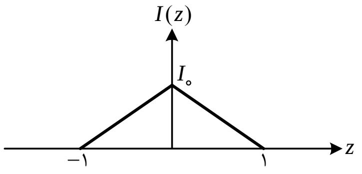
حل تست‌های آزمون ورودی سال ۹۳

■

۱- سیم هادی به طول ۲ متر روی محور z به طول متقارن در صفحه $x=۰$ دارای توزیع جریان I به صورت مثلثی و در امتداد محور z می‌باشد. جریان در $z=۰$ حداکثر و برابر با $I_{۰}$ (بر حسب آمپر) و در $z=۱\ \text{m}$ و $z=-۱\ \text{m}$ برابر با صفر است. کار انجام شده برای حرکت دادن این سیم به طور موازی در صفحه $x=۰$ به نقطه $y=۱۰\ \text{m}$ در میدان مغناطیسی $\boldsymbol{B}=۱۰^{-۴}\,e^{-۰/۱y}\hat{a}_x\ \ \text{Wb/m}^{۲}$، کدام است؟

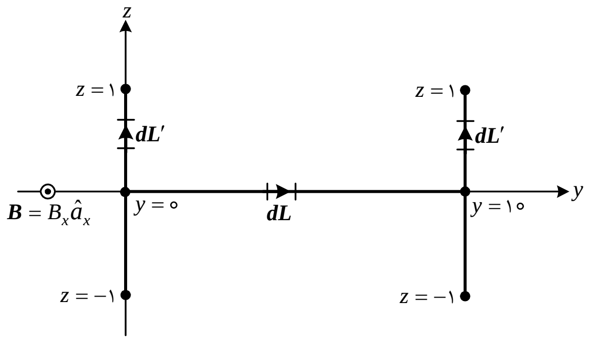
۱) $-۱۰^{-۳}\,I_{۰}\dfrac{۱-e}{e}$ ۲) $-۱۰^{-۳}\,I_{۰}\dfrac{e-۱}{e}$ ۳) $۲\times۱۰^{-۳}\,I_{۰}\dfrac{۱-e}{e}$ ۴) $۲\times۱۰^{-۳}\,I_{۰}\dfrac{e-۱}{e}$

حل: گزینه (۲) صحیح است.



با توجه به داده‌های مسأله، تابع توزیع جریان به صورت شکل مقابل است. بنابراین تابع توزیع جریان برابر است با:

$$I(z)=I_{۰}-I_{۰}\,|z| \qquad -۱\le z\le ۱$$



شکل مسأله به صورت مقابل است. نیروی عامل خارجی (که قرینه نیروی ناشی از میدان مغناطیسی است) وارد بر عنصر جریان $\boldsymbol{IdL'}$ در مسیر جابجایی برابر است با:

$$\boldsymbol{dF}=-\boldsymbol{dF}_m=-I(z)\boldsymbol{dL'}\times\boldsymbol{B}=-I(z)dz\hat{a}_z\times B_x\hat{a}_x=-I(z)B_x\hat{a}_y dz$$

پس کار لازم برای جابجایی عنصر جریان $\boldsymbol{IdL'}$ در عنصر جابجایی $\boldsymbol{dL}$ برابر است با:

$$dW=\boldsymbol{dF}\cdot\boldsymbol{dL}=\boldsymbol{dF}\cdot(dy\hat{a}_y)=-I(z)B_x dzdy$$

کل کار انجام شده از مجموع این عناصر کار به دست می‌آید:

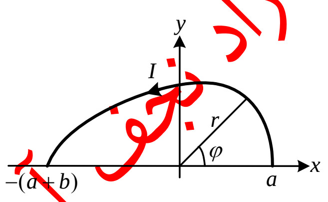
$$W=\int_{y=۰}^{۱۰}\int_{z=-۱}^{۱}dW=\int_{۰}^{۱۰}\int_{-۱}^{۱}-I_{۰}(۱-|z|)\times۱۰^{-۴}\,e^{-۰/۱y}dzdy=۱۰^{-۳}\times۲I_{۰}\int_{۰}^{۱}(۱-z)dz\int_{۰}^{۱۰}-۰/۱e^{-۰/۱y}dy=۲\times۱۰^{-۳}\,I_{۰}\left[z-\frac{z^{۲}}{۲}\right]_{۰}^{۱}\left[e^{-۰/۱y}\right]_{۰}^{۱۰}$$

$$=۱۰^{-۳}\,I_{۰}(e^{-۱}-۱)=-۱۰^{-۳}\,I_{۰}\frac{e-۱}{e}$$

رد گزینه: چون تمام عناصر جریان در جهت $+\hat{a}_z$ می‌باشند، با توجه به رابطه $\boldsymbol{dF}=-\boldsymbol{dF}_m=-I(z)B_x dz\hat{a}_y$، تمام عناصر نیروی عامل خارجی در خلاف جهت جابجایی ($+\hat{a}_y$) می‌باشند. پس کار عامل خارجی منفی است (زاویه بین بردار جابجایی و بردار نیرو دقیقاً ۱۸۰° است و کسینوس آن برابر -۱ است). بنابراین گزینه‌های (۱) و (۴) که مثبت هستند، مردودند (دقت کنید که $e-۱=-(۱-e)=۲/۷۱۸-۱=۱/۷۱۸>۰$).

