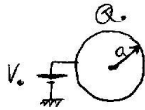


تمرین سری نهم الکتروستاتیک

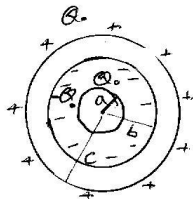
هادی در میدان الکتریکی

۱. کره هادی به شعاع  $a$  را به پتانسیل  $V_0$  وصل می‌کنیم تا پتانسیل کره  $V_0$  شود. حال باتری را جدا می‌کنیم و باردار را داخل یک پوسته هادی کروی به شعاع  $b$  داخل و خارج  $c$  قرار می‌دهیم. در این شرایط پتانسیل در  $R=a$  چقدر است؟



$$\frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 a} = V_0 \Rightarrow Q_0 = 4\pi\epsilon_0 a V_0$$

حل: اگر پوسته نبود داشتیم:



$$\vec{E}|_{R>a} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{a}_R$$

$$V|_{R=a} = - \int_{\infty}^a \vec{E} \cdot d\vec{l} = V_0$$

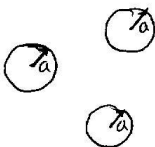
در حالت دوم پوسته وجود دارد زیرا فرجه  $b < R < c$  میدان به صورت صفر است و ما باید پتانسیل این ناحیه را از  $V_0$  کم کنیم تا جواب مسأله بدست آید.

$$\begin{aligned} \Rightarrow V|_{R=a} &= V_0 - \left[ - \int_c^b \vec{E} \cdot d\vec{l} \right] = V_0 - \left[ - \int_c^b \frac{4\pi\epsilon_0 a V_0}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{a}_R \cdot dR \hat{a}_R \right] \\ &= V_0 - a V_0 \left[ \frac{1}{R} \right]_c^b = V_0 - a V_0 \left[ \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right] = V_0 \left[ 1 - \frac{a}{b} + \frac{a}{c} \right] \end{aligned}$$

راه حل دوم: با بار در پوسته حساب کرده و با استفاده از ۲ بار قانون گوس:

$$\begin{aligned} V|_{R=a} &= - \int_{\infty}^c \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{a}_R \cdot dR \hat{a}_R - \int_c^b 0 \cdot dR - \int_b^a \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{a}_R \cdot dR \hat{a}_R \\ &= V_0 \left[ 1 - \frac{a}{b} + \frac{a}{c} \right] \end{aligned}$$

۲. ۱ میلیون قطره هادی کروی در مرکز هم داریم که به هم می‌زنند پتانسیل  $V_0$  دارند. اگر قطره‌ها را بکنیم، پتانسیل سطح کره بزرگ چقدر است؟

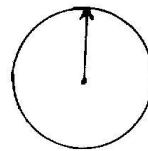


$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} = 10 \Rightarrow q = 40\pi\epsilon_0 a$$

حل:

$$V = \frac{4}{3}\pi b^3 = 10^6 \times \frac{4}{3}\pi a^3 \Rightarrow b = 100a$$

$$\Rightarrow V|_{R=b} = \frac{4\pi\epsilon_0 a \times 10^6}{4\pi\epsilon_0 \times 100a} = 10^5$$



۳. دو کره مغز به شعاع  $a$  و  $2a$  به ترتیب دارای پتانسیل  $45^v$  و  $60^v$  هستند. اگر این دو کره با یک سیم نازک مغز به هم متصل کنیم هر کدام چه قدر پتانسیل خواهند داشت؟

حل: فرض کنیم بار کره کوچک  $Q_1$  و بار کره بزرگتر  $Q_2$  باشد داریم:

$$V_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 a} \quad \text{و} \quad V_2 = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 (2a)}$$

اگر پتانسیل دو کره پس از اتصال  $V_0$  و بار هر کدام به ترتیب  $Q_1'$  و  $Q_2'$  باشد داریم:

$$V_0 = \frac{Q_1'}{4\pi\epsilon_0 a} = \frac{Q_2'}{4\pi\epsilon_0 (2a)} = \frac{Q_1' + Q_2'}{4\pi\epsilon_0 (3a)} = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 (3a)}$$

$$\Rightarrow V_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 a V_1 + 4\pi\epsilon_0 (2a) V_2}{4\pi\epsilon_0 (3a)} = \frac{V_1 + 2V_2}{3} = 55 \text{ ولت}$$

۴. بین دو کره مغز هم مغز به شعاع  $a = 10^{\text{cm}}$  و  $b = 40^{\text{cm}}$  اختلاف پتانسیل  $270^v$  برقرار است. مقدار بار کره بزرگتر زمین شده است. پتانسیل در  $r = 30^{\text{cm}}$  را بدست آورید.

حل: پتانسیل در فاصله  $R$  از مرکز دو کره برابر است با:

$$V_R = - \int_R^b \vec{E} \cdot d\vec{R} = - \int_R^b \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} dR = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{b} \right)$$

اگر  $R = a$  باشد باید  $V_R = 270^v$  باشد

$$\Rightarrow V_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \Rightarrow V_R = \frac{\frac{1}{R} - \frac{1}{b}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} V_0 = \frac{\frac{1}{30} - \frac{1}{40}}{\frac{1}{10} - \frac{1}{40}} \times 270 = 30^v$$

۵. دو حفره کروی به شعاع  $a$  و  $b$  در داخل کره هادی به شعاع  $R$  ایجاد شده اند. در مرکز هر کره یک بار نقطه ای  $q_a$  و  $q_b$  قرار دارند.

الف) بارهای سطحی  $\rho_a$  و  $\rho_b$  و  $\rho_R$  را روی سطح کره ها بیابید. جواب:  $\rho_a = \frac{q_a}{4\pi a^2}$  و  $\rho_b = \frac{q_b}{4\pi b^2}$  و  $\rho_R = \frac{q_a + q_b}{4\pi R^2}$

ب) میدان در داخل کره هادی و داخل حفره ها را بیابید. جواب: میدان داخل حفره ها صفر و داخل حفره ها  $E_a = \frac{q_a}{4\pi\epsilon_0 R_a^2}$  و  $E_b = \frac{q_b}{4\pi\epsilon_0 R_b^2}$

ج) نیرو وارد بر بارهای  $q_a$  و  $q_b$  چه قدر است. جواب: صفر است.

د) اگر بار سوم  $q_c$  را نزدیک رسانا بیابیم هر یک از جواب ها چه تغییری می کنند؟  
 $\rho_R$  تغییر می کند،  $\rho_a$  و  $\rho_b$  تغییر نمی کنند، نیرو وارد بر  $q_a$  و  $q_b$  تغییری نمی کنند، میدان ها نیز تغییری نمی کنند