بسمه تعالی

سوالات حل تمرین

الکترومغناطیس

دکتر موسوی

پاییز ۹۱

گردآوری:

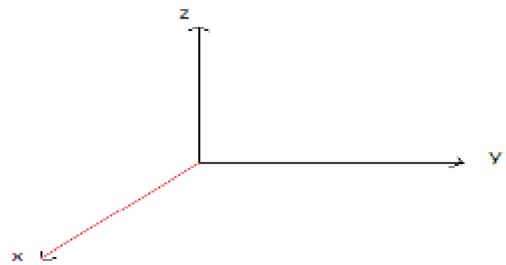
عمادی فر - الدرمی

۳-حاصل هریک از عبارات زیر را محاسبه کنید:

A) $\hat{r}_c \times \hat{x} = (\hat{x}\cos\phi + \hat{y}\sin\phi) \times \hat{x} = 0 + (-\hat{z})\sin\phi$

B) $\hat{\theta} \times \hat{z} = (\hat{r}_c \cos\varphi - \hat{z}\sin\theta) \times \hat{z} = -\hat{\phi}\cos\theta$

۴- بار الکتریکی به صورت خطی روی محور x دستگاه مختصات با چگالی بار $\rho_L = \rho_0\, e^{-ax}$ قرار دارد مطلوب است محاسبه کل بار؟



$\rho_L = \rho_0\, e^{-ax}$

$$d\ell = dx$$

$dQ = \int_0^{\infty} \rho_\ell d\ell$

$= \int_0^{\infty} e^{-ax} \rho_0\, dx$

$= \rho_0 (0 - (-\frac{1}{a})) = \frac{\boldsymbol{\rho_0}}{\boldsymbol{a}}$

۵-بار الکتریکی سطحی روی سطح کره ای با چگالی بار $\rho_0 = \rho \cos^{2\theta}$قرار داردمطلوب است محاسبه کل بار سیستم

$$dQ = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \rho \cos^{2\theta} r_s^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$
$$= \rho_0 (2\pi) \int_0^{\pi} \cos^{2\theta} \sin\theta \, d\theta$$
$$= \rho_0 (2\pi) \left(-\frac{\cos^{3\theta}}{3}\right) \Big|_0^{\pi}$$
$$= \boldsymbol{r_s^2 \frac{4\pi}{3} \rho_0}$$

۶-بار الکتریکی حجمی به چگالی زیر را به دست اورید.

$$\mathrm{P}(r)=\begin{cases} kR & 0\langle r_s \langle a \\ 0 & a\langle r_s \langle \infty \end{cases}$$

$$Q=\int \rho_v dv \;\Rightarrow\; Q=\iiint kRr_s^2 \sin\theta dr_s d\varphi d\theta = \mathrm{kR}\,1/3 r_s^3 \,|_0^a \iint \sin\theta d\theta d\varphi = \mathrm{kR} \quad {}^1\!/_3\, a^3 (-\cos\theta)|_0^\pi$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= {}^2\!/_3\, kRa^3\, 2\pi = {}^4\!/_3\, \pi kRa^3$$

۸-بار الکتریکی روی محور Zها در فاصله ی $-a<z<a$ توزیع شده است . مطلوبست محاسبه ی شدت میدان الکتریکی در نقطه ایی روی صفحه xy و به فاصله Rc از خط باردار .

$$(\mathrm{I})\overline{E} = \hat{r}_c \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 R_c}\left[\frac{\cos\alpha + \cos\beta}{2}\right] + \hat{z}\frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{OA} - \frac{1}{OB}\right)$$

$$(II)\hat{z}\frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{OA} - \frac{1}{OB}\right)$$

$$(III)\hat{r}_c \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 R_c}\cos\alpha$$

$$(IV)\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + R_c^2}}$$

$$(V)\overline{E} = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 R_c}\frac{a}{\sqrt{R_c^2 + a^2}}$$

رابطه (I) فرم کلی است .

رابطه (II) زمانی که نقطه O بالای خط باشد

رابطه (III) نقطه O روی عمود منصف باشد . (حالتی که در این پرسش هست . چون از a تا $-a$ است)

رابطه (IV) برای زاویه ایی است که زاویه بین محور z و خط واصل نقاط (0,0,a) با نقطه دلخواه روی محور x

رابطه (V) پاسخ پرسش .

۱۰- درچه شرایطی جهت سهولت بیشتر می توان برای محاسبه میدان به جای استفاده از رابطه $\overline{E} = \int \frac{dQ}{4\pi\varepsilon R^2}\widehat{a_R}$

از قانون گوس $\oint \overline{E}.\overline{dS} = \frac{Q_{in}}{\varepsilon}$ استفاده نمود؟

الف) توزیع بار به صورت نامحدود باشد(خط بار بی نهایت ، صفحه بار).

ب) بتوان سطحی یافت که E بر روی آن ثابت یا مماس باشد.

۱۱ - شدت میدان در اطراف یک خط بار نامحدود با چگالی یکنواخت ρ_l را محاسبه نمایید.

$$\oint \bar{E}.ds = \frac{q_{en}}{\varepsilon}$$

$$\int_{\text{سطح جانبی}} \bar{E}.ds + \int_{\text{سطح بالا}} \bar{E}\,.ds + \int_{\text{سطح پایین}} \bar{E}\,.ds = \frac{q_{en}}{\varepsilon}$$