مبحث درسی تست: میدانهای مغناطیسی ساکن در خلأ > نیروی مغناطیسی وارد بر جریان ($\boldsymbol{F}_m=\boldsymbol{IL}\times\boldsymbol{B}$) و محاسبه کار ناشی از نیرو ($dW=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{dL}$)

■



۲- یک قطعه سیم به شکل مارپیچ ارشمیدس خم گردیده که معادله آن توسط $r=a+\dfrac{b}{\pi}\varphi$ ($۰\le\varphi\le\pi$) در دستگاه مختصات استوانه‌ای داده می‌شود. سیم در صفحه xy قرار دارد و مطابق شکل حامل جریان I می‌باشد. میدان مغناطیسی $\boldsymbol{B}$ در مبدأ مختصات، کدام است؟

۱) $\dfrac{\mu_{۰}I}{۴b}\left(۱+\dfrac{b}{a}\right)\hat{a}_z$ ۲) $\dfrac{\mu_{۰}I}{\pi b}\left(۱+\dfrac{b}{a}\right)\hat{a}_z$ ۳) $\dfrac{\mu_{۰}I}{۴b}\ln\left(۱+\dfrac{b}{a}\right)\hat{a}_z$ ۴) $\dfrac{\mu_{۰}I}{\pi b}\ln\left(۱+\dfrac{b}{a}\right)\hat{a}_z$

حل: گزینه (۳) صحیح است.

از قانون بیوساوار:

$$\boldsymbol{B}=\int_C\frac{\mu_{۰}\boldsymbol{IdL'}\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'})}{۴\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|^{۳}}$$

$$\boldsymbol{dL'}=dr'\hat{a}_{r'}+r'd\varphi'\hat{a}_{\varphi'}\ \ ,\ \ \boldsymbol{r}=\boldsymbol{o}\ \ ,\ \ \boldsymbol{r'}=r'\hat{a}_{r'}+z'\hat{a}_z\Big|_{z=۰}=r'\hat{a}_{r'}\ \ ,\ \ |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|^{۳}=r'^{۳}\ \ ,\ \ r'=a+\frac{b}{\pi}\varphi'$$

$$\boldsymbol{dL'}\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'})=(dr'\hat{a}_{r'}+r'd\varphi'\hat{a}_{\varphi'})\times(-r'\hat{a}_{r'})=r'^{۲}\hat{a}_z d\varphi'$$

$$\boldsymbol{B}=\int_{\varphi'=0}^{\pi}\frac{\mu_0 I r'^2\hat{a}_z d\varphi'}{4\pi r'^3}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\hat{a}_z\int_0^{\pi}\frac{d\varphi'}{r'}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\hat{a}_z\int_0^{\pi}\frac{d\varphi'}{a+b\varphi'/\pi}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\hat{a}_z\left[\frac{\pi}{b}\ln\left(a+\frac{b}{\pi}\varphi'\right)\right]_0^{\pi}=\frac{\mu_0 I}{4b}\ln\left(1+\frac{b}{a}\right)\hat{a}_z$$

مبحث درسی تست: میدانهای مغناطیسی ساکن در خلأ > یافتن میدان مغناطیسی توزیع جریان خطی از قانون بیوساوار

■

۳- باری با چگالی $\rho_S=\rho_0(x^2+y^2+1)^{\frac{3}{2}}\ \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$ روی مربع واقع شده در $-1\text{ m}\le x\le 1\text{ m}$، $-1\text{ m}\le y\le 1\text{ m}$ و $z=-1\text{ m}$ قرار گرفته است. شدت میدان الکتریکی در مبدأ مختصات چند ولت بر متر است

۱) $\frac{\rho_0}{2\pi\varepsilon_0}$
۲) $\frac{\rho_0}{\pi\varepsilon_0}$
۳) $\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}$
۴) $\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}$

حل: گزینه (۲) صحیح است.

از قانون کولمب:

$$\boldsymbol{E}=\int_S\frac{\rho_S(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')dS'}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}$$

$$\rho_S=\rho_0(x'^2+y'^2+1)^{\frac{3}{2}}\ ,\ dS'=dS_{z'}=dx'dy'\ ,\ \boldsymbol{r}=\boldsymbol{o}\ ,\ \boldsymbol{r}'=x'\hat{a}_x+y'\hat{a}_y-\hat{a}_z\ ,\ \boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'=-x'\hat{a}_x-y'\hat{a}_y+\hat{a}_z\ ,\ |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3=(x'^2+y'^2+1)^{\frac{3}{2}}$$

$$\boldsymbol{E}=\int_{y'=-1}^{1}\int_{x'=-1}^{1}\frac{\rho_0(x'^2+y'^2+1)^{\frac{3}{2}}(-x'\hat{a}_x-y'\hat{a}_y+\hat{a}_z)dx'dy'}{4\pi\varepsilon_0(x'^2+y'^2+1)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(-x'\hat{a}_x-y'\hat{a}_y+\hat{a}_z)dx'dy'$$

$$=\frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\hat{a}_x\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}x'dx'dy'-\hat{a}_y\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}y'dx'dy'+\hat{a}_z\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}dx'dy'\right)$$

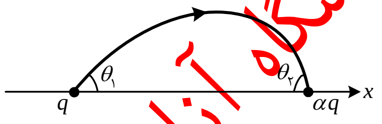
x' نسبت به x'، و y' نسبت به y' فرد است، بنابراین حاصل دو انتگرال اول صفراست، پس:

$$\boldsymbol{E}=\frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0}\hat{a}_z(2)(2)=\frac{\rho_0}{\pi\varepsilon_0}\hat{a}_z$$

مبحث درسی تست: میدانهای الکتریکی ساکن در خلأ > یافتن شدت میدان الکتریکی توزیع بار سطحی از قانون کولمب

■

۴- دو بار αq و q روی محور x قرار گرفته‌اند. یک خط میدان در زیر رسم شده است. اگر زاویه خط میدان وقتی که از بار q خارج می‌شود، θ_1 باشد. زاویه θ_2 آن هنگامی که به بار بین دو پوسته کروی رسانا ($a<r<b$) از ماده‌ای با رسانایی $\sigma(r)=\frac{\sigma_0}{r^2}$ پر شده است، که در آن r شعاع دستگاه کروی و a، b و σ_0 مقادیر q فرود می‌آید، با محور x، کدام است؟ (α عددی منفی است.)



