تمرین سری دهم الکترومغناطیس — دی الکتریک‌ها در میدان الکتریکی، قطبی شدگی، چگالی بارهای حجمی و سطحی

۱. فضای بین ۲ صفحه موازی از ماده عایق با ضریب نفوذپذیری نسبی ε_r پر شده است. میدان الکتریکی یکنواخت $E = E_0 \hat{a}_z$ به ماده عایق اعمال می‌گردد. مطلوبست محاسبهٔ بردار پلاریزاسیون، و چگالی بارهای القایی در ناحیه مادهٔ مورد نظر (عایق) و روی سطوح آن ($z=0$ و $z=d$) و میدان الکتریکی در تمام نقاط فضا؛

حل: میدان الکتریکی باعث قطبی شدن مولکول‌های جسم می‌گردد. ولی چون میدان اعمال شده یکنواخت است در همه نقاط ناحیه $0<z<d$ (به جز در صفحات مرزی) بارهای مثبت و منفی مقید کاملاً یکدیگر را خنثی می‌کنند و جسم عایق را می‌توانیم با ۲ صفحه موازی بی‌نهایت با چگالی ρ_s و $-\rho_s$ جایگزین کنیم. چون قطبی شدگی ماده به صورت یکنواخت انجام می‌گیرد ⇐

$$\vec{P} = \rho_0 \hat{a}_z$$

از سوی دیگر بارهای سطحی القا شده در صفحه $z=0$ و $z=d$ باعث به وجود آمدن یک میدان داخلی می‌گردند که برخلاف میدان اعمالی است. با توجه به توضیحات فوق می‌توانیم بنویسیم:

بار حجمی مقید $\quad \rho_{vb} = -\nabla\cdot\vec{P} \Longrightarrow \rho_{vb} = 0$

از سوی دیگر $\quad \rho_{sb} = \vec{P}\cdot\hat{a}_n = \begin{cases} \rho_0 & z=d \\ -\rho_0 & z=0 \end{cases}$

میدان داخلی برحسب ρ_0 به شکل زیر است:

$$E_{in} = \begin{cases} -\dfrac{\rho_0}{\varepsilon_0}\hat{a}_z & 0<z<d \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

⇐ میدان کل به شکل زیر است:

$$E_{total} = \vec{E} + \vec{E}_{in} = \left(E_0 - \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\right)\hat{a}_z$$

از طرفی $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$ به هم مربوط می‌شوند:

$$\Rightarrow \vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\left(E_0 - \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\right)\hat{a}_z$$

$$\Rightarrow \rho_0 = \varepsilon_0 E_0 (\varepsilon_r - 1)/\varepsilon_r$$

$$\Rightarrow \vec{P} = E_0 \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1)\,\varepsilon_r\,\hat{a}_z \quad , \quad E_{in} = E_0(\varepsilon_r - 1)/\varepsilon_r\,\hat{a}_z$$

$$\rho_s = E_0 \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1)/\varepsilon_r$$

۲. یک میله عایق باریک با سطح مقطع A در طول محور از $z=0$ تا $z=l$ قرار دارد و بردار پلاریزاسیون (قطبی‌شدگی) الکتریکی $\vec{P}$ میله به شکل $\vec{P}=(az^2+b)\hat{a}_z$ می‌باشد.

الف) چگالی حجمی و سطحی بار مقید را در حجم و سطوح مختلف میله و بار مقید کل را محاسبه نمائید.

ب) چنانچه میدان الکتریکی در تمام نقاط میله ثابت و مساوی $\vec{E}=\frac{1}{\varepsilon_0}\hat{a}_z$ باشد ضریب نفوذپذیری الکتریکی نسبی ε_r چقدر است.

الف)

$$\rho_{sb}=\vec{P}\cdot\hat{a}_n$$

چگالی بار سطحی مقید

برای سطوح جانبی $\hat{a}_n=\hat{a}_r$ است ⇐

$$\rho_{sb}=(az^2+b)\,\hat{a}_z\cdot\hat{a}_r$$

$$\rho_{sb}=0$$

برای سطح بالایی $\hat{a}_n=\hat{a}_z$ است ⇐

$$\rho_{sb}\Big|_{z=l}=\vec{P}\cdot\hat{a}_z\Big|_{z=l}$$

$$\rho_{sb}=al^2+b$$

برای سطوح پایینی $\hat{a}_n=-\hat{a}_z$ است ⇐

$$\rho_{sb}\Big|_{z=0}=\vec{P}\cdot(-\hat{a}_n)\Big|_{z=0}=-b$$

چگالی بار حجمی مقید $\quad \rho_{vb}=-\nabla\cdot\vec{P}=-2az$

بار مقید کل $\quad Q_b=\int_s \rho_{sb}\,ds+\int_v \rho_{vb}\,dv$

$$\Rightarrow Q_b=(al^2+b)A+(-b)A+\left(\int_0^l -2az\,dz\right)A=0$$

$$\Rightarrow Q_b=0$$

ب)