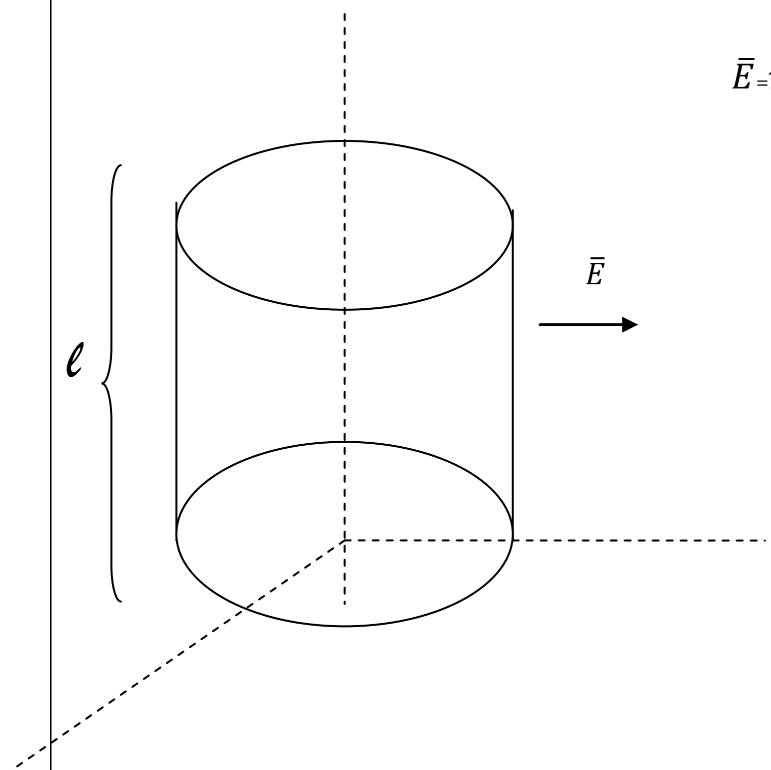
$$\int_{\text{سطح جانبی}} \bar{E}.ds + 0 + 0 = \frac{q_{en}}{\varepsilon}$$

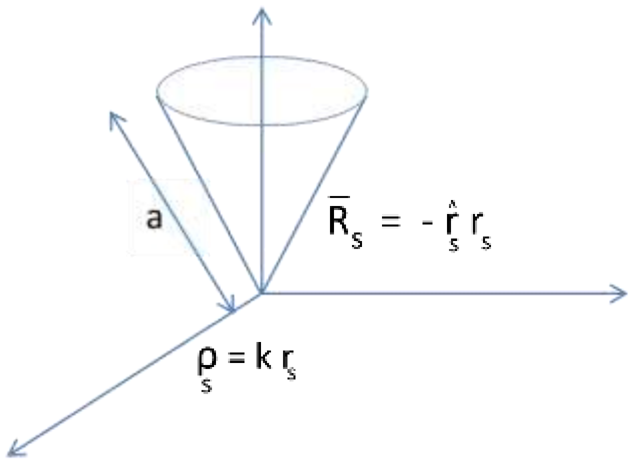
$$\int \bar{E}.ds = \frac{\rho_l dl}{\varepsilon}$$

$$\bar{E}(\oint ds)=\frac{\rho_l dl}{\varepsilon}$$

$$\bar{E}.\oint r_c\, d\varphi dz=\frac{\rho_l dl}{\varepsilon}$$

$$\bar{E}=\widehat{r_c}\,\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon r_c}$$





۱۳- بر روی سطح جانبی
مخروط زیر بار با چگالی سطحی $\rho_s = k r_s$
توزیع شده است ، مطلوبست
محاسبه شدت میدان الکتریکی در مبدا مختصات؟

حل:

$$\bar{E} = \int \frac{d\phi \bar{R}}{4\pi\varepsilon R^3}$$

$$\bar{R} = -r_s \hat{r}_s$$

$$dq = K r_s r_s \sin\theta \; d\phi \, dr_s$$

$$\bar{E} = \int \frac{K r_s r_s \sin\theta \; d\phi \, dr_s \hat{r}_s}{4\pi\varepsilon r_s^3}$$

$$\hat{r}_s = \hat{X} \sin\Theta \cos\Theta + \hat{Y} \sin\Theta \sin\phi + \hat{Z} \cos\Theta$$

$$\bar{E} = \frac{-K \sin\Theta}{4\pi\varepsilon} \int d\phi \, dr_s \hat{r}_s$$

$$\bar{E} = \frac{-K \sin\Theta \cos\Theta \, 2\pi a}{4\pi\varepsilon} \hat{Z}$$

$$\bar{E} = \frac{-a K \sin\Theta \cos\Theta}{2\varepsilon} \hat{Z}$$

۱۴- مطلوب است محاسبه ی شدت میدان الکتریکی در داخل وخارج کره ای با چگالی حجمی ρ و شعاع a .

$\oint D.d_s = q_{e\pi}$

$\overline{D} = \hat{r_s}\, D$

$\overline{ds} = \hat{r_s}\, d_s$

$D = \varepsilon_o E$

$ds = r_s^2 \sin\theta d\theta d\emptyset$

$q = \oint (\hat{r_s}\overline{D}).(\hat{r_s} ds) = \oint \mathrm{Dds} = \varepsilon_o \mathrm{E} \sin\theta r s^2\, d\theta d\emptyset$

$q = \varepsilon_o \mathrm{E}\, rs^2 \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta d\emptyset =$

$$\varepsilon_o \mathrm{E}\, r_s^2 (2\pi)(2) = \int \rho_v\, dr = \rho_v \frac{4}{3}\pi r_s^3$$

باردار کره داخل $\overline{E} = \hat{r_s}\, \frac{\rho_{v\, r_s}}{340}$

باردار کره خارج $\overline{E} = \hat{r_s}\, \frac{\rho_v\, a^3}{340}\, \frac{1}{r_s^2}$

۱۵-بار الکتریکی با تابع چگالی مقابل مفروض است. مطلوبست محاسبهٔ شدت میدان الکتریکی در $\boldsymbol{r_s = \frac{a}{2}}$.

$$\boldsymbol{\rho} \begin{cases} \boldsymbol{\rho_0\left(1-\frac{r_s^2}{a^2}\right)} & \boldsymbol{, r_s \le a} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{, r_s} > a \end{cases}$$

<u>حل:</u>

$$\nabla.D = \frac{1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2h_3Du_1) + \frac{1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_2}(h_1h_3du_2)\frac{1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}(h_1h_2Du_3)$$

