بسمه تعالی

سوالات حل تمرین الکترومغناطیس

دکتر موسوی

پاییز ۹۱

گردآوری:

عمادی فر- الدرمی

eldoromi@engineer.com

rezaemadifar@yahoo.com

حل تمرین الکترومغناطیس

۱- در دستگاه مختصات کروی روی سطح مخروط $\theta = \frac{\pi}{6}$ برای $0 < r < a$ بار سطحی الکتریکی غیر یکنواخت با چگالی $\rho_s=r^2$ کولن بر متر مربع توزیع شده است. پتانسیل الکتریکی در مبدا مختصات چقدر است؟مرجع پتانسیل در بینهایت فرض می شود(ارشد ۸۹-۹۰)

حل:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho_s d\acute{s}}{R}$$

$$d\acute{s} = \acute{r}_s \sin\theta \, d\acute{\varphi} d\acute{r}_s$$

$$V_{(0,0,0)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\acute{\varphi}=0}^{2\pi}\int_{\acute{r}_s=0}^{a} \frac{(\acute{r}_s)^2\acute{r}_s \sin\theta \, d\acute{\varphi} d\acute{r}_s}{\acute{r}_s}$$

$$= \frac{2\pi\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^a \acute{r}_s{}^2 \, d\acute{r}_s$$

$$= \frac{\sin\theta}{2\varepsilon_0}\frac{a^3}{3}$$

$$= \frac{a^3}{12\varepsilon_0}$$

۲- در فضای خالی تابع پتانسیل الکتریکی در ناحیه ی داخل کره ای به شعاع ۳ متر بصورت زیر است. کل بار موجود در داخل این کره را بدست آورید.(ارشد۸۸-۸۹)

$$V_{(x,y,z)} = 6x^2 - 5y + 4z^2$$

حل:

$$\bar{E} = -\nabla V$$
$$\bar{E} = -(12x - 5 + 8z)$$
$$\bar{D} = \varepsilon_0 \bar{E}$$
$$\bar{D} = -\varepsilon_0 (12x - 5 + 8z)$$
$$\rho = \nabla . \bar{D}$$
$$\rho = -\varepsilon_0 (12 + 8)$$
$$\rho = -20\varepsilon_0$$
$$q = \int \rho dv$$
$$q = (-20\varepsilon_0)\left(\frac{4\pi a^3}{3}\right)$$
$$q = -20 \quad nC$$

۳- در میدان الکتریکی تولید شده توسط یک بار خطی بینهایت طویل واقع بر محور z با چگالی خطی $2\pi\varepsilon_0 \left(\frac{C}{m}\right)$ از سطحی با مشخصات $r_s = 1$ و $\frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{4}$ و $0 \le \varphi \le 2\pi$ چه مقدار شار الکتریکی عبور می کند؟(ارشد۸۸-۸۹)

حل:

درمختصات استوانه ای داریم:

$$\bar{E} = \hat{r}_c \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 r_c}$$

$$\bar{E} = \hat{r}_c \frac{1}{r_c}$$

درمختصات کروی داریم:

$$\bar{E} = \hat{r}_s \frac{1}{{r_s}^2} + \hat{\theta}\ tan\theta$$

$$\psi = \int \bar{D} \,.\, \overline{ds}$$

$$\bar{D} = \varepsilon_0 \bar{E}$$

$$\bar{D} = \varepsilon_0 \left(\hat{r}_s \frac{1}{{r_s}^2} + \hat{\theta}\ tan\theta\right)$$

$$\overline{ds} = \hat{r}_s {r_s}^2 \sin\theta\, d\theta d\varphi$$

$$\psi = \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta\, d\theta d\varphi$$

$$\psi = \pi\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)$$

۴- بار خطی یکنواخت با چگالی ρ_l روی محور z در $a > z > -a$ توزیع شده است ، میدان الکتریکی در نقطه ای با فاصله r از خط بار واقع در صفحه xy چقدر است ؟

(ارشد ۸۵-۸۶)

حل:

$$\bar{E} = \int_{-a}^{a} \frac{\rho_l(-\hat{z}\acute{z} + \hat{r}r)d\acute{z}}{4\pi\varepsilon_0(\acute{z}^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\bar{E} = \hat{r}\frac{r\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-a}^{a} \frac{d\acute{z}}{(\acute{z}^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\acute{z} = r \ \tan \propto$$

$$\bar{E} = \hat{r}\frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0 r}(2\sin \propto)$$

$$\bar{E} = \hat{r}\frac{\rho_l a}{2\pi\varepsilon_0 r\sqrt{r^2 + a^2}}$$

۵- دو کره رسانا کوچک به شعاع های a و 2a به فاصله بسیار زیاد d=2a از یکدیگر قرار دارند . ظرفیت خازن حاصل را با تقریبی مناسب بدست آورید. (ارشد ۸۴-۸۵)

حل: اگر بارهای $\pm q$ را در مراکز رساناهای کروی فرض کنیم برای پتانسیل ناشی از این بارها بر روی سطح کروی ۱ و سطح کروی ۲ خواهیم داشت:

$$V_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(2a)} + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0(18a)}$$

$$V_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(19a)} + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

$$V = V_1 - V_2$$

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{476}{342a}$$

$$C = \frac{q}{V}$$

$$C = \frac{q}{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{476}{342a}}$$

$$C \approx \pi\varepsilon_0 a\frac{20}{7}$$

۶- صفحه y=0 یک رسانای کامل است. برای y>0 برای پتانسیل الکتریکی داریم $V_{(x,y)} = V_0 e^{-ax}\sin ay$ بار موجود روی صفحه xz برای 0<x<∞ و 0<z<1 چقدر خواهد بود؟(ارشد۸۵-۸۶)

حل:

$$\bar{E} = -\nabla V$$
$$\bar{E} = -\nabla(V_0 e^{-ax}\sin ay)$$
$$\bar{E} = aV_0 e^{-ax}(\hat{x}\sin ay - \hat{y}\cos ay)$$
$$\overline{D} = \varepsilon_0 \bar{E}$$
$$\overline{D} = \varepsilon_0 a V_0 e^{-ax}(\hat{x}\sin ay - \hat{y}\cos ay)$$
$$\overline{D}_{(y=0)} = -\hat{y}\varepsilon_0 a V_0 e^{-ax}$$
$$q_{(y=0)} = \int \overline{D}_{(y=0)} . \overline{ds}$$
$$\overline{ds} = \hat{y}dxdz$$
$$q = \int_0^1 \int_0^\infty (-\hat{y}\varepsilon_0 a V_0 e^{-ax}).(\hat{y}dxdz)$$
$$q = -\int_0^1 \int_0^\infty \varepsilon_0 a V_0 e^{-ax} dxdz$$
$$q = -\varepsilon_0 V_0$$

۷- در فضای خالی روی سطح کره ای به شعاع a چگالی بارهای سطحی الکتریکی بصورت $\sigma = \sigma_0 \cos\theta$ فرض شده است که σ_0 ثابت است.پتانسیل الکتریکی در داخل و خارج کره بصورت زیر بدست آمده است،ضرایب A و B را بترتیب کدامند؟ (ارشد۸۵-۸۶)

$$\begin{cases} V_1 = Ar\,cos\theta & r < a \\ V_2 = \dfrac{B}{r^2}\,cos\theta & r > a \end{cases}$$

حل: روی مرز بین دو محیط پیوستگی پتانسیل الکتریکی برقرار است،یعنی($V_1 = V_2$) بنابراین داریم:

$$A = \frac{B}{a^3}$$

چگالی خطوط میدان در مرز بین دو محیط را بدست می آوریم:

$$\bar{D}_{r2} = \varepsilon_0 \bar{E}_{r2}$$
$$\bar{E}_{r2} = -\nabla V_2$$
$$\bar{E}_{r2} = \hat{r}_s \frac{2}{r^3} B\cos\theta$$
$$\bar{D}_{r2\,(r_s=a)} = \hat{r}_s \varepsilon_0 \frac{2}{a^3} B\cos\theta$$

برای $\bar{E}_{r1}$ و $\bar{D}_{r1}$ نیز خواهیم داشت:

$$\bar{E}_{r1} = -\hat{r}_s A\cos\theta$$
$$\bar{D}_{r1} = -\hat{r}_s \varepsilon_0 A\cos\theta$$