۱) $\theta_2=|\alpha|\theta_1$
۲) $\theta_2=\frac{1}{|\alpha|}\theta_1$
۳) $\theta_1=\cos^{-1}\left(1-\frac{1+\cos\theta_2}{|\alpha|}\right)$
۴) $\theta_2=\cos^{-1}\left(1-\frac{1-\cos\theta_1}{|\alpha|}\right)$

حل: گزینه (۴) صحیح است.

مطابق شکل مقابل، نیمه دیگر خط میدان را تکمیل می‌کنیم. زاویه‌های فضایی Ω_1 و Ω_2 به ترتیب متناظر با نیم‌زاویه‌های θ_1 و θ_2 می‌باشند و برابرند با:

$$\Omega_1=2\pi(1-\cos\theta_1)\ ,\ \ \Omega_2=2\pi(1-\cos\theta_2)$$

شار الکتریکی خروجی از بار q که از زاویه فضایی Ω_1 می‌گذرد، برابر است با:

$$\phi_{e1}=\frac{\Omega_1}{4\pi}q=\frac{q}{2}(1-\cos\theta_1)$$

و شار الکتریکی ورودی با بار αq که از زاویه فضایی Ω_2 می‌گذرد، برابر است با:

$$\phi_{e2}=\frac{\Omega_2}{4\pi}q=\frac{|\alpha|q}{2}(1-\cos\theta_2)$$

اما چون هر خط میدان گذرنده از زاویه فضایی Ω_1، از زاویه فضایی Ω_2 نیز عبور می‌کند و بالعکس، این دو شار الکتریکی باهم برابرند. پس:

$$\frac{|\alpha|q}{2}(1-\cos\theta_2)=\frac{q}{2}(1-\cos\theta_1)\ \Rightarrow\ \cos\theta_2=1-\frac{1-\cos\theta_1}{|\alpha|}\ \Rightarrow\ \theta_2=\cos^{-1}\left(1-\frac{1-\cos\theta_1}{|\alpha|}\right)$$

مبحث درسی تست: میدانهای الکتریکی ساکن در خلأ > یافتن شار الکتریکی گذرنده از سطوح در ساختارهای متقارن کروی به کمک زاویه فضایی

■

۵- چگالی بار سطحی روی یک دیسک هادی نازک به شعاع a که باردار شده، به صورت $\rho_S = \frac{a\varepsilon_۰}{\sqrt{a^۲ - r^۲}}$ می‌باشد (r فاصله از مرکز دیسک است.). انرژی ذخیره شده در میدان الکتریکی اطراف دیسک چقدر است؟

۱) $\frac{\pi^۲}{۴}\varepsilon_۰ a^۳$ ۲) $\frac{\pi^۲}{۲}\varepsilon_۰ a^۳$ ۳) $\pi^۲\varepsilon_۰ a^۳$ ۴) $۲\pi^۲\varepsilon_۰ a^۳$

حل: گزینه (۱) صحیح است.

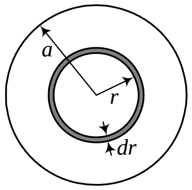
انرژی ذخیره شده در میدان الکتریکی اطراف دیسک همان انرژی الکتریکی ذخیره شده در کل فضا می‌باشد و بنابراین به صورت زیر از توزیع بار به دست می‌آید:

$$W_e = \int_S \frac{۱}{۲}\rho_S V dS$$

چون دیسک هادی است، پتانسیل در سطح آن ثابت است. پس:

$$W_e = \frac{V}{۲}\int_S \rho_S dS = \frac{V}{۲}\int_{\varphi=۰}^{۲\pi}\int_{r=۰}^{a}\frac{a\varepsilon_۰}{\sqrt{a^۲-r^۲}} r dr d\varphi = \frac{a\varepsilon_۰ V}{۲}(۲\pi)(-\frac{۱}{۲})\int_{r=۰}^{a}(\underbrace{-۲r}_{u'})(\underbrace{a^۲-r^۲}_{u})^{-\frac{۱}{۲}} dr d\varphi = -a\varepsilon_۰\pi V\left[\sqrt{a^۲-r^۲}\right]_۰^a = \varepsilon_۰\pi a^۲ V$$

برای مشخص شدن W_e باید V را بیابیم. اما چون دیسک هادی است، یک سطح هم‌پتانسیل است. پس برای یافت پتانسیل دیسک، کافی است پتانسیل مرکز آن را بیابیم. برای یافتن پتانسیل مرکز دیسک، مطابق شکل زیر، توزیع بار آن را به حلقه‌هایی دایروی دیفرانسیلی به شعاع $۰ < r < a$ و پهنای dr تجزیه می‌کنیم. از رابطه پتانسیل حلقه دایروی بار با چگالی یکنواخت در مرکزش، پتانسیل ناشی از این حلقه‌های دیفرانسیلی در مرکز برابر است با:



$$dV = \frac{\rho_{L_۰}}{۲\varepsilon_۰} = \frac{\rho_S dr}{۲\varepsilon_۰} = \frac{a}{۲\sqrt{a^۲-r^۲}}dr$$