می دانیم :

$$dl = r_sdr_s + \theta\, r_sd\theta + \varphi\, r_s sin\theta\, d\varphi$$

$$\nabla.E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{1}{r_s^2}\frac{\partial}{\partial r_s}\left(r_s^2 E_{r_s}\right) = \frac{\rho_0\left(1-\frac{r_s^2}{a^2}\right)}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{\partial}{\partial r_s}\frac{\partial}{\partial r_s}\left(r_s^2 E_{r_s}\right) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(r_s^2 - \frac{r_s^4}{a^2}\right)$$

پس از انتگرال گیری داریم :

$$\left[r_s^2 E_{r_s}\right] = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{r_s^3}{3} - \frac{r_s^5}{5a^2}\right) \longrightarrow$$

$$E_{rs} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{r_s}{3} - \frac{r_s^3}{5a^2}\right)\Bigg|_{r_s = \frac{a}{2}} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{a}{6} - \frac{a}{40}\right) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\,\frac{17a}{120}$$

۱۶ – مطلوب است محاسبه خطوط میدان الکتریکی $\bar{E} = \hat{x}\,۱۰\ xy + 5\,\hat{y}\ x^2$ در صفحه ی xy .

حل:

$$\frac{Ex}{dx} = \frac{Ey}{dy} = \frac{Ez}{dz}$$

$$\int \frac{5x^2\,dx}{10x} = \int ydy$$

$$\frac{10xy}{dx} = \frac{5x^2}{dy}$$

$$\frac{Ex}{dx} = \frac{Ey}{dy}$$

جواب اخر: $y^2 = \frac{1}{2}\,x^2 + c$

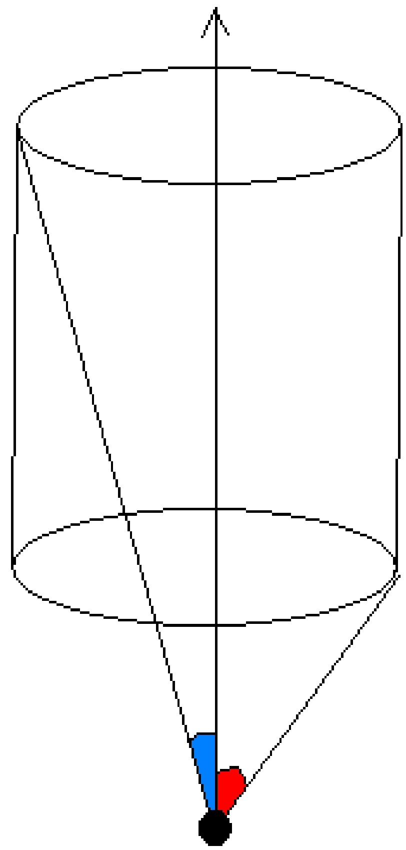
۱۷-بار الکتریکی در پایین استوانه ای به شعاع معلوم قرار دارد مطلوبست شار الکتریکی گذرنده از سطح جانبی.

زاویه آبی رنگ را آلفا و زاویه قرمز رنگ را بتا می نامیم.
شار گذرنده از سطح جانبی برابر تفاضل شار گذرنده از سطح پایینی و بالاییست.
بدین ترتیب خواهیم داشت:

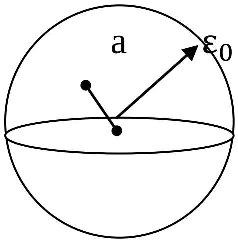
$$\psi = \oint \overline{D}.\overline{ds}$$
$$\overline{D} = \varepsilon_0 \overline{E}$$
$$\overline{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2}\hat{a}_R, R = r_s$$
$$\overline{ds} = \hat{z}\, r_c dr_c d\phi$$
$$\psi = \int (\frac{1}{4\pi}\frac{q}{{r_s}^2}\hat{r}_s)(\hat{z}\, r_c dr_c d\phi)$$

$$\hat{r}_s = \hat{r}_c \sin\theta + \hat{z}\cos\theta$$
$$\hat{\theta} = \hat{r}_c \cos\theta - \hat{z}\sin\theta$$

$$\Rightarrow \psi = \oint [\frac{1}{4\pi}\frac{q}{{r_s}^2}(\hat{r}_c \sin\theta + \hat{z}\cos\theta)](\hat{z}\, r_c dr_c d\phi)$$
$$= \oint \frac{1}{4\pi}\frac{q}{{r_s}^2} r_c dr_c d\phi$$
$$\cos\theta = \frac{h}{r_s}$$
$$= \frac{qh}{4\pi}\int \frac{r_c dr_c d\phi}{r_s^3}$$
$$= \frac{qh}{2}\int \frac{r_c dr_c}{(r_c^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$= \frac{qh}{2}\frac{-1}{\sqrt{r_c^2 + h^2}}\Bigg]_0^a = \frac{qh}{2}[\frac{1}{h} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + h^2}}]$$
$$= \frac{q}{2}[1 - \cos\theta]$$
$$\psi_s = \psi_{in} + \psi_{out}$$
$$\psi_{in} = \frac{q}{2}[1 - \cos\alpha]$$
$$\psi_{in} = \frac{q}{2}[1 - \cos\beta]$$
$$\Rightarrow \psi_s = \frac{q}{2}[\cos\beta - \cos\beta]$$
$Q.E.D$



۱۹ – چگالی بار یکنواخت ρ در حجم کره ای عایق کامل به ضریب گذردهی ε موجود است . مطلوب است محاسبه ی پتانسیل در داخل این کره عایق .