و با توجه به شرایط مرزی داریم:

$$\hat{r}_s.(\bar{D}_{r2} - \bar{D}_{r1}) = \rho_s$$
$$\hat{r}_s.\left(\hat{r}_s \varepsilon_0 \frac{2}{a^3} B\cos\theta + \hat{r}_s \varepsilon_0 A\cos\theta\right) = \rho_s$$

$$\left(\frac{2}{a^3}B + A\right)\varepsilon_0 \cos\theta = \sigma_0 \cos\theta$$

$$\left(\frac{2}{a^3}B + A\right)\varepsilon_0 = \sigma_0$$

بنابراین با توجه به $A = \frac{B}{a^3}$ خواهیم داشت:

$$A = \frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0}$$

$$B = \frac{\sigma_0 a^3}{3\varepsilon_0}$$

۸- چگالی بار پیوسته ای که در فضای آزاد میدان الکتریکی با شدت $\overline{\mathrm{E}}$ ایجاد می کند را بدست آورید.

$$\bar{E} = \begin{cases} -\hat{r}_s \dfrac{\rho_0}{3\varepsilon_0} r_s & 0 \le r_s \le b \\ -\hat{r}_s \dfrac{\rho_0 b^3}{3\varepsilon_0 {r_s}^2} & r_s > b \end{cases}$$

حل:

$$\nabla \cdot \overline{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\rho = \varepsilon_0 \nabla \cdot \overline{E}$$

$$0 \le r_s \le b$$

$$\rho_{(0 \le r_s \le b)} = \varepsilon_0 \nabla \cdot \left[-\hat{r}_s \ \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0} r_s\right]$$

$$\rho = \varepsilon_0 \times \frac{1}{{r_s}^2} \frac{d}{dr_s}\left[{r_s}^2 \left(-\frac{\rho_0}{3\varepsilon_0} r_s\right)\right]$$

$$\rho = -\rho_0$$

$$r_s > b$$

$$\rho_{(r_s > b)} = \varepsilon \nabla . \left[- \hat{r}_s \ \left(\frac{\rho_0 \ b^3}{3\varepsilon_0 {r_s}^2}\right)\right] =$$

$$\rho = \varepsilon_0 \ \times \frac{1}{{r_s}^2} \ \frac{d}{dR} \ \left[{r_s}^2 \left(\frac{\rho_0 \ b^3}{3\varepsilon_0 {r_s}^2}\right)\right] = 0$$

۹- چگالی شار مغناطیسی را در نقطه ای روی محور یک سلونوئید با شعاع b و طول L ، در حالی که جریان I در N دور سیم پیچ به هم فشرده آن برقرار است ، تعیین نمایید .
نشان دهید که اگر L به سمت بینهایت میل کند نتیجه به معادله روبه رو ساده خواهد شد.

$$\bar{B} = \hat{z}\frac{\mu_\circ NI}{L}$$

حل: برای محاسبه چگالی شار مغناطیسی با استفاده از قانون بیو ساوار می توان نوشت:

$$\overline{\mathrm{B}} = \frac{\mu_\circ}{4\pi}\int \frac{\vec{\mathrm{j}}.ds \times (\overline{R_2} - \overline{R_1})}{|\overline{\mathrm{R}_2} - \overline{\mathrm{R}_1}|^3}$$

$$\overline{R_2} = \hat{Z}h$$

$$\overline{R_1} = \hat{r}b + \hat{Z}\acute{Z} \qquad 0 < z < L$$

$$\bar{J} = \frac{NI}{L}\acute{\varphi}$$

$$ds = bd\varphi d\acute{z}$$

$$\bar{B} = \frac{\mu_\circ NIb}{2\pi L}\int_\circ^L \int_\circ^{2R} \frac{d\varphi dz\acute{\varphi} \times (\acute{z}h - \acute{r}b - \acute{z}z)}{((h-z)^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\bar{B} = \hat{z}\frac{\mu_\circ NIb^2}{2L}\int_\circ^L \frac{dz}{((h-z)^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\bar{B} = \hat{z}\frac{\mu_\circ NIb^2}{2L}\left(-\frac{h-z}{b^2((h-z)^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}\right)\Bigg|_\circ^L$$

$$\bar{B} = \hat{z}\frac{\mu_\circ NI}{2L}\left(\frac{L-h}{((L-h)^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}+\frac{h}{(h^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}\right)$$

وقتی L به سمت بینهایت میل می کند.

$$\lim_{L\to\infty}\hat{z}\frac{\mu_\circ NI}{2L}\left(\frac{L-h}{((L-h)^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}+\frac{h}{(h^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}\right)$$

$$\bar{\mathrm{B}} = \hat{\mathrm{z}}\frac{\mu_\circ NI}{2\mathrm{L}}(1+1)$$

$$\bar{B} = \hat{z}\frac{\mu_\circ NI}{L}$$

۱۰- دو سیم پیچ مشابه هم محور ، هر یک دارای N دور و شعاع b ، در فاصله d از یکدیگر قراردارند. جریان I با جهت یکسان از هر دو سیم پیچ می گذرد.

چگالی شار مغناطیسی $\bar{B} = \hat{x}B$ را در نقطه دو سیم پیچ و فاصله یکسان از هر دو پیدا کنید.

حل: چگالی شار مغناطیسی ناشی از یک حلقه جریان را می توان توسط قانون بیوساوار به دست آورد.

$$\bar{B} = \frac{\mu_\circ}{4\pi}\int \frac{IdL \times (\overline{R_2} - \overline{R_1})}{|\overline{R_2} - \overline{R_1}|^3}$$

$$dL = bd\varphi\hat{\varphi}$$

$$\overline{R_2} = \hat{z}z$$

$$R_1 = \hat{r}b$$

$$\bar{B} = \frac{\mu_\circ Ib}{4\pi}\int_\circ^{2R} \frac{d\varphi\hat{\varphi} \times (\hat{z}\frac{d}{2} - \hat{r}b)}{(z^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\bar{B} = \frac{\mu_\circ IbZ}{2(z^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}$$

۱۱- در مرکز یک ابر کروی به شعاع R که دارای بار کل(Q– پخش شده به صورت یکنواخت) یک بار نقطه ای Q قرار گرفته است .پتانسیل در نقط های به فاصله $\frac{R}{2}$ از مرکز چقدر است؟

حل :

$$V_{\left(\frac{R}{2}\right)} = \int_{\frac{R}{2}}^{\infty} \bar{E}.\overline{dr_s}$$

می دانیم طبق قانون گاوس میدان در خارج کره صفر است بنابراین پتانسیل فقط ناشی از میدان داخلی خواهد بود.

$$V_{\left(\frac{R}{2}\right)} = \int_{\frac{R}{2}}^{R} \bar{E}.\overline{dr_s}$$

$$\bar{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{+Q}{{r_s}^2}\widehat{r_s}$$

$$\bar{E}_{in} = \hat{r}_s\frac{\rho_v}{3\varepsilon_0}r_s$$

$$-Q = \rho_v \times \frac{4}{3}\pi R^3 \to \rho_v = \frac{-3Q}{4\pi R^3} \to \overline{E_2} = \hat{r}\frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}r$$

$$\overline{E_t} = \bar{E}_1 + \bar{E}_2 = \hat{r}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{R^3}\right)$$

$$V\left(\frac{R}{2}\right) = \int_{\frac{R}{2}}^{R} \overline{E_t}.\overline{dr} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\int_{\frac{R}{2}}^{R}\frac{dr}{r^2} - \int_{\frac{R}{2}}^{R}\frac{rdr}{R^3}\right)$$

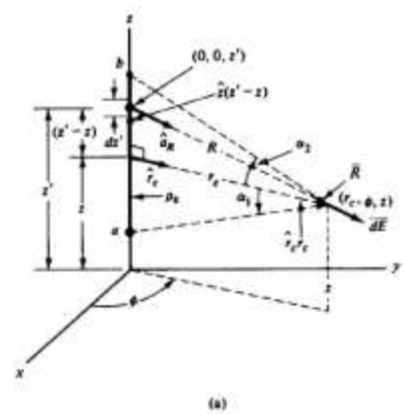
$$V\left(\frac{R}{2}\right) = \frac{5Q}{32\pi\varepsilon_0 R}$$

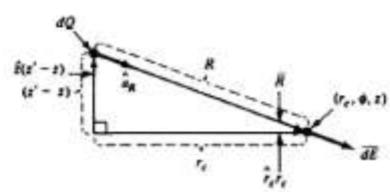
۱۲- مطلوب است محاسبه ی شدت میدان الکتریکی ناشی از بار خطی مستقیم ، بطول نامحدود ، با چگالی یکنواخت ρ_l بر روی محور Z ها در هر نقطه ای از خلا.

