

خازن

تمرین سری لیزر هم (ط) الکترودها طمس

۱. ضریب دی الکتریک عایق بین صفحات خازن به طور خطی از ϵ_1 از صفحه $z=0$ تا ϵ_2 در صفحه $z=d$ تغییر کند اگر فاصله صفحات خازن d و مساحت صفحات A باشد.

الف) ثابت کنید که ظرفیت این خازن از رابطه $C = \frac{A(\epsilon_2 - \epsilon_1)}{d \ln \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}$ بدست می آید.

ب) سمت اند را به کمک انرژی ثابت کنید.

ج) چگالی حجم بارهای پلازما را در عایق را بدست آورید.

حل: الف)

تغییر صورت خط $\epsilon(z) = Az + B$

$$\epsilon(0) = \epsilon_1, \quad \epsilon(d) = \epsilon_2 \Rightarrow A = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{d} \quad \text{و} \quad B = \epsilon_1$$

$$\Rightarrow \epsilon(z) = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{d} z + \epsilon_1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{C} = \int \frac{dz}{\epsilon(z)A} = \int_0^d \frac{dz}{\left(\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{d} z + \epsilon_1\right)A} = \frac{d}{A(\epsilon_2 - \epsilon_1)} \ln \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$$

$$\Rightarrow C = \frac{A(\epsilon_2 - \epsilon_1)}{d \ln \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}$$

ب)

$$W = \frac{1}{2} \int_0^d \epsilon E^2 dv = \frac{1}{2} \int_0^d \epsilon \left(\frac{\rho}{\epsilon}\right)^2 A dz = \frac{1}{2} \int_0^d \frac{\rho^2}{\epsilon} A dz$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^d \frac{\rho^2 A dz}{\left(\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{d} z + \epsilon_1\right)} = \frac{A \rho^2}{2} \times \left[\frac{d}{\epsilon_2 - \epsilon_1} \ln \left(\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{d} z + \epsilon_1 \right) \right]_0^d$$

$$= A \left(\frac{Q}{A}\right)^2 \frac{1}{2} \times \left[\frac{d}{\epsilon_2 - \epsilon_1} \ln \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \right] = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{A \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{d \ln \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

$$\Rightarrow C = \frac{A(\epsilon_2 - \epsilon_1)}{d \ln \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}$$

ادامه تمرین

$$\vec{P} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \vec{E} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \frac{\beta \hat{a}_z}{\left(\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{d} z + \epsilon_1 \right)} = \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_1) \beta}{\epsilon} \hat{a}_z$$

$$\Rightarrow \rho_b = -\nabla \cdot \vec{P} = -\beta_s \frac{\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{d} \epsilon_0}{\left(\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{d} z + \epsilon_1 \right)^2}$$

۲. فربش در الکتریک بین ۲ صفحه خازن کرد صفحات $z=0$ و $z=d$ و اگر فربش اندر بین $\epsilon = \epsilon_0 e^z$ تغییر کند ظرفیت خازن بر واحد سطح را از ۳ طریق بدست آورید؟

حل: ابتدا از طریق قانون گاوس: $\nabla \cdot D = 0 \Rightarrow D = K = \text{ثابت}$

چون فقط D یک مولفه در جهت z دارد

$\Rightarrow \nabla \cdot D = 0 \Rightarrow D = K = \text{ثابت}$ بر

$$\Rightarrow E = \frac{\vec{D}}{\epsilon} = \frac{K}{\epsilon_0 e^z} \hat{a}_z = \frac{K}{\epsilon_0 e^z} \hat{a}_z = \frac{K}{\epsilon_0} e^{-z} \hat{a}_z$$

$$\rho_s = \vec{D} \cdot \hat{a}_n$$

$$\Rightarrow V_0 = \int_0^d E dz = \frac{K}{\epsilon_0} (1 - e^{-d}) \quad \boxed{\rho_s = D = K \rightarrow Q = K A = K}$$

$$\Rightarrow C = \frac{Q}{V_0} \Rightarrow C = \frac{\frac{K}{\epsilon_0}}{\frac{K}{\epsilon_0} (1 - e^{-d})} = \frac{\epsilon_0}{(1 - e^{-d})}$$