$$\vec{P}=(\varepsilon_r-1)\,\varepsilon_0\vec{E}$$

$$(az^2+b)\hat{a}_z=(\varepsilon_r-1)\,\varepsilon_0\times\frac{1}{\varepsilon_0}\,\hat{a}_z$$

$$\Rightarrow \varepsilon_r-1=az^2+b \quad\Rightarrow\quad \varepsilon_r=az^2+b+1$$

۳. یک پوسته‌ی کروی عایق به شکل نیمکره به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b پلاریزه شده است.
پلاریزاسیون شعاعی و به طرف خارج هسته می‌باشد $\vec{P} = P_0 \hat{a}_R$.

الف) چگالی بارهای مقید حجمی و سطحی را بدست آورده و بار معادل مقید حجمی و سطحی را نیز محاسبه کنید.

ب) پتانسیل الکتریکی را در مرکز کره بدست آورید $V_\infty = 0$.

حل -

الف)

چگالی حجمی بار مقید $\quad \rho_{vb} = -\nabla \cdot \vec{P} = -\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}(R^2 P_0) = \frac{-2P_0}{R}$

چگالی سطحی بار مقید $\quad \rho_{sb} = \vec{P} \cdot \hat{a}_n \Rightarrow$

$$\rho_{sb}\big|_{R=a} = \vec{P} \cdot (-\hat{a}_R)\big|_{R=a} = -P_0$$

$$\rho_{sb}\big|_{R=b} = \vec{P} \cdot (\hat{a}_R)\big|_{R=b} = P_0$$

$$\Rightarrow Q_b = \int_V \rho_{vb}\, dv = \int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_a^b -\frac{2P_0}{R} \sin\theta\, dR\, d\theta\, d\varphi$$

$$\Rightarrow Q_b = -2\pi P_0 (b^2 - a^2)$$

$$Q_{sb} = \int_{sa} \rho_{sb}\, ds + \int_{sb} \rho_{sb}\, ds$$

$$= -P_0 2\pi a^2 + P_0 2\pi b^2$$

$$= 2\pi P_0 (b^2 - a^2) \qquad Q_{total} = Q_b + Q_{sb} = 0$$

ب)

$$V = \int_s \frac{\rho_s\, ds}{4\pi\varepsilon_0 |R - R'|} + \int_V \frac{\rho_{vs}\, dv}{4\pi\varepsilon_0 |R - R'|}$$

$$V_1 = \int_{s_1} \frac{\rho_{s1b}\, ds_1}{4\pi\varepsilon_0 |R - R'|}$$

$$\vec{R} = 0 \ , \quad \vec{R'} = a\hat{a}_R \ , \quad ds_1 = a^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$V_1 = \int_0^{2\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{-P_0 a^2}{4\pi\varepsilon_0 a} \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{-P_0}{4\pi\varepsilon_0} a \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \frac{-P_0 a}{2\varepsilon_0}$$

ادامه صفحه بعد

$$V_2 = \int_{S_2} \frac{\rho_{sb2}\, ds_2}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{R}-\vec{R}'|}$$

$$\bar{R} = 0 \; , \; \vec{R}' = b\,\hat{a}_r \qquad ds_2 = b^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$V_2 = \int_0^{2\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{P_0}{4\pi\varepsilon_0 b} b^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$V_2 = \frac{P_0 b}{2\varepsilon_0}$$

$$V_3 = \int_0^{2\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\int_a^b \frac{-2P_0}{4\pi\varepsilon_0 R^3} R^2 \sin\theta \, dR \, d\theta \, d\varphi$$

$$= \frac{-2P_0}{4\pi\varepsilon_0}(2\pi)(b-a) = -\frac{P_0}{\varepsilon_0}(b-a)$$

$$V_{total} = V_1 + V_2 + V_3 = -\frac{P_0}{\varepsilon_0}(b-a) - \frac{P_0 a}{2\varepsilon_0} + \frac{P_0 b}{2\varepsilon_0}$$

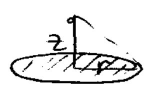
$$= \frac{-P_0}{2\varepsilon_0}(a-b) \checkmark$$

4. یک میله دی الکتریک استوانه ای شکل به طول L و شعاع R در امتداد طول خود قطبیده شده است اگر قطبش یکنواخت، و بزرگی آن P باشد میدان الکتریکی ناشی از این قطبش را در نقاط ای بر روی محور میله محاسبه کنید.