پتانسیل دیسک از جمع این عناصر پتانسیل روی سطح دیسک، به دست می‌آید. پس:

$$V = \int_{r=۰}^{a} dV = \int_۰^a \frac{a}{۲\sqrt{a^۲-r^۲}}dr$$

با تغییر متغیر $r = a\sin\alpha$:

$$dr = a\cos\alpha d\alpha \ , \ \sqrt{a^۲-r^۲} = a|\cos\alpha| \Rightarrow V = \int_{\alpha=۰}^{\pi/۲}\frac{a \times a\cos\alpha d\alpha}{۲a|\cos\alpha|} = \frac{a}{۲}\int_۰^{\pi/۲}\frac{\cos\alpha d\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\pi a}{۴}$$

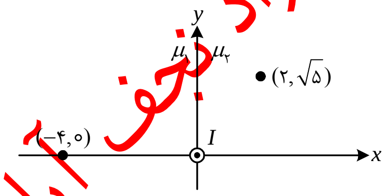
پس:

$$W_e = \varepsilon_۰\pi a^۲\left(\frac{\pi a}{۴}\right) = \frac{\pi^۲}{۴}\varepsilon_۰ a^۳$$

مبحث درسی تست: میدانهای الکتریکی ساکن در خلأ و اجسام > یافتن انرژی الکتریکی ذخیره شده در کل فضا از توزیع بار برای توزیع بارهای سطحی و یافتن پتانسیل الکتریکی در مرکز دیسک از پتانسیل حلقه دایروی بار با چگالی یکنواخت در مرکزش

■

۶- یک سیم بینهایت طویل حامل جریان I، مطابق شکل زیر، منطبق بر محور z و در مرز دو محیط با ضرایب نفوذپذیری $\mu_۱ = ۲\mu_۰$ و $\mu_۲ = ۳\mu_۰$ قرار دارد. مرز دو ناحیه بر صفحه $x = ۰$ منطبق است. شدت میدان مغناطیسی $H_۱$ در $(x_۱ = ۲, y_۱ = \sqrt{۵})$ چند برابر شدت میدان مغناطیسی $H_۲$ در نقطه $(x_۲ = -۴, y_۲ = ۰)$ است؟



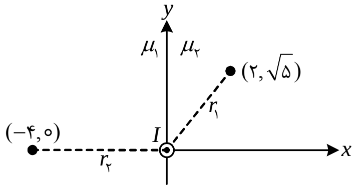
۱) $\frac{۸}{۹}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) $\frac{۹}{۸}$ ۴) ۲

حل: گزینه (۱) صحیح است.

دقت کنید که بر خلاف قاعده رایج، در این مسأله $H_۱$ در $\mu_۲$ و $H_۲$ در $\mu_۱$ می‌باشد. با یک ساختار متقارن استوانه‌ای نوع (۱) با میدان عمود بر مرز محیطها مواجهیم. بنابراین برای یک شعاع (r) یکسان (فاصله از سیم بینهایت طویل جریان)، چگالی شار مغناطیسی در هر دو محیط یکسان بوده و برابر است با:

$$B = B_\varphi = \frac{k}{r}$$

بنابراین، با توجه به شکل زیر، $H_۱$ در $(x_۱ = ۲, y_۱ = \sqrt{۵})$ برابر خواهد بود با:



$$H_۱ = H_{r_۱,\mu_۲} = \frac{B_{r_۱}}{\mu_۲} = \frac{k}{\mu_۲ r_۱}$$

و $H_۲$ در $(x_۲=-۴, y_۲=۰)$ برابر است با:

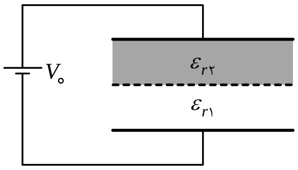
$$H_۲ = H_{r_۲,\mu_۱} = \frac{B_{r_۲}}{\mu_۱} = \frac{k}{\mu_۱ r_۲}$$

پس:

$$\frac{H_۱}{H_۲} = \frac{\mu_۱ r_۲}{\mu_۲ r_۱} = \frac{۲\sqrt{(-۴)^۲+۰^۲}}{۳\sqrt{۲^۲+(\sqrt{۵})^۲}} = \frac{۸}{۹}$$

مبحث درسی تست: میدانهای مغناطیسی ساکن در اجسام > یافتن میدان مغناطیسی در ساختارهای متقارن استوانه‌ای نوع (۱) با میدان عمود بر مرز محیطها

■



۷- فضای میان یک خازن صفحه موازی متصل به پتانسیل $V_۰$ از هوا $(\varepsilon_{r۱}=۱)$ پر شده است. اگر نیمی از خازن را مطابق شکل زیر از ماده عایقی با ضریب گذردهی $\varepsilon_{r۲}=۳$ پر کنیم، میدان در ناحیه هوا چند برابر می‌شود؟

۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{۲}{۳}$
۳) $\frac{۳}{۲}$
۴) ۲

حل: گزینه (۳) صحیح است.