$$\oint \bar{E} \bullet = d\bar{s} \ \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$$

$$\bar{E} \bullet \ (\ \oint r_s^2 \sin\theta \ d\theta \ \ d\ \varphi \ ) = \frac{\rho(\frac{4}{3}\pi r_s^3)}{\varepsilon_0}$$

$$\bar{E}(4\pi r_s^2) = \frac{\rho(\frac{4}{3}\pi r_s^3)}{\varepsilon_0}$$

$$(\text{ I }) \quad r_s \le a \quad : \ \bar{E}_{\text{in}} = \ \hat{r}_{\text{s}} \frac{\rho a}{3\varepsilon_0}$$

$$(\text{ II }) \quad r_s > a \quad : \ \bar{E}_{\text{out}} = \hat{r}_{\text{s}} \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 r_s^2}$$

$$\text{V} = -\int_\infty^a \bar{E} \bullet d\bar{\ell}$$

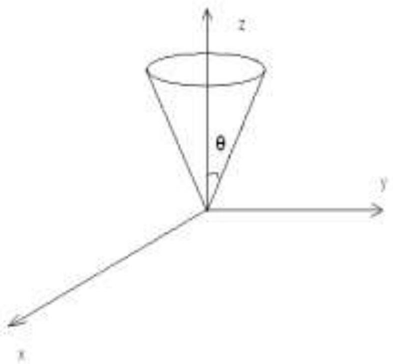
$$\text{V}_{\text{in}} = -\int_a^{R_0} \bar{E}_{\text{in}} \bullet d\bar{\ell}$$

$$= -\int_a^{R_0} \frac{\rho r_s}{3\varepsilon} \ \hat{r}_{\text{s}} \bullet \hat{r}_{\text{s}} \ d\text{r}_{\text{s}}$$

$$= -\left(\frac{\rho}{3\varepsilon}\left(\frac{r_s^2}{2}\right)\right)\Big|_a^{R_0}$$

$$\Longrightarrow \quad \text{V}_{\text{in}} = -\frac{\rho}{3\varepsilon}\left(\frac{a^2 - {R_0}^2}{2}\right)$$

۲۰- بر سطح مخروط زیر توزیع شده است مطلوبست محاسبه پتانسیل بر مبدا مختصات ρ_s بار الکتریکی
یکنواختی سطحی با چگالی



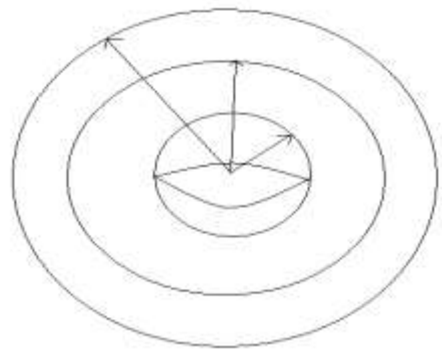
سطح جانبی ρ_s

$$\overline{ds}=\hat{\theta}\, r_s \sin\theta\, dr_s d\varphi \qquad dQ=\rho_s \overline{ds}$$

$$V=\int \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_{0|R|}} \qquad v=\int \frac{\rho_s r_s \sin\theta\, dr_s d\varphi}{4\pi\varepsilon_0 r_s}$$

$$v=\int \frac{\rho_s \sin\theta\, dr_s d\varphi}{4\pi\varepsilon_0} = \frac{\rho_s \sin\theta}{2\varepsilon_0}\int_0^a dr_s=\frac{a\rho_s \sin\theta}{2\varepsilon_0}$$

۲۱ – یک کره هادی به شعاع R به پتانسیل v_0 وصل شده است . این کره را از منبع جدا کرده وسپس توسط پوسته ی کروی
رسانا به شعاع داخلی R_1' و شعاع خارجی R_2' می پوشانیم . مطلوب است محاسبه ی پتانسیل کره ی داخلی برحسب v_0 .
$(R_2' > R_1' > R)$



$$v_0 = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 R} \qquad Q_0 = v_0(4\pi\varepsilon_0 R)$$

$$V = -\int_{\infty}^{R} \bar{E}\cdot\bar{d}l$$

$$V = -\int_{\infty}^{R_2'} \bar{E}\cdot\bar{d}l - \int_{R_2'}^{R_1'} \bar{E}\cdot\bar{d}l - \int_{R_1'}^{R} \bar{E}\cdot\bar{d}l$$

میدان در داخل یا خارج پوسته رسانا با هم برابر است و در پوسته برابر ۰ است

$$\int_{R_2'}^{R_1'} \bar{E}\cdot\bar{d}l = 0$$

$$\bar{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\widehat{a_R} \qquad \widehat{a_R} = \frac{\widehat{r_s} r_s}{|r_s|}$$

$$\bar{E} = \widehat{r_s}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_s^2} \qquad V = -\int_{\infty}^{R_2} \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r_s^2}\widehat{r_s}\cdot\widehat{r_s} dr_s - \int_{R_1'}^{R} \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r_s^2}\widehat{r_s}\cdot\widehat{r_s} dr_s$$

$$= \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 R_2'} + \left(\frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R} - \frac{1}{R_1'}\right]\right) = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_2'} - \frac{1}{R_1'} + \frac{1}{R}\right)$$

$$V = V_0\left(1 - \frac{R}{R_1'} + \frac{R}{R_2'}\right)$$

۲۲ – میدان الکتریکی حاصل از چهار قطبی الکتریکی را محاسبه کنید .

