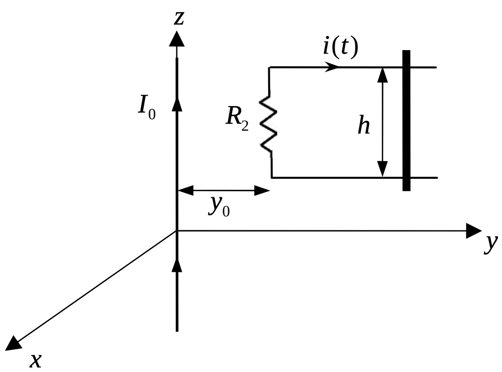
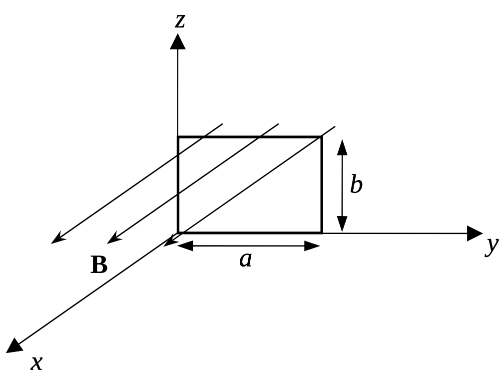
به نام خدا

سری هشتم تمرین‌های الکترومغناطیس — نیمسال اول سال تحصیلی ۹۱-۹۰ — موعد تحویل: دوشنبه ۹۰/۹/۲۸

۱- یک رشته سیم طویل در امتداد محور z قرار گرفته و حامل جریان ثابت I_0 می‌باشد. در مجاورت این سیم، دو ریل موازی محور y به فاصله h از یکدیگر روی صفحه yz قرار گرفته و یک میله فلزی به کمک نیروی مکانیکی با سرعت ثابت $\mathbf{u} = u_0\hat{y}$ روی آن‌ها می‌لغزد. ریل‌ها در هر متر دارای مقاومت R_1 بوده و در $y = y_0$ به مقاومت R_2 ختم می‌شوند. فرض کنید میله لغزنده در $t = 0$ در $y = y_0$ قرار گرفته باشد. جریان $i(t)$ را در $t > 0$ محاسبه نمایید.



۲- یک حلقه مستطیلی با مقاومت R و اضلاع a,b را مطابق شکل مقابل در نظر بگیرید. حلقه در لحظه $t = 0$ در صفحه yz قرار دارد. فرض کنید میدان مغناطیسی یکنواخت $\mathbf{B} = \hat{x}\, B_0\left(1 + k\cos\ \ {}_0 t\right)$ در تمام نقط فضا وجود داشته باشد (k مقداری ثابت و معلوم). مطلوب است محاسبه توان مکانیکی لازم برای آن که حلقه را با سرعت زاویه‌ای ${}_0$ حول محور z بچرخانیم.



۳- یک موجبر مستطیلی با دیواره‌هایی از جنس هادی کامل را مطابق شکل زیر در نظر بگیرید. فضای درون موجبر از ماده‌ای خطی، همگن، همسانگرد و بدون اتلاف با پارامترهای (,) تشکیل شده است. میدان مغناطیسی در داخل این موجبر به شکل زیر داده شده است:

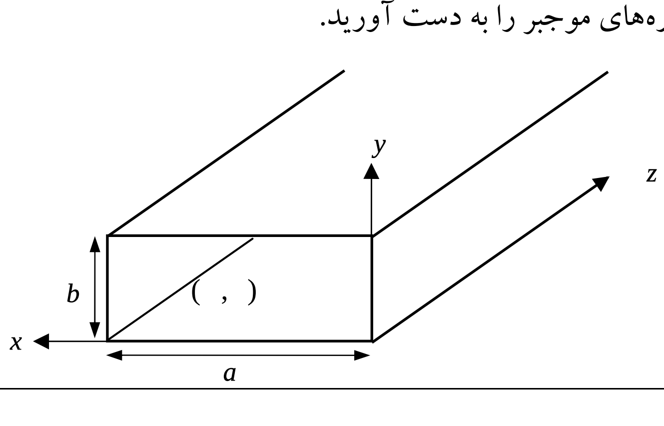
$$\mathbf{H}(x,y,z,t) = \cos(\ \ x/a)\cos(\ \ t - \ \ z)\ \hat{z} - \frac{\ \ }{h^2\ a}\sin(\ \ x/a)\sin(\ \ t - \ \ z)\ \hat{x}$$

که در آن $h^2 = \ {}^2 \ - \ {}^2$.

الف- مقدار را به گونه‌ای به دست آورید که تابع $\mathbf{H}$ داده شده، در معادله موج بدون منبع و بدون اتلاف صدق کند.

ب- میدان الکتریکی را به دست آورده و نشان دهید در شرایط مرزی صدق می‌کند.

پ- جریان سطحی روی دیواره‌های موجبر را به دست آورید.



۴- ناحیه $z<0$ از ماده‌ای ساده و بی‌اتلاف با پارامترهای $(\ _1,\ _1)$ و ناحیه $z>0$ از ماده‌ای ساده و بی‌اتلاف با پارامترهای $(\ _2,\ _2)$ تشکیل شده است. میدان الکتریکی در این دو محیط و در حالت هماهنگ زمانی به صورت زیر داده شده است:

$$\mathbf{E_1}=\hat{x}\left(E_0\, e^{-jk_1z}+\Gamma E_0\, e^{jk_1z}\right),\quad \mathbf{E_2}=\hat{x}\left(\ \ E_0\, e^{-jk_2z}\right)$$

که در آن E_0 مقداری ثابت و مشخص بوده و k_1 و k_2 به ترتیب عدد موج در ناحیه‌های $z<0$ و $z>0$ می‌باشد.

الف- میدان مغناطیسی را در تمام فضا به کمک معادلات ماکسول بیابید.

ب- با استفاده از شرایط مرزی در $z=0$، مقدار Γ و را محاسبه کنید.

۵- برای یک هادی مانند مس ($\ =5.7\times10^7\ S/m,\ \ \ _r=1$) تا چه فرکانسی تقریب هادی خوب برقرار است؟

۶- یک سیم بسیار کوتاه به طول h در جهت $\hat{z}$ حامل جریان هماهنگ زمانی $I=I_0\cos\ \ _0t$ می‌باشد ($kh\ll1$). با محاسبه تابع پتانسیل تأخیریافته، $\mathbf{A}=\frac{\ }{4\ }\int_V\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dv'$،

الف- میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی را به دست آورید.

ب- نشان دهید در راه دور، میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی بر یکدیگر و بر جهت انتشار موج عمودند و نسبت $|\mathbf{E}|/|\mathbf{H}|$ عددی ثابت است.

(راهنمایی: محاسبات را در دستگاه کروی انجام دهید و در راه دور از جملات $1/R^2$ و $1/R^3$ در قیاس با جمله $1/R$ صرف‌نظر کنید.)

۷- (مسئله اختیاری دارای امتیاز مثبت) نشان دهید معادله پیوستگی ($\nabla\cdot\mathbf{J}+j\ \ \ =0$) تضمین می‌کند که توابع پتانسیل تأخیریافته $\mathbf{A}=\frac{\ }{4\ }\int_V\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dv'$ و $V=\frac{1}{4\ }\int_V\frac{\ (\mathbf{r}')e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dv'$ در شرط لورنتس ($\nabla\cdot\mathbf{A}+j\ \ \ \ V=0$) صادق باشند.