با توجه به شکل زیر، در حالت اول:

$$E_۱ d = V_۰ \qquad (۱)$$

و در حالت دوم:

$$E_۳\frac{d}{۲} + E_۲\frac{d}{۲} = V_۰ \qquad (۲)$$

اما با توجه به اینکه در مرز مشترک هوا و عایق بار آزادی وجود ندارد، از شرط مرزی مؤلفه عمودی $\boldsymbol{D}$ در حالت $\rho_{FS}=۰$ در مرز هوا و عایق داریم:

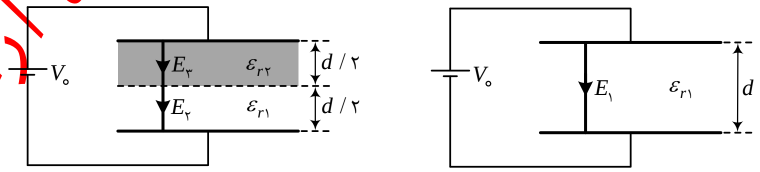
$$D_{n۲} = D_{n۳} \;\Rightarrow\; D_۲ = D_۳ \;\Rightarrow\; \varepsilon_۰ E_۲ = \varepsilon_۰ \varepsilon_{r۲} E_۳ \;\Rightarrow\; E_۳ = \frac{E_۲}{\varepsilon_{r۲}}$$

با جایگذاری در رابطه (۲):

$$(\frac{E_۲}{\varepsilon_{r۲}} + E_۲)\frac{d}{۲} = \frac{\varepsilon_{r۲}+۱}{\varepsilon_{r۲}} E_۲ \frac{d}{۲} = \frac{۲}{۳} E_۲ d = V_۰ \qquad (۳)$$

با مقایسه روابط (۱) و (۳) داریم:

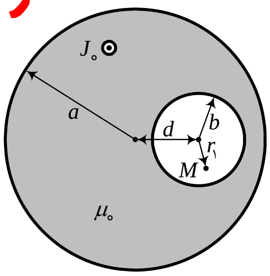
$$E_۲ = \frac{۳}{۲} E_۱$$



(ب) (الف)

مبحث درسی تست: میدانهای الکتریکی ساکن در اجسام > رابطه اختلاف پتانسیل و شدت میدان و شرط مرزی مؤلفه عمودی چگالی شار الکتریکی در مرز دو عایق بدون بار آزاد

■



۸- درون یک هادی استوانه‌ای طویل به شعاع a و نفوذپذیری $\mu_۰$، حفره استوانه‌ای طویلی، موازی محور استوانه هادی و به شعاع b $(b \ll a)$ ایجاد کرده‌ایم. فاصله محور دو استوانه را d می‌نامیم. چنانچه جریان یکنواختی با چگالی $J_۰\ \mathrm{A/m^۲}$ در هادی برقرار کنیم، اندازه چگالی شار مغناطیسی $|\boldsymbol{B}|$ در نقطه فرضی M، به فاصله $r_۱$ از محور حفره استوانه‌ای $(r_۱ < b)$، کدام است؟

۱) $\frac{\mu_۰ J_۰ d}{۲}$
۲) $\frac{\mu_۰ J_۰ r_۱}{۲}$
۳) $\frac{\mu_۰ J_۰ d}{۲\pi a}$
۴) $\frac{\mu_۰ J_۰ r_۱}{۲\pi b}$

حل: گزینه (۱) صحیح است.

این تست قبلاً در کنکور آمده است و یک توزیع جریان ظاهراً نامتقارن استوانه است که با به کارگیری جمع آثار و قانون مداری آمپر برای توزیع جریانهای متقارن استوانه‌ای نوع (۱) حل می‌گردد:

$$\frac{\mu_\circ J_\circ d}{۲} = \text{(فاصله محور دو استوانه)} \times \frac{\mu_\circ J_\circ}{۲} = B = \text{چگالی شار در یک نقطه دلخواه درون حفره استوانه‌ای}$$

رد گزینه: با توجه به رابطه $B = \frac{\mu_\circ I}{۲\pi R}$ (میدان مغناطیسی خط بینهایت طویل جریان)، واحد B عبارتست از:

$$\frac{\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}} \times \mathrm{A}}{\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{HA}}{\mathrm{m}^۲}$$

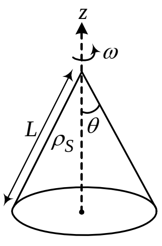
بنابراین گزینه‌های (۳) و (۴) مردودند، چرا که واحد آنها عبارتست از:

$$\frac{\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}} \times \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^۲} \times \mathrm{m}}{\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{HA}}{\mathrm{m}^۳} \neq \frac{\mathrm{HA}}{\mathrm{m}^۲}$$

مبحث درسی تست: میدانهای مغناطیسی ساکن در خلأ > یافتن میدان مغناطیسی توزیع جریانهای ظاهراً نامتقارن با جمع آثار و قانون مداری آمپر

■

۹- یک پوسته نازک مخروطی شکل با زاویه رأس ۲θ و طول یال L حامل بار سطحی یکنواخت با چگالی ρ_S است. مخروط حول محور تقارن خود با سرعت زاویه‌ای $\omega \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$ می‌چرخد. چگالی شار مغناطیسی $\boldsymbol{B}$ در رأس مخروط کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۲}\mu_\circ \rho_S \omega L \sin^۳\theta \hat{a}_z$

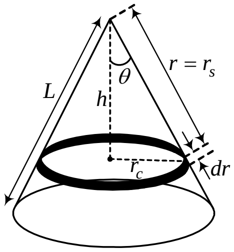
۲) $\frac{۱}{۲}\mu_\circ \rho_S \omega L \sin^۲\theta \cos\theta \hat{a}_z$

۳) $\frac{۱}{۲}\mu_\circ \rho_S \omega L \sin^۳\theta (۱-\cos\theta) \hat{a}_z$

۴) نامحدود است.

حل: گزینه (۱) صحیح است.

