که توزیع ρ_1 صفحه $z=0$ با چگالی بار سطحی ρ_s بوده و اشاره پتانسیل ناشی از آن برای

$$\Delta V = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} (r_1 - r_2) \quad \text{۲ نقطه فاصله } r_1 \text{ و } r_2 \text{ از صفحه برابر است.}$$

توزیع ρ_2 خط $z=2d$ در صفحه $x=0$ با چگالی بار خطی ρ_s می باشد که اشاره پتانسیل ناشی از آن برای ۲ نقطه فاصله r_1 و r_2 (در فضا استوایی) از خط برابر است:

$$\Delta V_2 = \frac{-\rho_s}{2\pi\epsilon_0} \left(\ln \frac{r_1}{r_2} \right)$$

همچنین توزیع ρ_3 بار نقطه‌ای واقع در $(0,0,d)$ با مقدار $+q$ است که اشاره پتانسیل ناشی از آن برای ۲ نقطه فاصله r_1 و r_2 (در فضا استوایی) از منبع نقطه‌ای برابر است:

$$\Delta V_3 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$$\Rightarrow \Delta V_1 = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} (d-d) = 0$$

$$\Delta V_2 = \frac{-\rho_s}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{d}{\sqrt{2}d} \right) = \frac{\rho_s \ln \sqrt{2}}{2\pi\epsilon_0} \quad \text{و} \quad \Delta V_3 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3 = \frac{\rho_s \ln \sqrt{2}}{2\pi\epsilon_0}$$

۴. پتانسیل ناشی از کره ای به شعاع R که دارای چگالی بار الکتریکی سطحی ρ_s می باشد در داخل و خارج کره محاسب کنید (بدون استفاده از قانون گاوس)

حل:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_s ds}{|\vec{R} - \vec{R}'|}$$

$$\vec{R} = z \hat{a}_z, \quad \vec{R}' = R \hat{a}_R, \quad ds = R^2 \sin\theta d\theta d\phi$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\rho_s R^2 \sin\theta d\theta d\phi}{(R^2 + z^2 - 2Rz \cos\theta)}$$

$$V = \frac{2\pi R^2 \rho_s}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \frac{\sin\theta d\theta}{(R^2 + z^2 - 2Rz \cos\theta)^{1/2}}$$

$$= \frac{R^2 \rho_s}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{Rz} (R^2 + z^2 - 2Rz \cos\theta) \right) \Big|_0^\pi$$

$$= \frac{R^2 \rho_s}{2\epsilon_0} \times \frac{1}{Rz} (\sqrt{(R+z)^2} - \sqrt{(R-z)^2})$$

$$\sqrt{(R-z)^2} = R-z \quad \text{و} \quad \sqrt{(R+z)^2} = z-R \quad \text{برای } z < R \text{ صحیح است}$$

$$\Rightarrow V = \frac{R \rho_s}{2\epsilon_0 z} [(R+z) - (z-R)] \Rightarrow \text{برای } z < R: V = \frac{R^2 \rho_s}{\epsilon_0 z}$$

$$\Rightarrow V = \frac{R \rho_s}{2\epsilon_0 z} [(R+z) - (R-z)] \Rightarrow \text{برای } z > R: V = \frac{R \rho_s}{\epsilon_0}$$

۷. رشته سطحی هم پتانسیل توسط $y^2 = xy + c$ بیان می شود و $E_z = 0$ است. دیتا در نقطه $p(2, 5, 0)$ مقدار $E_x = 20 \text{ V/m}$ باشد شدت میدان الکتریکی را بدست آورید.

$$V = f(x, y, z) = y^2 - xy - c$$

حل:

$$\vec{E} = -K \nabla V = y \hat{a}_x + (x - 2y) \hat{a}_y$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -K(y \hat{a}_x + (x - 2y) \hat{a}_y)$$

$$\Rightarrow \text{نقطه } (2, 5, 0) \text{ را حساب می کنیم.} \quad E_x = 20$$

$$\Rightarrow -K \cdot 5 = 20 \Rightarrow K = -4$$

$$\Rightarrow \vec{E} = 4y \hat{a}_x + 4(x - 2y) \hat{a}_y$$

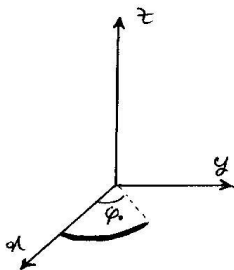
۸. مربع به ضلع a دارای بار سطحی به چگالی ρ_s می باشد. پتانسیل را در مرکز مربع بدست آورید.

حل: مربع را به ۸ مثلث قائم الزامی متساوی الساقین در طول هر ضلع آن $b = \frac{a}{2}$ است تقسیم می کنیم. پتانسیل یک مثلث را حساب کرده و در ۸ ضرب می کنیم.

$$V_1 = \int_0^b \int_0^b \frac{\rho_s dx dy}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + y^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{b}{\cos\phi}} \frac{\rho_s R dR d\phi}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\rho_s b}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\phi}{\cos\phi}$$

$$= \frac{\rho_s b}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{1 + \tan\frac{\pi}{8}}{1 - \tan\frac{\pi}{8}} \Rightarrow V_{total} = 8V_1 = \frac{\rho_s a}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{1 + \tan\frac{\pi}{8}}{1 - \tan\frac{\pi}{8}}$$

۹. بار الکتریکی زیر پتانسیل را در نقطه ای روی محور z بدست آورید.



$$V(R) = \int \frac{\rho_e(r') d\ell'}{4\pi\epsilon_0 |R - R'|}$$

$$\begin{cases} R = z\hat{a}_z \\ R' = r\hat{a}_r \end{cases} \quad \begin{cases} \rho_e(r') = \rho_e \\ \vec{R} - \vec{R}' = -r\hat{a}_r + z\hat{a}_z \\ |\vec{R} - \vec{R}'| = \sqrt{r^2 + z^2} \end{cases} \quad \begin{cases} d\ell' = r d\phi \end{cases}$$

$$\Rightarrow V(z) = \int_0^{\phi_0} \frac{\rho_e r d\phi}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{r^2 + z^2}} = \frac{\rho_e r}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{r^2 + z^2}} \int_0^{\phi_0} d\phi = \frac{\rho_e r \phi_0}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{r^2 + z^2}}$$

۱۰. بررسی کنید که اسکالر میدان ϕ زیر شرایط یک میدان الکتریکی ساکن را دارا می باشد.

$$\vec{A} = \frac{1}{r} \hat{a}_\phi \quad (\text{منصف = استوانه ای}) \quad \vec{B} = (3 + \frac{z}{r}) \sin\theta \hat{a}_r - (3 - \frac{1}{r}) \sin\theta \hat{a}_\theta$$

حل: برای اینکه یک میدان برداری بتواند یک میدان الکتریکی باشد باید گرن آن برابر صفر باشد (حالت ساکن)

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \right] \hat{a}_z = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r \frac{1}{r}) \right] \hat{a}_z = 0 \Rightarrow \nabla \times \vec{A} = 0 \quad \checkmark$$

$$\nabla \times \vec{B} = 0 \quad \checkmark$$

هر دو میدان می توانند بر رها از میدان الکتریکی باشند.