تمرین سری هفتم (۵) الکترومغناطیس «قانون گوس»

۱. میدان الکتریکی $\vec{E}$ حاصل از یک توزیع بار $\rho(r)$ به صورت زیر است.

$$\begin{cases} r^2+Ar^2 & r<a \\ (a^5+Aa^4)r^{-2} & r>a \end{cases}$$

مطلوب است محاسبه $\rho(r)$:

حل: $\nabla\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$, $\nabla\cdot\vec{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2E_r)$

برای $r<a$ داریم:

$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^4(1+A))$$

$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{4r^3}{r^2}(1+A) = 4r(1+A) \Rightarrow \rho = 4\varepsilon_0 r(1+A)$$

برای $r>a$ داریم:

$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[(a^5+Aa^4)r^{-2}\times r^2\right]$$

$$\nabla\cdot\vec{E} = 0 \Rightarrow \rho_V = 0$$

۲. میدان $\vec{E}$ برای توزیع بارهای زیر در دست است. چگالی بار حجمی مولد میدان را حساب کنید.

الف) $$\vec{E} = R^2\hat{a}_R + \frac{\cos\theta}{R}\hat{a}_\theta + \frac{\sin\varphi}{R\sin\theta}\hat{a}_\varphi$$

ب) $$\vec{E} = 2r^2\sin\varphi\,\hat{a}_R + 3r^2\sin\varphi\,a_\varphi + 7z\hat{a}_z$$

حل: الف) مختصات کروی

$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}(R^2E_R) + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta E_\theta) + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial E_\varphi}{\partial\varphi}$$

$$\Rightarrow \nabla\cdot\vec{E} = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}(R^4) + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\cos\theta\sin\theta}{R}\right) + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\sin\varphi}{R\sin\theta}\right)$$

$$\Rightarrow \nabla\cdot\vec{E} = \frac{4R^3}{R^2} + \frac{1}{R^2\sin\theta}\cos 2\theta + \frac{\cos\varphi}{R^2\sin^2\theta} = 4R + \frac{\cos 2\theta}{R^2\sin\theta} + \frac{\cos\varphi}{R^2\sin^2\theta}$$

$$\Rightarrow \rho = \varepsilon_0\left(4R + \frac{\cos 2\theta}{R^2\sin\theta} + \frac{\cos\varphi}{R^2\sin^2\theta}\right)$$

ادامه صفحه بعد ⟶

ب) مختصات استوانه‌ای

$$\nabla\cdot\vec{E}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rE_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial E_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$$\Rightarrow \nabla\cdot\vec{E}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(2r^3\sin\varphi)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}(3r^2\sin\varphi)+\frac{\partial}{\partial z}(7z)$$

$$\Rightarrow \nabla\cdot\vec{E}=6r\sin\varphi+3r\cos\varphi+7=\rho/\varepsilon_0$$

$$\Rightarrow \rho=\varepsilon_0(6r\sin\varphi+3r\cos\varphi+7)$$

۳. یک بار خطی یکنواخت با چگالی ρ_l در امتداد محور z قرار دارد. نشان دهید که در کلیه نقاط فضا بجز محور z، رابطهٔ $\nabla\cdot\vec{E}=0$ برقرار است. ثانیاً هرگاه به جای بار خطی یک بار حجمی به چگالی ρ_v را برای ناحیه $0<r<a$ قرار دهیم رابطه ρ_l و ρ_v را طوری تعیین کنید که در واحد طول مقدار بار در هر دو توزیع یکسان باشد. ثالثاً $\nabla\cdot\vec{E}$ را بر کلیه نقاط فضا محاسبه کنید.

حل: الف) می‌دانیم که برای یک بار خطی شدت میدان الکتریکی توسط رابطه $\vec{E}=\frac{\rho}{2\pi\varepsilon r}\hat{a}_r$ بدست می‌آید.

$$\Rightarrow \nabla\cdot E=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rE_r)=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\rho}{2\pi\varepsilon}\right)=0 \Rightarrow \nabla\cdot\vec{E}=0$$

چون در $r=0$، E بی‌نهایت است ⇐ رابطهٔ فوق برقرار نیست.

ب)

$$\int\rho\cdot dl=\int\rho_v\,dv \Rightarrow \rho_l\cdot l=\rho_v\cdot\pi a^2 l \Rightarrow \rho_l=\rho_v\pi a^2$$

ج) برای $r<a$

$$\int_s\vec{E}\cdot\vec{ds}=\int_v\frac{\rho_v}{\varepsilon}dv=\vec{E}\cdot(2\pi rl)=\rho_v(\pi r^2 l)$$

$$\vec{D}=\frac{\rho_v r}{2}\hat{a}_r \Rightarrow \nabla\cdot\vec{E}=\frac{\rho_v}{\varepsilon}$$

برای $r>a$

$$\int_s\vec{E}\cdot\vec{ds}=\int_v\rho_v\,dv \Rightarrow E(2\pi rl)=\rho_v(\pi a^2 l)$$

$$\Rightarrow E=\frac{\rho_v a^2}{2r}\hat{a}_r \Rightarrow \nabla\cdot\vec{E}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\rho_v a^2}{2}\right)\Rightarrow \nabla\cdot\vec{\ }=0$$

۴. در فضای آزاد، میدان الکتریکی $\vec{E}=x\hat{a}_x+y\hat{a}_y+z\hat{a}_z$ وجود دارد. مطلوبست:

الف) کل بار الکتریکی خالص که در استوانه‌ای به محور z و شعاع a و طول l وجود دارد (برای $z>0$)

ب) سؤال قسمت الف را برای کره‌ای به شعاع a و به مرکز مبدأ مختصات حل کنید.