با توجه به شکل مقابل، چگالی جریان سطحی ناشی از چرخش ρ_S حول محور مخروط برابر است با:



$$\boldsymbol{J}_S = \rho_S \boldsymbol{v} = \rho_S r_c \omega \hat{a}_\varphi = \rho_S r \sin\theta \omega \hat{a}_\varphi$$

توزیع جریان را به حلقه‌های دایروی دیفرانسیلی به پهنای dr، به شعاع r_c و به فاصله h از مبدأ (نقطه مشاهده) تجزیه می‌کنیم. با توجه به میدان حلقه دایروی جریان روی محورش، میدان ناشی از یک چنین حلقه‌های دیفرانسیلی در مبدأ برابر است با:

$$\boldsymbol{dB} = \frac{\mu_\circ r_c^۲ dI}{۲(r_c^۲+h^۲)^{\frac{۳}{۲}}}\hat{a}_z = \frac{\mu_\circ r^۲ \sin^۲\theta (J_S dr)}{۲r^۳}\hat{a}_z = \frac{\mu_\circ r^۲ \sin^۲\theta \rho_S r \omega \sin\theta dr}{۲r^۳}\hat{a}_z = \frac{\mu_\circ \rho_S \omega \sin^۳\theta}{۲}\hat{a}_z dr$$

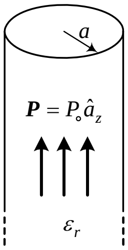
از جمع بستن این مؤلفه‌های دیفرانسیلی میدان، میدان کل به دست می‌آید:

$$\boldsymbol{B} = \int_{r=\circ}^{L} \boldsymbol{dB} = \int_\circ^L \frac{\mu_\circ \rho_S \omega \sin^۳\theta}{۲}\hat{a}_z dr = \frac{\mu_\circ \rho_S \omega L \sin^۳\theta}{۲}\hat{a}_z$$

رد گزینه: به ازای $\theta = \circ$ و $\theta = ۱۸۰^\circ = \pi$ rad، فاصله تمام عناصر بار چرخان، از محور z صفر است ($r_c = r\sin\theta = \circ$). پس سرعت خطی تمام این عناصر صفر بوده ($v = r_c\omega = \circ$) و چگالی جریان همه جا روی سطح مخروط صفر است. در نتیجه باید میدان در این دو زاویه خاص صفر باشد. بنابراین گزینه (۴) مردود است. به ازای $\theta = ۹۰^\circ = \frac{\pi}{۲}$ rad با یک دیسک جریان در جهت $\hat{a}_\varphi$ مواجهیم که مجموعه‌ای از حلقه‌های دایروی دیفرانسیلی جریان است. پس میدان در مرکز آن مسلماً غیر صفر است. بنابراین گزینه (۲) نیز مردود است، چرا که به ازای $\theta = ۹۰^\circ = \frac{\pi}{۲}$ rad، این گزینه برابر صفر می‌گردد. به ازای $\theta = ۴۵^\circ = \frac{\pi}{۴}$ rad و $\theta = ۱۳۵^\circ = \frac{۳\pi}{۴}$ rad به خاطر تقارن نسبت به صفحه $z = \circ$ ($\theta = \frac{\pi}{۲}$ rad)، میدان برابر است. بنابراین گزینه (۳) نیز مردود است، چرا که به ازای هر دو $\theta = ۴۵^\circ = \frac{\pi}{۴}$ rad و $\theta = ۱۳۵^\circ = \frac{۳\pi}{۴}$ rad، عامل $\sin\theta$ برابر $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ است در حالی که عامل $۱-\cos\theta$ به ازای $\theta = ۴۵^\circ = \frac{\pi}{۴}$ rad برابر $۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ و به ازای $\theta = ۱۳۵^\circ = \frac{۳\pi}{۴}$ rad برابر $۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ است. پس فقط گزینه (۲) می‌ماند که گزینه صحیح است.

مبحث درسی تست: میدانهای مغناطیسی ساکن در خلأ > یافتن میدان مغناطیسی جریانهای حلقوی از میدان مغناطیسی حلقه دایروی جریان

■



۱۰- اگر میدان الکتریکی خارجی سبب قطبی‌شدگی استوانه نیمه بینهایت دی‌الکتریک با ثابت دی‌الکتریک ε_r به صورت $\boldsymbol{P} = P_0\hat{a}_z$، مطابق شکل زیر شود، پتانسیل در لبه قاعده بالایی (محیط دایره) کدام است؟

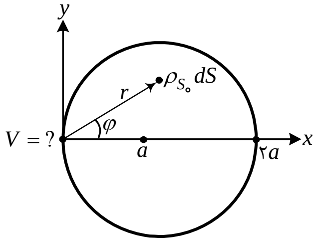
۱) $-\dfrac{P_0 a}{2\varepsilon_0}$ ۲) $\dfrac{P_0 a}{\pi\varepsilon_0}$ ۳) $\dfrac{P_0}{a\pi\varepsilon_0}$ ۴) $\dfrac{P_0 a}{2\varepsilon_0}$

حل: گزینه (۲) صحیح است.