حل: با توجه به:

$$\overline{dE}= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho_l d\acute{l}}{R^2}\hat{a}_R$$

با استفاده از مختصات استوانه ای و با فرض محاسبه ی میدان حاصل از بار نقطه ی $\acute{P}(\acute{r}_c, \acute{\varphi}, \acute{z})$ بر روی هر نقطه ی دلخواهی به مختصات $P(r_c, \varphi , z)$ خواهیم داشت:





$$\bar{R}= \hat{r}_c(r_c-0) + \hat{\varphi}(0) + \hat{z}(\acute{z}-z)= \hat{r}_c r_c + \hat{z}(\acute{z}-z)$$

$$R = \sqrt{r_c^2 + (\acute{z} - z)^2}$$

$$\hat{a}_R= \frac{\bar{R}}{R} = \frac{\hat{r}_c r_c + \hat{z}(\acute{z}-z)}{\sqrt{r_c^2+(\acute{z}-z)^2}}$$

$$d\acute{z} = d\acute{l}$$

$$\overline{dE}= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho_l d\acute{z}}{r_c^2+(\acute{z}-z)^2}\frac{\hat{r}_c r_c + \hat{z}(\acute{z}-z)}{\sqrt{r_c^2+(\acute{z}-z)^2}}$$

حال با انتگرال گیری از طرفین داریم:

$$\bar{E} = \int_a^b \overline{dE}= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_a^b \frac{\rho_l}{r_c^2+(\acute{z}-z)^2}\frac{\hat{r}_c r_c + \hat{z}(\acute{z}-z)}{\sqrt{r_c^2+(\acute{z}-z)^2}}d\acute{z}$$

$$\bar{E} = \frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_a^b \frac{\hat{r}_c r_c}{(r_c^2+(\acute{z}-z)^2)^{\frac{3}{2}}}d\acute{z} + \int_a^b \frac{\hat{z}(\acute{z}-z)}{(r_c^2+(\acute{z}-z)^2)^{\frac{3}{2}}}d\acute{z}\right]$$

با توجه به محدوده ی انتگرالی $(d\acute{z})$ ، $\hat{\mathrm{r}}_c$ ثابت بوده و از انتگرال بیرون می آید:

$$\bar{E} = \frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\left[\hat{\mathrm{r}}_c \mathrm{r_c}\int_a^b \frac{d\acute{z}}{(\mathrm{r_c}^2+(\acute{\mathrm{z}}-\mathrm{z})^2)^{\frac{3}{2}}} + \hat{\mathrm{z}}\int_a^b \frac{(\acute{\mathrm{z}}-\mathrm{z})d\acute{z}}{(\mathrm{r_c}^2+(\acute{\mathrm{z}}-\mathrm{z})^2)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

با توجه به دورابطه ی زیر:

$$\int \frac{dx}{(c^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{c^2(c^2+x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\int \frac{xdx}{(c^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-1}{(c^2+x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

حال داریم:

$$\bar{E} = \frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\left[\hat{\mathrm{r}}_c \mathrm{r_c}\left(\frac{\acute{\mathrm{z}}-\mathrm{z}}{\mathrm{r_c}^2(\mathrm{r_c}^2+(\acute{\mathrm{z}}-\mathrm{z})^2)^{\frac{1}{2}}}\Bigg|_a^b\right) + \hat{\mathrm{z}}\left(\frac{(\acute{\mathrm{z}}-\mathrm{z})d\acute{z}}{(\mathrm{r_c}^2+(\acute{\mathrm{z}}-\mathrm{z})^2)^{\frac{3}{2}}}\Bigg|_a^b\right)\right]$$

$$\bar{E} = \frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{\hat{\mathrm{r}}_c}{\mathrm{r_c}}\left[\frac{\mathrm{b}-\mathrm{z}}{(\mathrm{r_c}^2+(\mathrm{b}-\mathrm{z})^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\mathrm{a}-\mathrm{z}}{(\mathrm{r_c}^2+(\mathrm{a}-\mathrm{z})^2)^{\frac{1}{2}}}\right] + \hat{\mathrm{z}}\left[\frac{1}{(\mathrm{r_c}^2+(\mathrm{b}-\mathrm{z})^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{(\mathrm{r_c}^2+(\mathrm{a}-\mathrm{z})^2)^{\frac{1}{2}}}\right]\right\} \quad (\mathrm{V}m^{-1})$$

با فرض زاویه های α و β داریم:

$$\bar{E} = \frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{\hat{\mathrm{r}}_c}{\mathrm{r_c}}(\sin\beta + \sin\alpha) + \frac{\hat{\mathrm{z}}}{\mathrm{r_c}}(\cos\beta + \cos\alpha)\right\} \quad (\mathrm{V}m^{-1})$$

حال با فرض اینکه $a \to \infty$ و $\mathrm{b} \to \infty$ و یا اینکه $\alpha \to 90$ و $\beta \to 90$ داریم:

$$\bar{E} = \frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0 \mathrm{r_c}}\hat{\mathrm{r}}_c \qquad (\mathrm{V}m^{-1})$$

۱۳- مطلوب است محاسبه ی شدت میدان الکتریکی ناشی از بار صفحه ای مسطح ، بینهایت ، با چگالی یکنواخت ρ_S در نقطه ای روی محور Z ها در شرایط خلا.

حل: : فرض می کنیم صفحه در موقعیت *z=0* قرار گرفته است ، مولفه های *x , y* میدان $\bar{E}$ در نقطه ی *P(0,0,z)* ، بدلیل تقارن یکدیگر را خنثی کرده بنابراین $\bar{E}$ فقط در جهت *z* مولفه خواهد داشت.

$$\overline{dE}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho_S d\acute{s}}{R^2}\hat{a}_R$$

$$d\acute{s}=\acute{r}_c d\acute{r}_c\, d\acute{\varphi}$$

$$R=(\acute{r}_c{}^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\bar{R}=\hat{z}z-\hat{\acute{r}}_c\,\acute{r}_c$$

$$\hat{a}_R=\frac{\hat{z}z-\hat{\acute{r}}_c\,\acute{r}_c}{(\acute{r}_c{}^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\overline{dE}=\frac{\rho_S}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\hat{z}z-\hat{\acute{r}}_c\,\acute{r}_c)\,\acute{r}_c d\acute{r}_c\, d\acute{\varphi}}{(\acute{r}_c{}^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\bar{E}=\int_s\overline{dE}=\int_{.}^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\rho_S}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\acute{r}_c d\acute{\varphi} d\acute{r}_c}{(\acute{r}_c{}^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(\hat{z}z-\hat{\acute{r}}_c\,\acute{r}_c)\qquad (\mathrm{V}m^{-1})$$

با توجه به اینکه داریم:

$$\hat{\mathrm{r}}_c=\hat{\mathrm{x}}\cos\varphi+\hat{\mathrm{y}}\sin\varphi$$

بنابراین انتگرال بالا به شکل زیر در خواهد آمد:

$$\bar{E} = \int_s \overline{dE} = \frac{\rho_s}{4\pi\varepsilon_0}\left[\hat{z}\mathrm{z}\int_{.}^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{\acute{r}_c d\acute{\varphi} d\acute{r}_c}}{(\mathrm{\acute{r}_c}^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} - \left(\hat{\mathrm{x}}\int_{.}^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{\acute{r}_c}^2\cos\acute{\varphi}\,\mathrm{d\acute{\varphi} d\acute{r}_c}}{(\mathrm{\acute{r}_c}^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} + \hat{\mathrm{y}}\int_{.}^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{\acute{r}_c}^2\sin\acute{\varphi}\,\mathrm{d\acute{\varphi} d\acute{r}_c}}{(\mathrm{\acute{r}_c}^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right)\right] (\mathrm{V}m^{-1})$$