$$V_p = \frac{q}{4\pi\varepsilon R1} + \frac{-2q}{4\pi\varepsilon R} + \frac{q}{4\pi\varepsilon R2}$$

$$V_p = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R1} + \frac{1}{R2} - \frac{2}{R}\right)$$

$$R_1^2 = R^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 - 2\frac{Rd}{2}\cos\theta$$

$$R_2^2 = R^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 + 2\frac{Rd}{2}\cos\theta$$

$$V_p = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\left[R^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{Rd}{2}\cos\theta\right)\right]^{-\frac{1}{2}} + \left[R^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{Rd}{2}\cos\theta\right)\right]^{-\frac{1}{2}} - \frac{2}{R}\right)$$

$$V_p = \frac{q}{4\pi\varepsilon R}\left(\left[1 + \left(\frac{d}{2R}\right)^2 - 2\left(\frac{d}{2R}\cos\theta\right)\right]^{-\frac{1}{2}} + \left[1 + \left(\frac{d}{2R}\right)^2 + 2\left(\frac{d}{2R}\cos\theta\right)\right]^{-\frac{1}{2}} - 2\right)$$

$$V_p = \frac{q}{4\pi\varepsilon R}\left(\left[1 - \frac{1}{2}\left[\frac{d^2}{4R^2} - \frac{d}{R}\cos\theta\right) + \frac{3}{8}\left[\frac{d^2}{4R^2} - \frac{d}{R}\cos\theta\right)\right]^2\right] + \left[1 - \frac{1}{2}\left[\frac{d^2}{4R^2} + \frac{d}{R}\cos\theta\right) + \frac{3}{8}\left[\frac{d^2}{4R^2} + \frac{d}{R}\cos\theta\right)\right]^2\right] - 2\right)$$

$$V_p = \frac{q}{4\pi\varepsilon R}\left(\left[-\frac{d^2}{4R^2} + \frac{6}{8}\left[\frac{d^2}{16R^2} + \frac{d^2\cos^2\theta}{R^2}\right)\right]^2\right]\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon R}\left[-\frac{d^2}{4R^2} + \frac{6}{8}\frac{d^2\cos^2\theta}{R^2}\right]$$

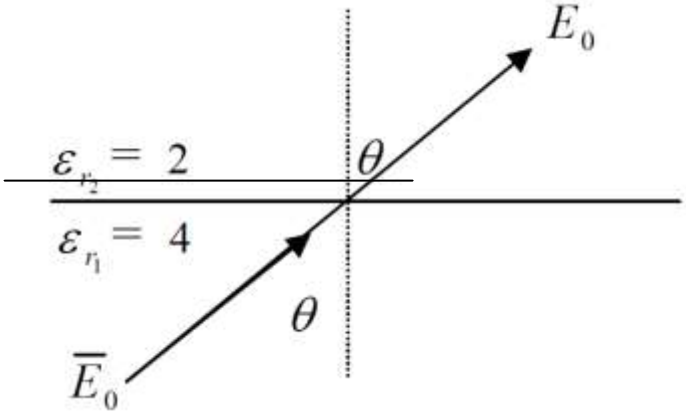
$$V_p = \frac{qd^2}{16\pi\varepsilon R^2}\left[-1 + 3\cos^2\theta\right]$$

$$\bar{E} = -\nabla V = -\left(\hat{r}_s\frac{\partial V}{\partial r_s} + \hat{\theta}\frac{\partial V}{r_s\partial\theta} + \hat{\varphi}\frac{\partial V}{r_s\sin\theta\partial\varphi}\right)$$

$$\bar{E} = -\hat{r}_s\left[-\frac{3qd^2}{16\pi\varepsilon R^4}\left(3\cos^2\theta - 1\right)\right] + \hat{\theta}\left[\frac{3qd^2}{16\pi\varepsilon R^3}\left(\frac{-2\cos\theta\sin\theta}{R}\right)\right]$$

$$\bar{E} = \frac{3qd^2}{16\pi\varepsilon R^4}\left(\hat{r}_s\left(3\cos^2\theta - 1\right) + \hat{\theta}\sin 2\theta\right)$$

۲۳ – مطابق شکل زیر بار سطحی آزاد روی سطح جسم را محاسبه نمایید .



$$\begin{cases} E_{1t} = E_{2t} \\ (\bar{D}_1 - \bar{D}_2) \bullet \hat{a}_{n21} = \rho_s \\ D_{\text{وارد شونده}} + \rho_s = D_{\text{خارج شونده}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_{1t} = E_{2t} \\ D_{1n} = D_{2n} \end{cases}$$

$$\rho_s = 0 \text{ در } \begin{cases} |E_1| \sin\theta_1 = |E_2| \sin\theta_2 \\ \varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_1 |E_1| \cos\theta_1 = \varepsilon_2 |E_2| \cos\theta_2$$

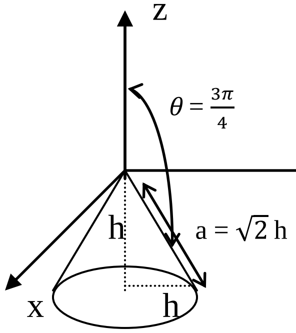
$$\rho_s = D_{\text{خارج شونده}} - D_{\text{وارد شونده}}$$

$$\rho_{sb} = D_{\text{[illegible]}} - D_{\text{[illegible]}}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_2 = 2\varepsilon_0 \\ \varepsilon_1 = 4\varepsilon_0 \end{cases}$$

$$\rho_s = 2\varepsilon_0 |\bar{E}_0| \cos\theta - 4\varepsilon_0 |\bar{E}_0| \cos\theta = -2\varepsilon_0 |\bar{E}_0| \cos\theta$$

۲۴ – یک فضای مخروطی به شکل زیر توسط بردار پلاریزاسیون $\hat{z}\, p_0$ پر شده است . مطلوب است محاسبه ی پتانسیل الکتریکی در مبداء مختصات :



$$\bar{P} = \hat{z}\, p_0$$

$$\rho_{vb} = -\nabla \bullet \bar{P} = 0$$

$$\rho_{sb} = \bar{P} \bullet \hat{a}_n$$

سطح جانبی : $\rho_{sb} = \bar{P} \bullet \hat{a}_n$

$$= p_0\, \hat{z} \bullet (-\hat{\theta})$$

$$= p_0 \sin\theta$$

$$= p_0\, \frac{\sqrt{2}}{2}$$

قاعده پایین : $\rho_{sb} = \bar{P} \bullet \hat{a}_n$

$$= p_0\, \hat{z} \bullet (-\hat{z})$$

$$= -p_0$$

می دانیم : سطح جانبی $V = \frac{\rho_{sb} \sin\theta\, a}{2\varepsilon_0}$

$$V_{\text{جانبی}} = \frac{p_0\, h\, \sqrt{2}}{2\varepsilon_0}$$

قاعده پایین : $V = \int \frac{\rho_{sb}\, ds}{4\pi\varepsilon_0 r_s}$; $ds = r_c\, dr_c d\varphi$