چگالی بارهای مقید برابرند با:

$$\rho_{PV} = -\nabla\cdot\boldsymbol{P}_0 = 0$$

$$\rho_{PS} = \boldsymbol{P}\cdot\hat{a}_n = \begin{cases} P_0\hat{a}_z\cdot(+\hat{a}_z) = +P_0 & z = 0 \\ P_0\hat{a}_z\cdot(+\hat{a}_r) = 0 & r = a \end{cases}$$



بنابراین با یک دیسک بار با چگالی یکنواخت $\rho_{S_0} = P_0$ مواجهیم که پتانسیل در لبه آن خواسته شده است. بنابراین برای سادگی در حل، دیسک را مطابق شکل مقابل در صفحه xy فرض کرده به طوری که لبه آن از مبدأ مختصات بگذرد و پتانسیل را در مبدأ مختصات به دست می‌آوریم:

$$V = \int_S \frac{\rho_S dS}{4\pi\varepsilon_0 R} \quad , \quad \rho_S = P_0 \quad , \quad dS = r\,dr\,d\varphi \quad , \quad R = r$$

$$V = \int_{\varphi=-\pi/2}^{\pi/2}\int_{r=0}^{2a\cos\varphi} \frac{P_0 r\,dr\,d\varphi}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{P_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2a\cos\varphi\,d\varphi = \frac{aP_0}{2\pi\varepsilon_0}[\sin\varphi]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{aP_0}{\pi\varepsilon_0}$$

رد گزینه: چون تمام عناصر بار روی سطح قاعده استوانه دارای علامت مثبت هستند ($+P_0$)، پتانسیل ناشی از تک‌تک آنها نیز مثبت بوده و در نتیجه پتانسیل کل که از جمع آنها حاصل می‌شود، نیز مثبت است. پس گزینه (۱) مردود است. با توجه به رابطه $V = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$ (پتانسیل الکتریکی بار نقطه‌ای) یا رابطه $V = \dfrac{Q}{C}$ (رابطه حاکم بر ظرفیت خازن)، واحد پتانسیل الکتریکی عبارتست از:

$$\frac{\mathrm{C}}{\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}\times m} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{F}}$$

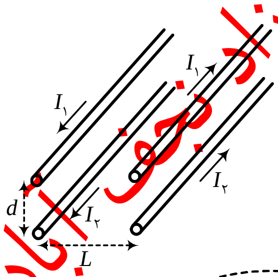
پس گزینه (۳) نیز مردود است، چرا که واحد آن عبارتست از:

$$\frac{\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}}{\mathrm{m}\times\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{Fm}^2} \neq \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{F}}$$

مبحث درسی تست: میدانهای الکتریکی ساکن در اجسام < یافتن پتانسیل ثانویه ناشی از بردار پلاریزاسیون الکتریکی

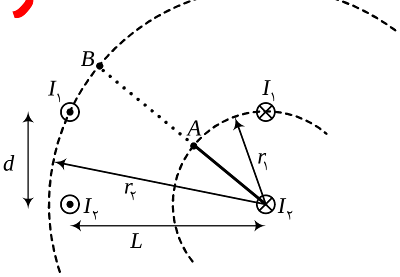
■

۱۱- در شکل زیر ضریب القای متقابل در واحد طول، بین ۲ زوج سیم (سیمهای بالایی زوج اول و سیمهای پایینی زوج دوم) کدام است؟ (سیمهای بالایی دقیقاً بالای سیمهای پایینی و به فاصله d از آنها قرار دارند.)



۱) $\dfrac{\mu_0}{2\pi}\ln\left(1-\dfrac{d^2}{L^2}\right)$ ۲) $\dfrac{\mu_0}{2\pi}\ln\left(1-\dfrac{L^2}{d^2}\right)$ ۳) $\dfrac{\mu_0}{2\pi}\ln\left(1+\dfrac{d^2}{L^2}\right)$ ۴) $\dfrac{\mu_0}{2\pi}\ln\left(1+\dfrac{L^2}{d^2}\right)$

حل: گزینه (۴) صحیح است.



هندسه سطح مقطع مسأله به صورت مقابل است. جهت عمود بر صفحه و به سمت داخل را $+\hat{a}_z$ و محور منطبق بر جریان I_2 درون‌سو را محور z فرض می‌کنیم. در این صورت با استفاده از میدان خط بینهایت طویل جریان، میدان مغناطیسی ناشی از جریان I_2 درون‌سو برابر است با:

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\hat{a}_B\Big|_{I=I_2, R=r, \hat{a}_B=\hat{a}_\varphi} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r}\hat{a}_\varphi$$

بنابراین پیوند شار مغناطیسی گذرنده از سطح یک متر طول مدار اول (مدار با جریان I_1) که یک مستطیل به طول یک متر (موازی محور z) و عرض L است برابر است با پیوند شار مغناطیسی گذرنده از سطح یک متر طول سطح φ ثابت AB به طول یک متر و عرض $r_2 - r_1$. پس پیوند

شار مغناطیسی گذرنده از سطح مدار اول ناشی از جریان I_2 درون‌سو برابر است با:

$$\psi_1=\int_{S_1} N_1\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{dS}=\int_{z=0}^{1}\int_{r=r_1}^{r_2}(1)\frac{\mu_0 I_2}{2\pi r}\hat{a}_\varphi\cdot(+drdz\hat{a}_\varphi)=\frac{\mu_0 I_2}{2\pi}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

اگر به دقت به هندسه مسأله توجه کنیم و از قاعده دست راست استفاده کنیم، متوجه می‌شویم که پیوند شار مغناطیسی گذرنده از سطح مدار اول ناشی از جریان I_2 برون‌سو نیز دارای همین مقدار است. بنابراین به طور کلی پیوند شار مغناطیسی گذرنده یک متر سطح مدار اول ناشی از میدان مغناطیسی مدار دوم برابر است با:

$$\psi=2\psi_1=\frac{\mu_0 I_2}{\pi}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

بنابراین ضریب القای متقابل در واحد طول بین دو مدار اول و دوم برابر است با:

$$M=\frac{\psi}{I_2}=\frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

اما $r_1=d=\sqrt{d^2}$ و $r_2=\sqrt{L^2+d^2}$، پس:

$$M=\frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{\sqrt{d^2+L^2}}{\sqrt{d^2}}=\frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{d^2+L^2}{d^2}=\frac{\mu_0}{2\pi}\ln\left(1+\frac{L^2}{d^2}\right)$$