در عبارت فوق مقدار دو انتگرال پایانی ، بدلیل انتگرال گیری از $\cos\varphi$ و $\sin\varphi$ در دوره ی تناوب خویش، صفر خواهد شد که اثبات ریاضی خنثی شدن مولفه های $x\,,y$ میدان $\bar{E}$ می باشد ، بنابراین:

$$\bar{E} = \hat{z}\mathrm{z}\frac{\rho_s}{4\pi\varepsilon_0}\int_{.}^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{\acute{r}_c d\acute{\varphi} d\acute{r}_c}}{(\mathrm{\acute{r}_c}^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

با انتگرال گیری از عبارت فوق خواهیم داشت:

$$\bar{E} = \hat{z}\mathrm{z}\frac{\rho_s}{4\pi\varepsilon_0}(2\pi)\left[\frac{-1}{(\mathrm{\acute{r}_c}^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}\right]\Bigg|_0^{\infty}$$

$$\bar{E} = \hat{z}\,\frac{\rho_s}{2\varepsilon_0} \qquad (\mathrm{V}m^{-1})$$

مقدار $\bar{E}$ برای z<0 نیز برابر:

$$\bar{E} = -\,\hat{z}\,\frac{\rho_s}{2\varepsilon_0} \qquad (\mathrm{V}m^{-1})$$

۱۴- مطلوب است محاسبه ی شدت میدان الکتریکی ناشی از کره ی بارداری به شعاع a ، با چگالی یکنواخت ρ_v در نقطه P(.,.,z) در شرایط خلا. ($z > a$)

حل: مرکز کره را مبدا مختصات فرض می کنیم ، مولفه های x , y میدان $\bar{E}$ در نقطه ی $P(0,0,z)$ ، بدلیل تقارن یکدیگر را خنثی کرده بنابراین $\bar{E}$ فقط در جهت z مولفه خواهد داشت.

$$\overline{dE}= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho_v d\acute{v}}{R^2}\,\hat{a}_R$$

$$d\acute{v}= \acute{r}_s{}^2 \sin\acute{\theta}\ d\acute{\theta}\ d\acute{r}_s\ d\acute{\varphi}$$

اگر تمام متغیرها را ثابت نگه داریم و $\acute{\varphi}$ را از 0 تا 2π تغییر دهیم. یک دیسک خواهیم داشت که میدان مربوط به آن، به دلیل تقارن فقط در امتداد z است. پس برای بدست آوردن مولفه $\overline{dE_z}$:

$$\overline{dE_z}= \overline{dE}\cos\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho_v d\acute{v}}{R^2}\cos\alpha=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho_v\, \acute{r}_s{}^2 \sin\acute{\theta}\ d\acute{\theta}\ d\acute{r}_s\ d\acute{\varphi}}{R^2}\cos\alpha$$

برای حل عبارت بالا نیاز به حل سه انتگرال است. انتگرال اول مربوط به $\acute{\varphi}$ است که در فاصله 0تا2π گرفته می شود. برای حل دو انتگرال دیگر مناسب است که R و $\acute{r}_s$ را به عنوان متغیرهای مستقل در نظر بگیریم. با استفاده از شکل می توانیم بنویسیم:

$$\acute{r}_s{}^2= z^2+R^2-2zR\cos\alpha$$

$$R^2= z^2+ \acute{r}_s{}^2-2z\,\acute{r}_s\cos\acute{\theta}$$

بنابراین:

$$\cos\alpha = \frac{z^2+R^2- \acute{r}_s{}^2}{2zR}$$

$\cos \acute{\theta} = \frac{z^2 + \acute{r}_s{}^2 - R^2}{2z\, \acute{r}_s}$

با مشتق گیری ازعبارت فوق بر حسب $\acute{\theta}$ خواهیم داشت:

$\sin \acute{\theta} d\acute{\theta} = \frac{RdR}{z\, \acute{r}_s}$

در محدوده ی $\pi \leq \acute{\theta} \leq$ ۰ و $z- \acute{r}_s \leq R \leq z+ \acute{r}_s$

$\bar{E}_z = \hat{z} \frac{\rho_v}{8\pi\varepsilon_0 z^2} \int_0^{2\pi} \int_{\acute{r}_s=0}^{\acute{r}_s=a} \int_{R=z-\acute{r}_s}^{R=z+\acute{r}_s} \acute{r}_s \left(1 + \frac{z^2 - \acute{r}_s{}^2}{R^2}\right) dR d\acute{r}_s d\acute{\varphi}$

حاصل این انتگرال برابر است با:

$\bar{E}_z = \hat{z} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{\frac{4}{3}\pi a^3 \rho_v}{z^3}\right)$

که در آن $\frac{4}{3}\pi a^3 \rho_v$ مقدار بارQ کره ای با شعاع a به چگالی ρ_v می باشد ، با باز نویسی عبارت فوق و با تبدیل $\hat{z}$ به $\hat{r}_s$ و z به r_s خواهیم داشت:

$\bar{E} = \hat{r}_s \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_s{}^2} \qquad (Vm^{-1})$

۱۵- پتانسیل ناشی از بار خطی با چگالی ثابت ρ_l مطابق شکل ، بشعاع r_0 برروی محور z بدست آورید.

حل:

روش اول- می دانیم:

$$\bar{E} = \hat{z}\frac{zr_0\rho_l}{2\varepsilon_0({r_0}^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\ (Vm^{-1})$$

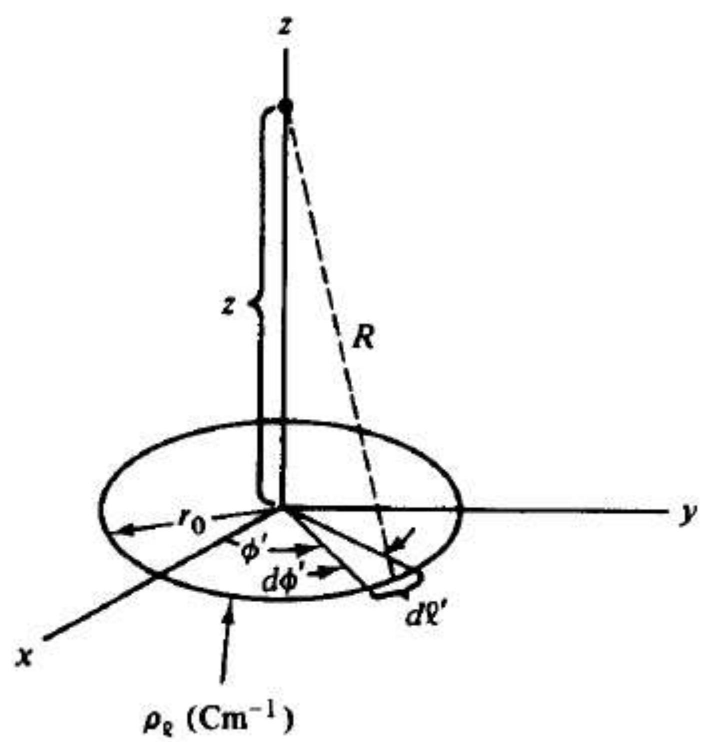
$$\bar{dl} = \hat{z}dz$$

$$V_{z(\infty)} = \int_{\infty}^{z}(-\bar{E}.\bar{dl}) = \int_{\infty}^{z}\left(-\left(\hat{z}\frac{zr_0\rho_l}{2\varepsilon_0({r_0}^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right).(\hat{z}dz)\right)$$

$$V_{z(\infty)} = -\frac{r_0\rho_l}{2\varepsilon_0}\int_{\infty}^{z}\frac{zdz}{({r_0}^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$V_{z(\infty)} = \left.\frac{r_0\rho_l}{2\varepsilon_0({r_0}^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}\right|_{\infty}^{z}$$

$$V_{z(\infty)} = \frac{r_0\rho_l}{2\varepsilon_0({r_0}^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}\quad (V)$$