ب) از طریق ترکیب سرخزن: $\frac{1}{C} = \int \frac{dz}{\epsilon(z) A} = \int_0^d \frac{dz}{\epsilon_0 e^z} = \frac{1}{\epsilon_0} (1 - e^{-d}) \Rightarrow C = \frac{\epsilon_0}{(1 - e^{-d})}$

ج) از طریق انرژی ظرفیت

$$W_e = \frac{1}{2} \int \epsilon E^2 = \frac{1}{2} \int_0^d \epsilon_0 e^z \times \frac{K}{(\epsilon_0 e^z)} A dz$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^d \frac{K^2 dz}{\epsilon_0 e^z} \Rightarrow W_e = \frac{1}{2} \frac{K^2}{\epsilon_0} (1 - e^{-d}) = \frac{1}{2} \frac{K^2}{\frac{\epsilon_0}{(1 - e^{-d})}} = \frac{1}{2} \frac{K^2}{C} \Big|_{K=Q}$$

$$\Rightarrow C = \frac{\epsilon_0}{(1 - e^{-d})}$$

3. کابل هم محور بر محور x مفروض است شعاع a در داخل و شعاع b در خارج $b > a$ باشد. فضای بین a و b از عایق با ضریب دی الکتریک $\epsilon = \epsilon_0 e^{-\alpha x}$ پر شده است. ظرفیت خازن این کابل با طول l به نایب را می گویید؟

حل:

$$dc = \frac{2\pi\epsilon dx}{\ln b/a} = \frac{2\pi\epsilon_0 e^{-\alpha x} dx}{\ln b/a}$$

$$C = \int_{-\infty}^{+\infty} dc = 2 \int_0^{\infty} dc = 2 \int_0^{\infty} \frac{2\pi\epsilon_0 e^{-\alpha x}}{\ln b/a} dx = \frac{4\pi\epsilon_0}{\ln b/a}$$

در حقیقت خازن l با هم موازی هستند (تغییرات ϵ در جهت موازی با شعاع هم پدید می آید)

4. فضای بین ۲ صفحه $z=0$ و $z=11\text{cm}$ قرار دارند از ماده ای دی الکتریک با ضریب دی الکتریک $\epsilon = \epsilon_0 (1 + \frac{2x^2}{3})$ پر شده است. اگر ابعاد صفحات 3m در جهت x و 2m در جهت y باشد ظرفیت خازن تشکیل شده چقدر می شود؟

حل: خازن از تعداد l نایب دی الکتریک به صورت خازن l موازی تشکیل شده است

$$\Rightarrow C = \epsilon \int_{0.11}^2 \frac{3 dx}{0.11} = \int_0^2 \frac{300}{11} \epsilon_0 (1 + \frac{2x^2}{3}) dx = 112 \epsilon_0 = 991 \text{ PF}$$

5. خازن استوانه ای به شعاع 50 سانتی متر و شعاع خارجی 135 سانتی متر مفروض است. برای اینکه ظرفیت این خازن را 10 برابر کنیم بین ۲ استوانه را از نوع عایق به صورت زیر پر می کنیم

در این صورت ϵ_r چقدر است؟

$$\epsilon = \begin{cases} \epsilon_0 \epsilon_r & 0 < \phi < \pi/3 \\ 3\epsilon_0 \epsilon_r & \pi/3 < \phi < 2\pi \end{cases}$$

حل: ظرفیت خازن قبل از قرار دادن عایق l برابر است با $\frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln \frac{1.35}{0.5}}$ و ظرفیت تشکیل شده 10 برابر

$$\frac{\pi \epsilon_0 \epsilon_r l}{\ln \frac{1.35}{0.5}} + \frac{5\pi/3 (3\epsilon_0 \epsilon_r) l}{\ln \frac{1.35}{0.5}} = 8 \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln \frac{1.35}{0.5}} \rightarrow \frac{16\pi}{3} \epsilon_r = 16\pi \Rightarrow \epsilon_r = 3$$