رد گزینه: به ازای $d=L$ پیوند شار و در نتیجه ضریب القای متقابل محدودی نتیجه می‌شود. در حالی که حد گزینه‌های (۱) و (۲) به ازای $d\to L$ برابر $\frac{\mu_0}{2\pi}\ln(0^+)=-\infty$ خواهند بود. بنابراین گزینه‌های (۱) و (۲) مردودند. از طرف دیگر، به ازای $d=0$، دو مدار بر هم منطبق شده و فاصله آنها از هم صفر می‌گردد. در نتیجه پیوند شار آنها و بالطبع ضریب القای متقابل آنها برابر مثبت بینهایت گردد. بنابراین گزینه (۳) نیز مردود است، چرا که این گزینه به ازای $d=0$، برابر صفر می‌گردد نه مثبت بینهایت. بنابراین فقط گزینه (۴) می‌ماند که گزینه صحیح است.

مبحث درسی تست: میدانهای مغناطیسی ساکن در اجسام > یافتن ضریب القای متقابل از روش پیوند شار

■

۱۲- اگر روی صفحه $x=0$ بار سطحی با چگالی $\rho_S=\rho_0\cos\alpha_1 y\cos\alpha_2 z$ توزیع شده باشد، پتانسیل الکتریکی V_1 در $x=0$ کدام است؟

۱) $\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0(\alpha_1^2+\alpha_2^2)}e^{-(\alpha_1^2+\alpha_2^2)x}\cos\alpha_1 y\cos\alpha_2 z$

۲) $\frac{2\rho_0}{\varepsilon_0(\alpha_1^2+\alpha_2^2)}e^{-(\alpha_1^2+\alpha_2^2)x}\cos\alpha_1 y\cos\alpha_2 z$

۳) $\frac{\rho_0(\alpha_1^2+\alpha_2^2)}{4\varepsilon_0}e^{-(\alpha_1^2+\alpha_2^2)x}\cos\alpha_1 y\cos\alpha_2 z$

۴) $\frac{4\rho_0(\alpha_1^2+\alpha_2^2)}{\varepsilon_0}e^{-(\alpha_1^2+\alpha_2^2)x}\cos\alpha_1 y\cos\alpha_2 z$

حل: گزینه (۱) صحیح است.

دقت کنید که در هر چهار گزینه عامل $e^{-(\alpha_1^2+\alpha_2^2)x}\cos\alpha_1 y\cos\alpha_2 z$ مشترک است. بنابراین V_1 به صورت زیر است:

$$V_1=ke^{-(\alpha_1^2+\alpha_2^2)x}\cos\alpha_1 y\cos\alpha_2 z$$

که k ضریب ثابتی است که باید تعیین گردد.

مطابق شکل مقابل ناحیه $x>0$ را محیط (۱) و ناحیه $x<0$ را محیط (۲) می‌نامیم. در شکل مؤلفه‌های عمودی شدت میدان ($\boldsymbol{E}_{x1}$ و $\boldsymbol{E}_{x2}$) در مرز $x=0$ رسم شده‌اند. از شرط مرزی مؤلفه عمودی $\boldsymbol{D}$ در مرز $x=0$ داریم:

$$(\boldsymbol{D}_{n1}-\boldsymbol{D}_{n1})\cdot\hat{a}_n=\rho_S\ \Rightarrow\ (\varepsilon_0 E_{x1}\hat{a}_x-\varepsilon_0 E_{x2}\hat{a}_x)\cdot(+\hat{a}_x)=\rho_S\ \Rightarrow\ E_{x1}-E_{x2}=\frac{\rho_S}{\varepsilon_0}$$

اما با توجه به تقارن نسبت به صفحه $x=0$، $\boldsymbol{E}_{x2}=-\boldsymbol{E}_{x1}$ است. پس:

$$E_{x1}-(-E_{x1})=2E_{x1}=\frac{\rho_S}{\varepsilon_0}\ \Rightarrow\ E_{x1}\big|_{x=0}=\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}\cos\alpha_1 y\cos\alpha_2 z \qquad (1)$$

از طرف دیگر:

$$\boldsymbol{E}=-\nabla V\ \Rightarrow\ E_{x1}\big|_{x=0}=-\frac{\partial V_1}{\partial x}\bigg|_{x=0}=-\frac{\partial}{\partial x}(ke^{-(\alpha_1^2+\alpha_2^2)x}\cos\alpha_1 y\cos\alpha_2 z)\bigg|_{x=0}=(\alpha_1^2+\alpha_2^2)k\cos\alpha_1 y\cos\alpha_2 z \qquad (2)$$

از مساوی قرار دادن روابط (۱) و (۲) داریم:

$$\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}\cos\alpha_1 y\cos\alpha_2 z=(\alpha_1^2+\alpha_2^2)k\cos\alpha_1 y\cos\alpha_2 z\ \Rightarrow\ k=\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0(\alpha_1^2+\alpha_2^2)}\ \Rightarrow\ V_1=\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0(\alpha_1^2+\alpha_2^2)}e^{-(\alpha_1^2+\alpha_2^2)x}\cos\alpha_1 y\cos\alpha_2 z$$

مبحث درسی تست: میدانهای الکتریکی ساکن در خلأ و اجسام > رابطه پتانسیل و شدت میدان الکتریکی و شرط مرزی مؤلفه عمودی $\boldsymbol{D}$ در مرز دو محیط