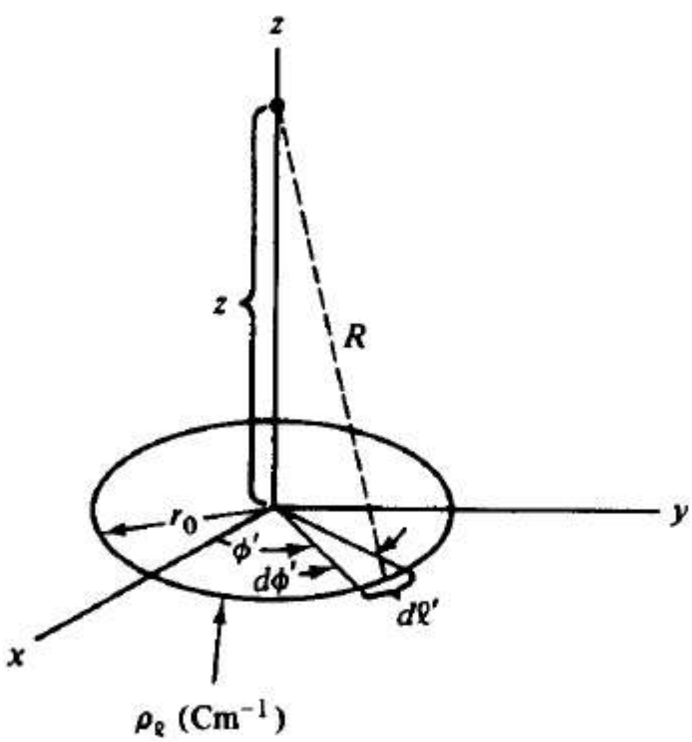
روش دوم:

$$V_{z(\infty)} = \int_{\infty}^{z} -\frac{\hat{z} z r_0 \rho_l}{2\varepsilon_0 (r_0{}^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} . (\hat{z} dz)$$

$$V_{z(\infty)} = -\frac{r_0 \rho_l}{2\varepsilon_0} \int_{\infty}^{z} \frac{z dz}{(r_0{}^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$V_{z(\infty)} = \left. \frac{r_0 \rho_l}{2\varepsilon_0 (r_0{}^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} \right|_{\infty}^{z}$$

$$V_{z(\infty)} = \frac{r_0 \rho_l}{2\varepsilon_0 (r_0{}^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} \qquad (V)$$



۱۶- پتانسیل ناشی از بار سطحی کروی هم مرکز با مبدا مختصات و با چگالی ثابت ρ_s و شعاع r_0 را در $r_s = 2r_0$ بدست آورید.

$$V = \int -\left(\widehat{r_s}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 {r_s}^3}\right).\left(\hat{r}_s\, d\acute{r}_s \;+\; \hat{\theta}\, r_s d\acute{\theta} \;+\; \hat{\varphi}\;\, r_s \sin\theta\, d\acute{\varphi}\right)$$

$$V = \int_{r_0}^{2r_0} -\frac{q d\acute{r}_s}{4\pi\varepsilon_0 {r_s}^3}$$

$$V = -\frac{q}{8\pi\varepsilon_0 {r_s}^2}\bigg|_{r_0}^{2r_0}$$

$$V = \frac{-q}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{4{r_0}^2} - \frac{1}{{r_0}^2}\right)$$

$$V = \frac{3q}{32\pi\varepsilon_0 {r_0}^2}$$

۱۷- در فضای آزاد(Free space) بار پیوسته ی حجمی به شعاع a و چگالی ρ_v موجود است مطلوب است شدت میدان الکتریکی در هر نقطه.

$$\rho_v = \frac{\rho_0 \mathrm{r_s}^2}{a^2} \quad [Cm^{-3}]$$

حل: سطح گاوسی را کره ای به مرکز مبدا و به شعاع $\mathrm{r_s}$ فرض کرده و از طرفی می دانیم:

$$\oint_s \bar{E}.\overline{ds} = \frac{Q_{en}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_v \rho_v dv$$

برای $a > \mathrm{r_s}$ داریم:

$$\oint_s \bar{E}.\overline{ds} = \oint_s (\hat{\mathrm{r}}_\mathrm{s} \mathrm{E}_{\mathrm{r_s}}).(\hat{\mathrm{r}}_\mathrm{s}\, \mathrm{ds}) = \mathrm{E}_{\mathrm{r_s}} \oint_s \mathrm{ds} = \mathrm{E}_{\mathrm{r_s}}(4\pi \mathrm{r}_s{}^2)$$

$$Q_{en}=\int_v \rho_v dv$$

$$Q_{en}= \int_0^{\mathrm{r}_s}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\rho_0 \mathrm{r_s}^2}{a^2}\ \acute{\mathrm{r}}_\mathrm{s}{}^2 \sin\acute{\theta}\ \ d\acute{\theta}\mathrm{d}\acute{\varphi}\mathrm{d}\acute{\mathrm{r}}_\mathrm{s}$$

$$Q_{en}=4\,\pi\rho_0 \frac{\mathrm{r_s}^5}{5a^2}$$

$$\mathrm{E}_{\mathrm{r_s}}(4\pi \mathrm{r}_s{}^2) = 4\,\pi\rho_0 \frac{\mathrm{r_s}^5}{5\varepsilon_0 a^2}$$

$$\mathrm{E}_{\mathrm{r_s}} = \rho_0 \frac{\mathrm{r_s}^3}{5\varepsilon_0 a^2}$$

$$\overline{\mathrm{E}}_{\mathrm{r_s}} = \hat{\mathrm{r}}_\mathrm{s} \frac{\rho_0}{5\varepsilon_0}\frac{\mathrm{r_s}^3}{a^2}$$

برای $a < r_s$ داریم:

$$Q_{en} = \int_v \rho_v dv$$

$$Q_{en} = \int_0^{a} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\rho_0 r_s^2}{a^2} \acute{r}_s^2 \sin\acute{\theta} \, d\acute{\theta} d\acute{\varphi} d\acute{r}_s$$

$$Q_{en} = \frac{4}{5} \pi \rho_0 a^3$$

$$\oint_s \bar{E} . \overline{ds} = \oint_s (\hat{r}_s E_{r_s}) . (\hat{r}_s \, ds) = E_{r_s} \oint_s ds = E_{r_s} (4\pi r_s^2)$$

$$E_{r_s} (4\pi r_s^2) = \frac{4}{5\varepsilon_0} \pi \rho_0 a^3$$

$$E_{r_s} = \frac{1}{5\varepsilon_0} \frac{\rho_0 a^3}{r_s^2}$$

$$\overline{E}_{r_s} = \hat{r}_s \frac{1}{5\varepsilon_0} \frac{\rho_0 a^3}{r_s^2}$$

۱۸- معادله ی خطوط میدان ناشی از دو قطبی الکتریکی را بدست آورید.

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qd\cos\theta}{\mathrm{r_s}^2}$$

$$\bar{E} = -\nabla V$$

$$\bar{E} = -\left[\hat{\mathrm{r}}_s\frac{\partial V}{\partial \mathrm{r_s}} + \hat{\theta}\frac{1}{\mathrm{r_s}}\frac{\partial V}{\partial \theta} + \hat{\varphi}\frac{1}{\mathrm{r_s} sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right]$$

$$\bar{E} = \frac{qd}{4\pi\varepsilon_0 \mathrm{r_s}^3}\left[\hat{\mathrm{r}}_s 2\cos\theta + \hat{\theta}\sin\theta\right]$$

$$\frac{d\mathrm{r_s}}{\mathrm{E_{r_s}}} = \frac{\mathrm{r_s} d\theta}{\mathrm{E_\theta}}$$

$$\frac{d\mathrm{r_s}}{2\cos\theta} = \frac{\mathrm{r_s} d\theta}{\sin\theta}$$

$$\frac{d\mathrm{r_s}}{\mathrm{r_s}} = \frac{2\cos\theta d\theta}{\sin\theta}$$

$$\int\frac{d\mathrm{r_s}}{\mathrm{r_s}} = \int\frac{2\cos\theta\, d\theta}{\sin\theta}$$

$$\ln \mathrm{r_s} = 2\ln\sin\theta$$

$$\mathrm{r_s} = k\sin^2\theta$$

۱۹- میدان مغناطیسی ناشی از جریان I که بر روی محور z ها قرار دارد را بدست آورید.