$$= \iint \frac{\rho_{sb}}{4\pi\varepsilon_0} \frac{r_c\, dr_c d\varphi}{r_s}$$

$$= \frac{\rho_{sb}}{2\varepsilon_0} \int_0^h \frac{r_c}{\sqrt{{r_c}^2 + h^2}}\, dr_c$$

$$= \frac{\rho_{sb}}{2\varepsilon_0} \left(\sqrt{{r_c}^2 + h^2}\right)\Big|_0^h$$

$$= \frac{\rho_{sb}}{2\varepsilon_0} (\sqrt{2} - 1) h$$

$$V_{\text{پایین}} = \frac{-p_0}{2\varepsilon_0} (\sqrt{2} - 1) h$$

$$V_{\text{کل}} = V_{\text{جانبی}} + V_{\text{قاعده}}$$

$$V_{\text{کل}} = \frac{p_0\, h}{2\varepsilon_0}$$

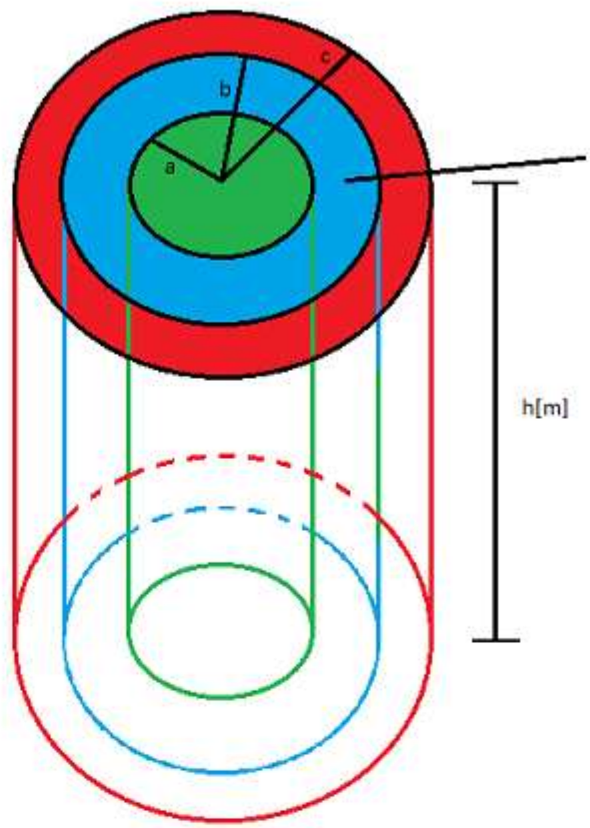
۲۵. مطلوبست محاسبه ظرفیت کابل هم محور

الف. با استفاده از روابط

ب. با استفاده از تعریف

ج. با استفاده از معادلات پواسون و لاپلاس

(پتانسیل هادی به شعاع a برابر V_a و هادی به شعاع b برابر V_b است)



خازن استوانه ای "کابل هم محور"

الف. از روابط محاسبه خازن ها داریم :

$$C = \int_{s} \varepsilon \frac{d\acute{s}}{L_s} \quad , \quad C^{-1} = \int \frac{d\acute{L}}{\varepsilon S_L}$$

در این مورد ظرفیت در طول یک متغیر تغییر میکند پس:

$$C^{-1} = \int \frac{d\acute{L}}{\varepsilon S_L}$$
$$d\acute{L} = d\acute{r}_c \ , S_L = 2\pi h r_c$$

$$C^{-1} = \int_a^b \frac{d\acute{r}_c}{2\pi h \varepsilon \acute{r}_c} = \frac{1}{2\pi h \varepsilon} \int_a^b \frac{d\acute{r}_c}{\acute{r}_c} = \frac{1}{2\pi h \varepsilon} \ln \frac{b}{a}$$
$$C = \frac{2\pi h \varepsilon}{\ln \frac{b}{a}}$$

ب. حل. فرض کنید بارهای q+ و q- به ترتیب روی هادی های خارجی و داخلی خازن استوانه ای (کابل هم محور) قرار دارند.

با به کارگیری قانون گوس در مورد سطح گوسی استوانه ای به شعاع r_c داریم :

$$\varphi = \oint \bar{E} \,.\, d_s = \frac{q}{\varepsilon}$$

$$\overline{ds} = \hat{z}(ds) - \hat{z}(ds) + \widehat{r_c}(ds) \quad , \quad ds\left(\text{جانبی}\right) = r_c d\varphi dz$$
$$\bar{E} \oint \overline{ds} = \frac{q}{\varepsilon} \ \rightarrow \ \bar{E} = \widehat{r_c} \frac{q}{2\pi h \varepsilon} \frac{1}{r_c}$$

$$V_{ab} = V_a - V_b = -\int_b^a \bar{E} \,.\, \overline{dL} \ \ , \ \ \overline{dL} = \widehat{r_c}$$
$$V_{ab} = \frac{q}{2\pi h \varepsilon} \ln \frac{b}{a} \quad , \quad C = \frac{q}{V}$$
$$C = \frac{2\pi h \varepsilon}{\ln \frac{b}{a}}$$