حل:

$$\rho_p = -\nabla\cdot P = 0 \quad ; \quad \sigma_p = (\pm \hat{k}\cdot P) = \pm P = \rho_{sb}$$

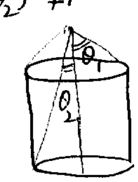
$$E = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}\right]$$



$$\Rightarrow E = \frac{P}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{z-L/2}{\sqrt{(z-\frac{L}{2})^2+r^2}}\right] - \frac{P}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{z+L/2}{\sqrt{(z+L/2)^2+r^2}}\right]$$

$$= \frac{P}{2\varepsilon_0}\left[\frac{z+L/2}{\sqrt{(z+L/2)^2+r^2}} - \frac{z-L/2}{\sqrt{(z-L/2)^2+r^2}}\right] \Rightarrow$$

$$\vec{E} = \frac{P}{2\varepsilon_0}\left[\cos\theta_2 - \cos\theta_1\right]$$



۵. درداخل کره ای عایق با چگالی بار حجمی ثابت ρ_0 میدان الکتریکی ثابت و برابر است با $\frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\hat{a}_R$.
چگالی حجمی بارهای پلاریزه در داخل کره را بیابید :

حل: با استفاده از قانون گوس میدان را در داخل کره بدست می‌آوریم و با میدان داده شده مساوی قرار می‌دهیم تا ضریب دی‌الکتریک عایق را بدست آوریم. سپس پلاریزاسیون را از روی آن چگالی حجمی بارهای پلاریزه را بدست می‌آوریم.

$$R < a \rightarrow \oint_{\text{کره}} \vec{D}\cdot\vec{ds} = Q/\varepsilon$$

$$\Rightarrow \varepsilon(4\pi R^2) = \rho_0 \frac{4}{3}\pi R^3/\varepsilon \Rightarrow E = \frac{\rho_0 R}{3\varepsilon}\hat{a}_R$$

$$\Rightarrow \varepsilon = \varepsilon_0 R \quad \Rightarrow \vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E} = \varepsilon(\varepsilon_r - 1)\frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\hat{a}_R$$

$$= \frac{\rho_0(R-1)}{3}\hat{a}_R$$

$$\Rightarrow \rho_b = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P} = \frac{-1}{R^2}\frac{\partial(R^2 P_R)}{\partial R} = \frac{\rho_0(2-3R)}{3R}$$

دی‌الکتریک‌ها در میدان الکتریکی، قطبی شدگی، چگالی بار حجمی و سطحی

تمرین سری دهم (b) الکترومغناطیس :

۱. فضای بین $z=0$ و $z=d$ را ماده عایقی فرا گرفته است. قابلیت گذردهی این ماده غیر یکنواخت بوده و طبق رابطه‌ی زیر بدست می‌آید :

$$\varepsilon = \frac{4\varepsilon_0}{(1+z/d)^2}$$

میدان الکتریکی یکنواخت $E = E_0\hat{a}_z$ به این ماده اعمال می‌شود. مطلوبست محاسبه :

الف) میدان $\vec{D}$ در درون و بیرون عایق ،

ب) میدان $\vec{E}$ و $\vec{P}$ در درون عایق، چگالی سطحی ρ_{ps} روی سطح $z=0$ و $z=d$ و نیز چگالی حجمی ρ_p در درون عایق.

حل : الف)

به دلیل یکنواخت بودن $\vec{E}$ میدان $\vec{D}$ در درون و بیرون عایق یکسان بوده و از رابطه زیر بدست می‌آید که البته صحت این مطلب پس از محاسبه $\vec{E}$ درون عایق در حالت (ب) تحقیق می‌شود.