$$\overline{H}_{(r_c,\varphi,z)} = \int_a^b \frac{I(\hat{z}d\acute{z}) \times [\hat{r}_c r_c - \hat{z}(\acute{z}-z)]}{4\pi({r_c}^2 + (\acute{z}-z)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\overline{dH} = \hat{\varphi}\frac{I r_c d\acute{z}}{4\pi({r_c}^2 + (\acute{z}-z)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\overline{H} = \hat{\varphi}\frac{I r_c}{4\pi}\int_a^b \frac{d\acute{z}}{({r_c}^2 + (\acute{z}-z)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\overline{H} = \hat{\varphi}\frac{I}{4\pi r_c}\left[\left[\frac{\mathrm{b}-\mathrm{z}}{({\mathrm{r_c}}^2 + (\mathrm{b}-\mathrm{z})^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\mathrm{a}-\mathrm{z}}{({\mathrm{r_c}}^2 + (\mathrm{a}-\mathrm{z})^2)^{\frac{1}{2}}}\right]\right]$$

$$\overline{H} = \hat{\varphi}\frac{I}{4\pi r_c}(\sin\alpha + \sin\beta) \qquad (Am^{-1})$$

حال با فرض اینکه $a \to \infty$ و $\mathrm{b} \to \infty$ و یا اینکه $\alpha \to 90$ و $\beta \to 90$ داریم:

$$\overline{H} = \hat{\varphi}\frac{I}{2\pi r_c} \qquad (Am^{-1})$$

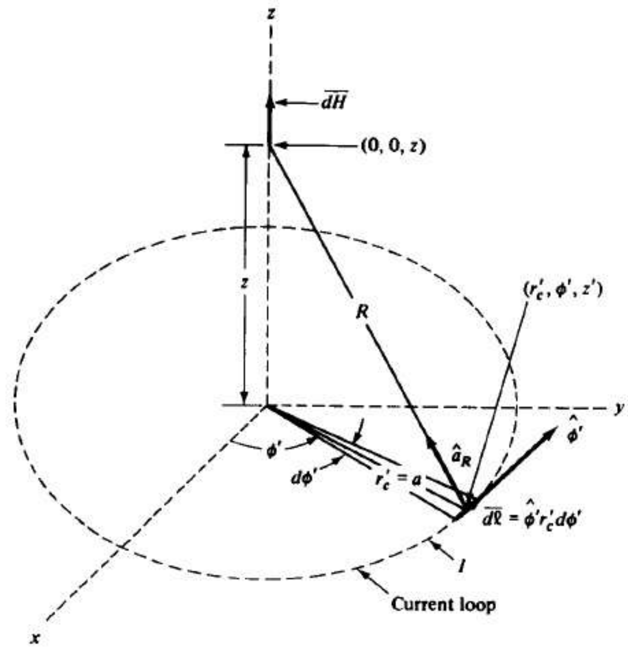
۲۰- میدان مغناطیسی ناشی از جریان I که در حلقه ی دایره ای شکل به مرکز مبدا مختصات را در نقطه (0,0,z) بدست آورید.

$$\overline{dH} = \frac{I\left(\hat{\varphi}\acute{r}_c d\acute{\varphi}\right) \times \left(\hat{z}z - \widehat{r_c}\acute{r}_c\right)}{4\pi\left({\acute{r}_c}^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\overline{dH} = \hat{z}\frac{I{\acute{r}_c}^2 d\acute{\varphi}}{4\pi\left({\acute{r}_c}^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\overline{H} = \int_0^{2\pi} \overline{dH}$$

$$\overline{H} = \hat{z}\frac{I{\acute{r}_c}^2}{4\pi\left({\acute{r}_c}^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{2\pi} d\acute{\varphi}$$



$$\overline{H} = \hat{z}\frac{I{\acute{r}_c}^2}{2\left({\acute{r}_c}^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\overline{H} = \hat{z}\frac{Ia^2}{2(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad (Am^{-1})$$

۲۱- چگالی شار میدان مغناطیسی را در نقطه ای روی محور یک حلقه ی دایره ای به شعاع b و حامل جریان مستقیم I ، پیدا کنید.

حل:

$$\mathrm{dl}' = \hat{\varphi} r_c d\varphi'$$

$$R = \hat{z}z - \hat{r}_c r_c$$

$$R = (z^2 + {r_c}^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\mathrm{dl}' \times R = \hat{\varphi} r_c d\varphi' \times (\hat{z}z - \hat{r}_c r_c)$$

$$= \hat{r}_c r_c z d\varphi' + \hat{z} {r_c}^2 d\varphi'$$

به دلیل تقارن استوانه ای به سادگی دیده می شود که مؤلفه $\hat{r}_c$ حذف می گردد.پس داریم:

$$\bar{B} = \frac{\mu_\circ I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \hat{z} \frac{b^2 d\varphi'}{(z^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\bar{B} = \hat{z} \frac{\mu_\circ I}{2} \frac{b^2}{(z^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}$$

۲۲- دو حلقه به شعاع a حامل جریان هم جهت I هستند و به فاصله d و به موازات هم قرار گرفته اند در چه نقطه ای روی محور و بین دو حلقه H حداکثر است؟

حل:

$$\bar{H} = \frac{Ia^2}{4r_c^3}(\hat{r}_c 2\cos\theta + \hat{\theta}\sin\theta)$$

$$\frac{Ia^2}{2(z^2+a^2)} + \frac{Ia^2}{2((d-z)^2+a^2)} = H$$

$$\frac{dH}{\mathrm{dz}} = \frac{Ia^2}{2}\left[-3z(z^2+a^2)^{\frac{-5}{2}} + 3\left((d-z)((d-z)^2+a^2)^{\frac{-5}{2}}\right)\right] = 0$$

$$\frac{-3z}{(\mathrm{z}^2+\mathrm{a}^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{3(\mathrm{d}-\mathrm{z})}{[(\mathrm{d}-\mathrm{z})^2+\mathrm{a}^2]^{\frac{5}{2}}} = 0$$

$$z = \frac{d}{2}$$

۲۳- مطلوب است محاسبه ی شدت میدان الکتریکی ناشی از کره ی بارداری به شعاع a ، با چگالی یکنواخت ρ_v در نقطه P(.,.,z) در شرایط خلا. ($z > a$)

حل: مرکز کره را مبدا مختصات فرض می کنیم ، مولفه های x , y میدان $\bar{E}$ در نقطه ی $P(0,0,z)$ ، بدلیل تقارن یکدیگر را خنثی کرده بنابراین $\bar{E}$ فقط در جهت z مولفه خواهد داشت.

$$\overline{dE}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho_v d\acute{v}}{R^2}\hat{a}_R$$

$$d\acute{v}=\acute{r}_s^{\,2}\sin\acute{\theta}\ d\acute{\theta}\ d\acute{r}_s\ d\acute{\varphi}$$

اگر تمام متغیرها را ثابت نگه داریم و $\acute{\varphi}$ را از 0 تا 2π تغییر دهیم. یک دیسک خواهیم داشت که میدان مربوط به آن، به دلیل تقارن فقط در امتداد z است. پس برای بدست آوردن مولفه $\overline{dE_z}$:

$$\overline{dE_z}=\overline{dE}\cos\alpha=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho_v d\acute{v}}{R^2}\cos\alpha=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho_v\,\acute{r}_s^{\,2}\sin\acute{\theta}\ d\acute{\theta}\ d\acute{r}_s\ d\acute{\varphi}}{R^2}\cos\alpha$$

برای حل عبارت بالا نیاز به حل سه انتگرال است. انتگرال اول مربوط به $\acute{\varphi}$ است که در فاصله 0تا2π گرفته می شود. برای حل دو انتگرال دیگر مناسب است که R و $\acute{r}_s$ را به عنوان متغیرهای مستقل در نظر بگیریم. با استفاده از شکل می توانیم بنویسیم:

$$\acute{r}_s^{\,2}=z^2+R^2-2zR\cos\alpha$$

$$R^2=z^2+\acute{r}_s^{\,2}-2z\,\acute{r}_s\cos\acute{\theta}$$

بنابراین:

$$\cos\alpha=\frac{z^2+R^2-\acute{r}_s^{\,2}}{2zR}$$

$$\cos\acute{\theta} = \frac{z^2 + \acute{r}_s{}^2 - R^2}{2z\,\acute{r}_s}$$

با مشتق گیری ازعبارت فوق بر حسب $\acute{\theta}$ خواهیم داشت:

$$\sin\acute{\theta}\,d\acute{\theta} = \frac{RdR}{z\,\acute{r}_s}$$

در محدوده ی $\cdot \le \acute{\theta} \le \pi$ و $z - \acute{r}_s \le R \le z + \acute{r}_s$

$$\bar{E}_z = \hat{z}\,\frac{\rho_v}{8\pi\varepsilon_0 z^2}\int_0^{2\pi}\int_{\acute{r}_s=0}^{\acute{r}_s=a}\int_{R=z-\acute{r}_s}^{R=z+\acute{r}_s} \acute{r}_s\left(1+\frac{z^2-\acute{r}_s{}^2}{R^2}\right)dRd\acute{r}_s d\acute{\varphi}$$

حاصل این انتگرال برابر است با:

$$\bar{E}_z = \hat{z}\,\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\frac{4}{3}\pi a^3\rho_v}{z^3}\right)$$

که در آن $\frac{4}{3}\pi a^3\rho_v$ مقدار بارQ کره ای با شعاع a به چگالی ρ_v می باشد ، با باز نویسی عبارت فوق و با تبدیل $\hat{z}$ به $\hat{r}_s$ و z به r_s خواهیم داشت:

$$\bar{E} = \hat{r}_s\,\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_s{}^2} \qquad (Vm^{-1})$$

۲۴-	مطلوبست میدان حاصل از دو قطبی الکتریکی در هرنقطه از فضا.