ج. معادله لاپلاس

$$\nabla^2 V = -\frac{1}{\varepsilon} \rho_{vf} \rho_{vf}$$
$$\rho_{vf} = 0 \ \rightarrow \ \nabla^2 V = 0 \ , V_{(r_c)} = \frac{1}{r_c}$$
$$\nabla^2 f = 0 \ \rightarrow \text{استوانه ای} : \frac{1}{r_c} \frac{\partial f \partial r_c}{\partial r_c^2} + \frac{1}{r_c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$
$$\frac{1}{r_c} \frac{\partial f \partial r_c}{\partial r_c^2} = 0 \ \rightarrow \nabla^2 V = \frac{1}{r_c} \frac{\partial}{\partial r_c} \left(\frac{r_c \partial V}{\partial r_c} \right) = 0 \ , (\frac{1}{r_c} \neq 0) \ \rightarrow \frac{d}{dr_c} \left(\frac{r_c dV}{dr_c} \right) = 0$$

$$d\left(\frac{r_c dV}{dr_c}\right) = 0 dr_c \rightarrow \frac{r_c dV}{dr_c} = A\left(\text{ثابت}\right) \rightarrow dV = \frac{A}{r_c} dr_c \rightarrow V = A\ln r_c + B\left(\text{ثابت}\right)$$

شرایط اولیه : $V_{ab} = V_a - V_b \neq 0$

$$V_a = A\ln a + B\ , V_b = A\ln b + B = 0 \rightarrow A = \frac{V_a}{\ln\frac{a}{b}}\ , B = -\frac{V_a}{\ln\frac{a}{b}}\ln b$$

$$V_{r_c} = \frac{V_a}{\ln\frac{a}{b}}(\ln\frac{r_c}{b})$$

$\rho_{sa} = \widehat{n_{sa}}.\overline{D_a}\ ,\ \widehat{n_{sa}} = \widehat{r_c}$

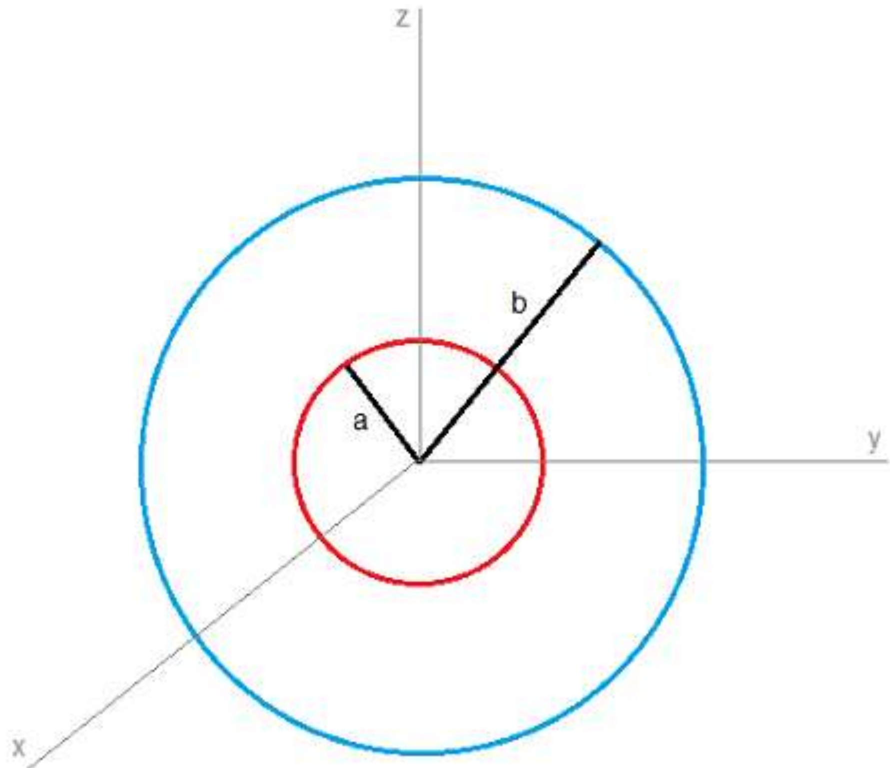
$\rho_{sb=\widehat{n_{sb}}}.\overline{D_b}\ ,\ \widehat{n_{sb}} = -\widehat{r_c}$

$$\bar{E} = -\nabla V_{r_c} = -\widehat{r_c}\frac{dV}{dr_c} \rightarrow \overline{D_{r_c}} = -\widehat{r_c}\varepsilon\frac{dV}{dr_c}$$

$$q_a = \int_{sa} \rho_{sa} ds_a = \rho_{sa} 2\pi a h \quad , \quad q_b = \int_{sb} \rho_{sb} ds_b = \rho_{sb} 2\pi b h$$

$$C = \frac{q}{V} \rightarrow \frac{C}{L} = \frac{q}{h}\frac{1}{V_a}$$

۲۶. مطلوبست محاسبه ظرفیت خازن کروی زیر با استفاده از تعریف و روابط داده شده.



حل. فرض کنید بارهای +Q و −Q به ترتیب روی هادی های خارجی و داخلی خازن کروی قرار دارند.
با به کارگیری قانون گوس در مورد سطح گوسی کروی به شعاع R(a<R<b) داریم :

$$E = a_R E_R = a_R \frac{Q}{4\pi\varepsilon R^2}$$

$$V = -\int_b^a E.(\,a_R dR) = -\int_b^a \frac{Q}{4\pi\varepsilon R^2} dR = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}(\frac{1}{a} - \frac{1}{b})$$

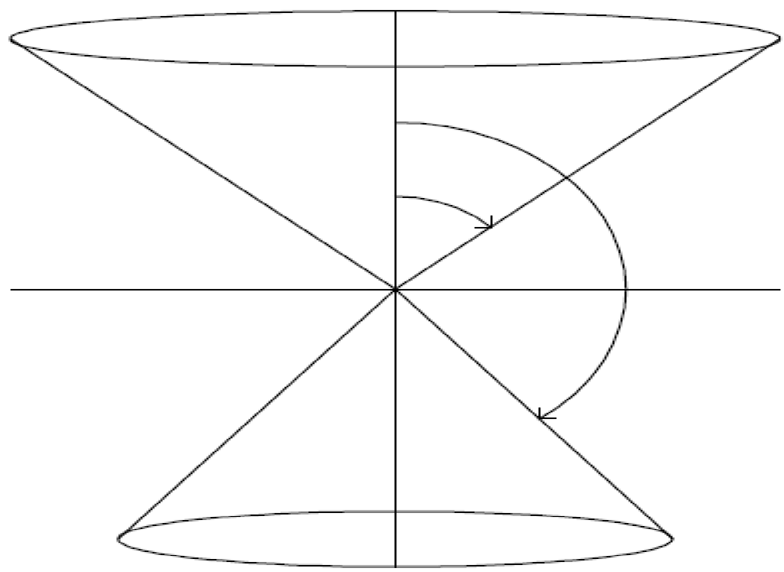
بنابراین در یک خازن کروی :

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{4\pi\varepsilon}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$$

در مورد یک هادی کروی مجزا به شعاع a و $R_o \to \infty$ داریم $C = 4\pi\varepsilon a$.