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} = \varepsilon_0 E_0\hat{a}_z$$

ب) با توجه به این که میدان $\vec{E}$ تنها در جهت عمود بر صفحات مرز مشترک دو ناحیه یعنی $\hat{a}_z$ دارای مؤلفه است. با توجه به اینکه درون عایق هیچ گونه بار آزادی وجود ندارد $(\rho_v=0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \nabla\cdot\vec{D} = \rho_v = 0 \\ \nabla\cdot\vec{D} = \nabla\cdot\varepsilon\vec{E} = \varepsilon\nabla\cdot\vec{E} + \vec{E}\nabla\varepsilon = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{E} = \dfrac{\partial E_z}{\partial z} \\ \nabla\varepsilon = \dfrac{\partial\varepsilon}{\partial z}\hat{a}_z = \dfrac{\partial}{\partial z}\left[\dfrac{4\varepsilon_0}{(1+z/d)^2}\right]\hat{a}_z = 4\varepsilon_0\left[\dfrac{-2/d}{(1+z/d)^2}\right]\hat{a}_z \end{cases}$$

$$= \frac{-8}{d(1+z/d)^2}\hat{a}_z \quad \Rightarrow \quad \nabla\cdot\varepsilon\vec{E} = \left[\frac{4\varepsilon_0}{(1+z/d)^2}\right]\frac{\partial E_z}{\partial z} + E_z\left[\frac{-8\varepsilon_0}{d(1+z/d)^2}\right] = 0$$

$$\frac{dE_z}{dz} - \frac{2E_z}{d(1+z/d)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial E_z}{E_z} = \frac{2\,\partial z}{d(1+z/d)}$$

از طرفین تساوی انتگرال می‌گیریم :

$$\int\frac{\partial E_z}{E_z} = \int\frac{2\,\partial z}{d(1+z/d)}$$

$$\Rightarrow \ln E_z = 2\ln(1+z/d) + \ln K$$

K مقداری ثابت است

ادامه صفحه بعد

۱. فضای بین $z=0$ و $z=d$ را ماده عایق فرا گرفته است. قابلیت گذردهی این ماده غیر یکنواخت بوده و طبق رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$\varepsilon = \frac{4\varepsilon_0}{(1+z/d)^2}$$

میدان الکتریکی یکنواخت $E = E_0\hat{a}_z$ به این ماده اعمال می‌شود. مطلوبست محاسبه:

الف) میدان $\vec{D}$ در درون و بیرون عایق،

ب) میدان $\vec{E}$ و $\vec{P}$ در درون عایق، چگالی سطحی ρ_{ps} روی سطح $z=0$ و $z=d$ و نیز چگالی حجمی ρ_p در درون عایق.

حل: الف)

به دلیل یکنواخت بودن $\vec{E}$ میدان $\vec{D}$ در درون و بیرون عایق یکسان بوده و از رابطه زیر بدست می‌آید که البته صحت این مطلب پس از محاسبه $\vec{E}$ درون عایق در حالت (ب) تحقیق می‌شود.

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_0 E_0 \hat{a}_z$$

ب) با توجه به این که میدان $\vec{E}$ تنها در جهت عمود بر صفحات مرز مشترک دو ناحیه یعنی $\hat{a}_z$ دارای مؤلفه است با توجه به اینکه درون عایق هیچ گونه بار آزادی وجود ندارد ($\rho_v = 0$)

$$\Rightarrow \begin{cases} \nabla\cdot\vec{D} = \rho_v = 0 \\ \nabla\cdot\vec{D} = \nabla\cdot\varepsilon\vec{E} = \varepsilon\nabla\cdot\vec{E} + \vec{E}\,\nabla\varepsilon = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{E} = \dfrac{\partial E_z}{\partial z} \\ \nabla\varepsilon = \dfrac{\partial\varepsilon}{\partial z}\hat{a}_z = \dfrac{\partial}{\partial z}\left[\dfrac{4\varepsilon_0}{(1+z/d)^2}\right]\hat{a}_z = 4\varepsilon_0\left[\dfrac{-2/d}{(1+z/d)^2}\right]\hat{a}_z \end{cases}$$

$$= \frac{-8}{d(1+z/d)^2}\hat{a}_z \quad \Rightarrow \quad \nabla\cdot\varepsilon\vec{E} = \left[\frac{4\varepsilon_0}{(1+z/d)^2}\right]\frac{\partial E_z}{\partial z} + E_z\left[\frac{-8\varepsilon_0}{d(1+z/d)^2}\right] = 0$$

$$\frac{dE_z}{dz} - \frac{2E_z}{d(1+z/d)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial E_z}{E_z} = \frac{2\,\partial z}{d(1+z/d)}$$

از طرفین تساوی انتگرال می‌گیریم:

$$\int \frac{\partial E_z}{E_z} = \int \frac{2\,\partial z}{d(1+z/d)}$$

$$\Rightarrow \ln E_z = 2\ln(1+z/d) + \ln K$$

K مقداری ثابت است

ادامه در صفحه بعد