حل:

$$V = V_{-q} + V_{+q}$$

$$V_{+q} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1}$$

$$V_{-q} = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{R_2 - R_1}{R_2 R_1}\right)$$

اگر $d \cong R_2 - R_1$ و $\mathrm{r}_s \gg d$ آنگاه داریم:

$$V = \frac{qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 {\mathrm{r}_s}^2}$$

$$\bar{E} = -\nabla V$$

$$\bar{E} = -\left(\hat{\mathrm{r}}_s \frac{\partial V}{\partial \mathrm{r}_s} + \frac{\hat{\theta}}{\mathrm{r}_s}\frac{\partial V}{\partial \theta} + \hat{\varphi}\frac{\partial V}{\mathrm{r}_s \sin\theta}\right)$$

$$\bar{E} = -\left(\hat{\mathrm{r}}_s \frac{qd\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 {\mathrm{r}_s}^3} - \hat{\theta}\frac{qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 {\mathrm{r}_s}^3}\right)$$

$$\bar{E} = \frac{qd}{4\pi\varepsilon_0 {\mathrm{r}_s}^3}\left(\hat{\mathrm{r}}_s 2\cos\theta - \hat{\theta}\sin\theta\right)$$

۲۵- کره ای فلزی به شعاع a در فضای آزاد هم مرکز با مبدا دارای پتانسیل v_0 است.انرژی پتانسیل الکتریکی کل سیستم w۲)چه قدر است؟

$$v_0=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

$$w=\frac{1}{2}\int\rho\varphi dv$$

$$=\frac{1}{2}\int\rho_s v_0 ds$$

$$=\frac{1}{2}v_0\int\rho_s\, ds=\frac{1}{2}v_0 q$$

$$q=v_0(4\pi\varepsilon_0 a)$$

$$w=2\pi\varepsilon_0 a v_0^2$$

۲۶- دو سیم پیچ مشابه هم محور ، هر یک دارای N دور و شعاع b ، در فاصله d از یکدیگر قراردارند. جریان I با جهت یکسان از هر دو سیم پیچ می گذرد.

چگالی شار مغناطیسی $\bar{B} = \hat{x}B$ را در نقطه دو سیم پیچ و فاصله یکسان از هر دو پیدا کنید.

حل:

چگالی شار مغناطیسی ناشی از یک حلقه جریان را می توان توسط قانون بیوساوار به دست آورد.

$$\bar{B} = \frac{\mu_\circ}{4\pi}\int \frac{IdL \times (\overline{R_2} - \overline{R_1})}{|\overline{R_2} - \overline{R_1}|^3}$$

$$dL = \hat{\varphi} b d\varphi \qquad ,\overline{R_2} = \hat{z}z \qquad ,R_1 = \hat{r}b$$

$$\bar{B} = \frac{\mu_\circ Ib}{4\pi}\int_\circ^{2R} \frac{d\varphi\hat{\varphi} \times (\hat{z}\frac{d}{2} - \hat{r}b)}{(z^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}$$

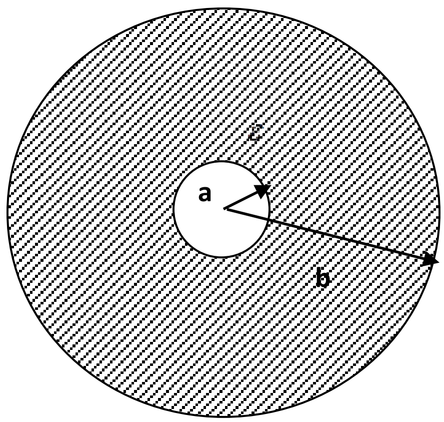
$$\bar{B} = \frac{\mu_\circ IbZ}{2(z^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}$$

برای این مسئله می توان از نتیجه بدست آمده کمک گرفت و نوشت:

$$\overline{\mathrm{B}} = \mathrm{x}^1 \frac{\mu_\circ \mathrm{NIb}^2}{2}\left[\frac{1}{((x+d/2)^2+b^2)^{3/2}} + \frac{1}{((\frac{d}{2}-x)^2+b^2)^{3/2}}\right]$$

۲۷- عایق بین دو پوستهٔ کروی هادی به شعاع های a و b نا همگن است و گذر دهی آن به صورت $\varepsilon = 3\varepsilon r_S$ تغییر می کند. ظرفیت خازن حاصل را بیابید.

حل: بار +Q را روی هادی داخل و −Q را روی هادی بیرونی. میدان داخلی خازن را میابیم. با توجه به تقارن مسئله و به کمک قانون گاوس به دست می آوریم.



$$\overline{D} = \frac{Q}{4\pi r_s^2}\hat{r}_s$$

$$\overline{E} = \frac{\overline{D}}{E} = \frac{q}{12\pi\varepsilon . r_S^3}\hat{r}_S$$

حال اختلاف پتانسیل بین دو هادی را می یابیم.

$$v_a - v_b = -\int \overline{E}.d\overline{L}$$

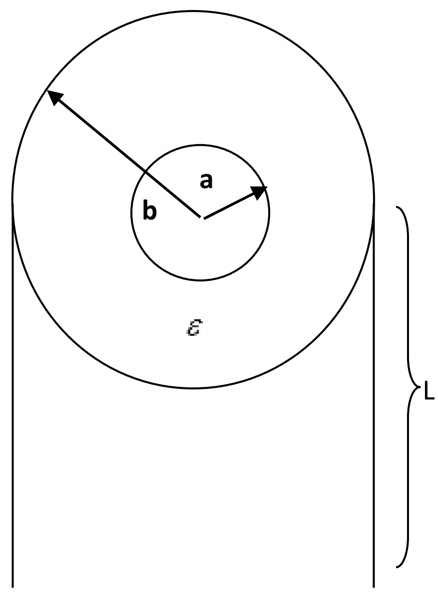
$$v_a - v_b = -\frac{Q}{12\pi\varepsilon}\int_a^b \frac{dr_s}{r_s^3} = \frac{Q}{24\pi\varepsilon}\left[\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right]$$

$$c = \frac{Q}{V_a - V_b} = 24\pi\varepsilon.\frac{b^2 a^2}{b^2 - a^2}$$

۲۸- دو پوستهٔ استوانه هادی هم محور یک خازن را تشکیل می دهند. ظرفیت را مطابق مشکل بیابید. $\varepsilon_R = 2 + \frac{4}{rc}$

حل:

بار Q را روی هادی داخلی قرار می دهیم



$$\overline{D} = \hat{r}_c \frac{Q}{2\pi L r_c}$$

$$\overline{E} = \frac{\overline{D}}{\varepsilon.\varepsilon_R} = \frac{Q}{2\pi\ \varepsilon.L}\frac{1}{4+2r_c}\hat{r}_c$$

$$V = -\int_a^b \overline{E}.d\overline{L} =$$

$$V = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon L}\int_a^b \frac{dr_c}{2+r_c} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon L}\ln\left(\frac{b+2}{a+2}\right)$$

$$C = \frac{Q}{V}$$

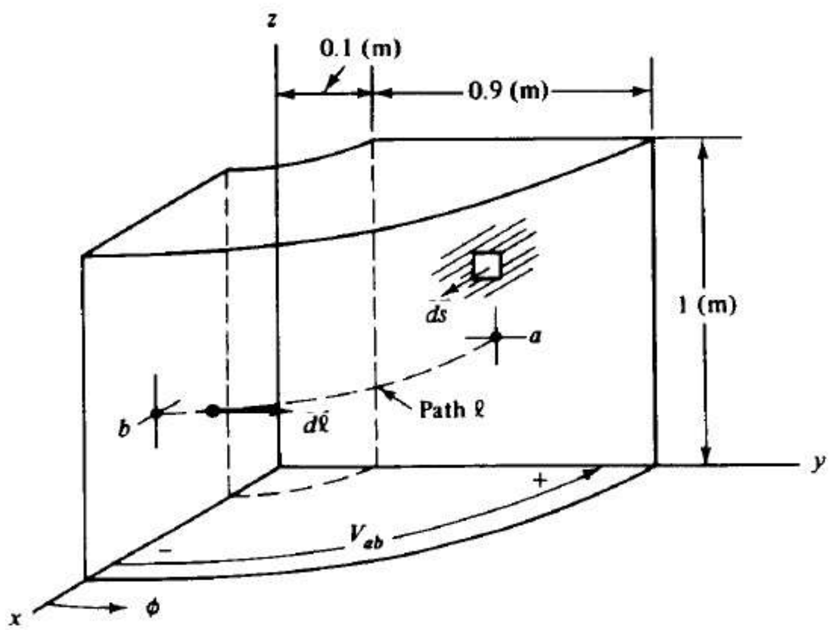
$$C = 4\pi\varepsilon.L/\ln\left(\frac{b+2}{a+2}\right)$$

۲۹- مطلوب است محاسبه ی مقاومت بین سطوح

الف) $\varphi = 0$ و $\varphi = \frac{\pi}{2}$ که $V_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = 0$

ب) $z = z$ و $z = 0$ که $V_{z=0} = 0$

پ) $r_c = b$ و $r_c = a$ که $V_{r_c=a} = 0$



حل:

الف)روش اول:

$$\nabla^2 V = 0$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{{r_c}^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0$$

$$\frac{dV}{d\varphi} = A$$

$$V = A\varphi + B$$

$$V_a = B$$

$$V_b = A\frac{\pi}{2} + B = 0$$

$$A = -\frac{2}{\pi}V_a$$

$$V = -\frac{2}{\pi}V_a\varphi + V_a = V_a\left(1 - \frac{2}{\pi}\varphi\right)$$

$$\bar{E} = -\nabla V$$

$$\bar{E} = -\hat{\varphi}\frac{1}{r_c}\frac{\partial V}{\partial \varphi}$$

$$\bar{E} = -\hat{\varphi}\frac{1}{r_c}\left(\frac{-2}{\pi}V_a\right)$$

$$\bar{E} = \hat{\varphi}\frac{2}{\pi}\frac{V_a}{r_c}$$

$$\bar{J} = \sigma\bar{E}$$

$$\bar{J} = \hat{\varphi}\frac{2\sigma}{\pi}\frac{V_a}{r_c}$$

$$I = \int \bar{J}.\overline{ds}$$

$$I = \int \left(\hat{\varphi}\frac{2\sigma}{\pi}\frac{V_a}{r_c}\right).(\hat{\varphi} dr_c dz)$$

$$I = \frac{2\sigma}{\pi} V_a h \ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$R = \frac{V}{I} = \frac{V_a - V_b}{I}$$

$$R = \frac{V_a}{\frac{2\sigma}{\pi} V_a h \ln\left(\frac{a}{b}\right)}$$

$$R = \frac{\pi}{2\sigma}\frac{1}{h \ln\left(\frac{a}{b}\right)}$$

الف)روش دوم:

$$G = \int \frac{\sigma ds}{l_s}$$

$$G = \sigma \int_0^h \int_a^b \frac{dr_c dz}{r_c\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{2\sigma}{\pi} h \ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$R = \frac{1}{G} = \frac{\pi}{2\sigma}\frac{1}{h \ln\left(\frac{a}{b}\right)}$$

الف)روش سوم:

$$R = \int \frac{dl}{\sigma S_l} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r_c d\varphi}{\sigma S_l}$$

$$R = \frac{\pi}{2\sigma} \frac{1}{h \ln\left(\frac{a}{b}\right)}$$

ب)روش اول:

$$\nabla^2 V = 0$$

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{dV}{dz} = A$$

$$V = Az + B$$

$$V_b = B = 0$$

$$V_a = Ah + B = 0$$

$$A = \frac{V_a}{h}$$

$$V = \frac{V_a}{h} z$$

$$\bar{E} = -\nabla V$$

$$\bar{E} = -\hat{z} \frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\bar{E} = -\hat{z} \left(\frac{V_a}{h}\right)$$

$$\bar{J} = \sigma \bar{E}$$

$$\bar{J} = -\hat{z}\sigma\left(\frac{V_a}{h}\right)$$

$$I = \int \bar{J}.\overline{ds}$$

$$I = \int\left(-\hat{z}\sigma\left(\frac{V_a}{h}\right)\right).(\hat{z}r_c dr_c d\varphi)$$

$$I = \frac{\sigma V_a \pi}{2h}\left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right)$$

$$R = \frac{V}{I} = \frac{V_a - V_b}{I}$$

$$R = \frac{V_a}{\frac{\sigma V_a \pi}{2h}\left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right)}$$

$$R = \frac{1}{\sigma\pi}\frac{2h}{\left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right)}$$

ب)روش دوم:

$$R = \int \frac{dl}{\sigma S_l} = \int_0^h \frac{dz}{\sigma\frac{1}{4}(b^2 - a^2)}$$

$$R = \frac{1}{\pi\sigma}\frac{2h}{\left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right)}$$

ب)روش سوم:

$$G = \int \frac{\sigma ds}{l_s}$$

$$G = \sigma \int_0^h \int_a^b \frac{r_c dr_c d\varphi}{h} = \frac{2\sigma\pi\left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right)}{2h}$$

$$R = \frac{1}{G} = \frac{1}{\pi\sigma}\frac{2h}{\left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right)}$$

ج)روش اول:

$$\nabla^2 V = 0$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r_c}\frac{\partial}{\partial r_c}\left(r_c \frac{\partial V}{\partial r_c}\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial r_c}\left(r_c \frac{\partial V}{\partial r_c}\right) = 0$$

$$r_c \frac{\partial V}{\partial r_c} = A$$

$$V = A \ln r_c + B$$

$$V_b = A \ln b + B$$

$$V_a = A \ln a + B = 0$$

$$A = \frac{V_b}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

$$B = \frac{-V_b}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \ln a$$

$$V = \frac{V_b}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \ln\left(\frac{r_c}{a}\right)$$

$$\bar{E} = -\nabla V$$

$$\bar{E} = -\widehat{r_c}\frac{1}{r_c}\frac{V_b}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

$$\bar{J} = \sigma\bar{E}$$

$$\bar{J} = -\widehat{r_c}\frac{1}{r_c}\frac{\sigma V_b}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

$$I = \int \bar{J}.\overline{ds}$$

$$I = \int \left(-\widehat{r_c}\frac{1}{r_c}\frac{\sigma V_b}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\right).(\widehat{r_c}d\varphi dz)$$

$$I = \frac{V_b h}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)}\frac{\pi\sigma}{2}$$

$$R = \frac{V}{I} = \frac{V_a - V_b}{I}$$

$$R = \frac{V_b}{\frac{V_b h}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)}\frac{\pi\sigma}{2}}$$

$$R = \frac{2}{\pi h\sigma}\ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

ج)روش دوم:

$$G = \int \frac{\sigma ds}{l_s}$$

$$G = \sigma\int_0^h\int_a^b \frac{dr_c dz}{r_c} = \frac{\pi\sigma h}{2}\frac{1}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)}$$

$$R = \frac{1}{G} = \frac{2}{\pi h\sigma}\ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

ج)روش سوم:

$$R = \int \frac{dl}{\sigma S_l} = \int_a^b \frac{2dr_c}{\sigma\pi rh}$$

$$R = \frac{2}{\pi h\sigma}\ln\left(\frac{a}{b}\right)$$