۲۸-با توجه به شکل زیر پتانسیل و میدان را محاسبه نمایید.

$\theta = \theta_{۱} \;\; ; \;\; V = ۰$



$\rho_v = 0$ $\qquad$ $\theta = \theta_{۲} \;\; ; \;\; V = V_{۰}$

حل :

$$\nabla^2 V = 0 \;\; ; \;\; \nabla^2 V = \frac{1}{r_s^2 sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta \frac{\partial V}{\partial\theta}\right) = \; 0$$

چون یک متغییر داریم ∂ را به d تبدیل می کنیم :

$$\frac{d}{d\theta}\left(sin\theta \frac{dV}{d\theta}\right) = \; 0$$

$$\sin\theta \frac{dV}{d\theta} = A$$

$$\frac{dV}{d\theta} = \frac{A}{sin\theta}$$

پس از انتگرال گیری داریم:

$$V = \int \frac{A}{sin\theta}\ d\theta + B = \int \frac{d\theta}{sin\theta} = \ln(tg(\frac{\theta}{2}))$$

$$V = A\ \ln(tg(\frac{\theta}{2})) + \ B$$

$$\begin{cases} V_1 = A\ \ln\left(tg\left(\frac{\theta_1}{2}\right)\right) + \ B = 0 & \longrightarrow A\ \ln\left(tg\left(\frac{\theta_1}{2}\right)\right) = \ -B \\ V_2 = A\ \ln(tg(\frac{\theta_2}{2})) + \ B & \longrightarrow A = \frac{V_2 + A\ \ln\left(tg\left(\frac{\theta_1}{2}\right)\right)}{A\ \ln\left(tg\left(\frac{\theta_2}{2}\right)\right)} \end{cases}$$

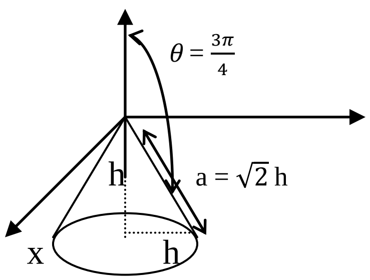
با جایگذاری A,B و در نظر گرفتن شرایط مرزی داریم :

$$V = V_0\ \ln\left(\frac{tg\left(\frac{\theta}{2}\right)}{tg\left(\frac{\theta_1}{2}\right)}\right) / \ln\left(\frac{tg\left(\frac{\theta_2}{2}\right)}{tg\left(\frac{\theta_1}{2}\right)}\right)$$

حال برای محاسبهٔ میدان داریم :

$$E = \ -\frac{\partial V}{r_s \partial\theta} = \ -\theta \frac{V_0}{R_s sin\theta \ln\left(\frac{tg\left(\frac{\theta_2}{2}\right)}{tg\left(\frac{\theta_1}{2}\right)}\right)}$$

۲۹ – یک فضای مخروطی به شعاع قاعده h وارتفاع h مطابق شکل از دوقطبی های الکتریکی با بردار پلاریزاسیون ثابت $p_0\,\hat{z}$ در امتداد محور مخروط پر شده است . پتانسیل الکتریکی در مبداء را بیابید : .



$$\bar{P} = \hat{z}\,p_0$$

$$\rho_{vb} = -\nabla \bullet \bar{P} = 0$$

$$\rho_{sb} = \bar{P} \bullet \hat{a}_n$$

سطح جانبی : $\rho_{sb} = \bar{P} \bullet \hat{a}_n$

$$= p_0\,\hat{z} \bullet (-\hat{\theta})$$

$$= p_0 \sin\theta$$

$$= p_0\,\frac{\sqrt{2}}{2}$$

قاعده پایین : $\rho_{sb} = \bar{P} \bullet \hat{a}_n$

$$= p_0\,\hat{z} \bullet (-\hat{z})$$

$$= -p_0$$

می دانیم : سطح جانبی $V = \frac{\rho_{sb}\,\sin\theta\, a}{2\varepsilon_0}$

$$V_{\text{جانبی}} = \frac{p_0\, h\, \sqrt{2}}{2\varepsilon_0}$$

قاعده پایین : $V = \int \frac{\rho_{sb}\, ds}{4\pi\varepsilon_0 r_s}$; $ds = r_c\, dr_c d\varphi$

$$= \iint \frac{\rho_{sb}}{4\pi\varepsilon_0} \frac{r_c\, dr_c d\varphi}{r_s}$$

$$= \frac{\rho_{sb}}{2\varepsilon_0} \int_0^h \frac{r_c}{\sqrt{{r_c}^2 + h^2}}\, dr_c$$

$$= \frac{\rho_{sb}}{2\varepsilon_0} \left(\sqrt{{r_c}^2 + h^2}\,\right)\Big|_0^h$$

$$= \frac{\rho_{sb}}{2\varepsilon_0} (\sqrt{2} - 1)\text{h}$$

$$V_{\text{پایین}} = \frac{-p_0}{2\varepsilon_0} (\sqrt{2} - 1)\text{h}$$

$$V_{\text{کل}} = V_{\text{جانبی}} + V_{\text{قاعده}}$$

$$V_{\text{کل}} = \frac{p_0\, h}{2\varepsilon_0}$$