ج) شار الکتریکی که از سطح جانبی استوانه‌ای به طول l و شعاع a می‌گذرد را بدست آورید. ($\varphi=\vec{E}\cdot\vec{ds}$)

حل: الف)

$$\nabla\cdot E=\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}\Rightarrow \nabla\cdot\vec{E}=3\Rightarrow \rho=3\varepsilon_0$$

$$\Rightarrow Q=\int_v \rho_v\,dv=\int_0^l\int_0^{2\pi}\int_0^a 3\varepsilon_0 r\,dr\,d\varphi\,dz \Rightarrow Q=3\pi\varepsilon_0 a^2 l$$

ب)

$$Q=3\varepsilon_0\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^a R^2\sin\theta\,dR\,d\theta\,d\varphi=12\varepsilon_0\pi a^3$$

ج) میدان در مختصات استوانه‌ای

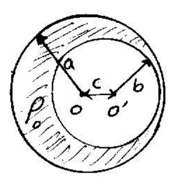
$$E=r\hat{a}_r+z\hat{a}_z$$

$$\Rightarrow \varphi=\int E\cdot\vec{ds}=\int_s(r\hat{a}_r+z\hat{a}_z)\cdot\hat{a}_r\,r\,d\varphi\,dz$$

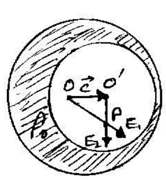
$$=\int_{-l/2}^{l/2}\int_0^{2\pi} r^2\,d\varphi\,dz=2\pi a^2 l$$

---

۵. حجم بین ۲ استوانه به طول بی نهایت با بار الکتریکی با چگالی حجمی ρ_0 به طور یکنواخت پر شده است، شعاع‌های استوانه‌ها به ترتیب a و b بوده و فاصله بین محورهای آن‌ها برابر c است که $(c<a-b)$ فرض می‌شود. مطلوبست محاسبه میدان الکتریکی در درون استوانه به شعاع b.



حل: با استفاده از اصل برهم نهی و قانون گوس یک بار استوانه‌ای بزرگ را توپر فرض کرده و میدان را در نقطه P بدست می‌آوریم سپس استوانه توخالی را توپر با چگالی بار $-\rho_0$ فرض می‌کنیم و میدان آن را در نقطه P بدست می‌آوریم. میدان کل حاصل جمع این ۲ میدان خواهد بود.



گام اول

$$\int_s\vec{E}\cdot\vec{ds}=\int\frac{\rho_0}{\varepsilon}\,dv\Rightarrow E(2\pi r l)=\frac{\rho_0}{\varepsilon}\pi r^2 l$$

$$E=\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}r\Rightarrow E=\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}r\,\hat{a}_r=\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}\vec{op}$$

گام دوم: $\int E_2\cdot ds=-\int\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\,dv\Rightarrow E_2=-\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}r'\Rightarrow E_2=-\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}r'\hat{a}_{r'}=-\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}\vec{o'p}$

$$\Rightarrow \vec{E}_{total}=\vec{E}_1+\vec{E}_2=\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}(\vec{op}-\vec{o'p})=\vec{E}_{total}=\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}\vec{oo'}=\frac{\rho_0 c}{2\varepsilon_0}\hat{a}_x$$

۶. به فرض اینکه در مختصات استوانه‌ای داشته باشیم:

$$\vec{E} = \begin{cases} 0.1\, r\hat{a}_r & 0 \leq r \leq 0.2 \\ \dfrac{0.004}{r}\hat{a}_r & r \geq 0.2 \end{cases}$$

الف) ρ_v را در $r=0.1$ و $r=0.3$ بدست آورید.

ب) چه بار خطی را می‌توان در روی محور z قرار داد تا برای $r \geq 0.2$ ، $\vec{E}=0$ باشد.

حل:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho_v / \varepsilon_0 \Rightarrow \rho_v\Big|_{r=0.1} = \varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}\Big|_{r=0.1} = \frac{\varepsilon_0}{r}\frac{\partial}{\partial r}(0.1 r^2)\Big|_{r=0.1} = 0.2\varepsilon_0$$

$$\Rightarrow \rho_v\Big|_{r=0.3} = \varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}\Big|_{r=0.3} = \frac{\varepsilon_0}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{0.004}{r}\right)\Big|_{r=0.1} = 0$$

ب) برای اینکه $\vec{E}$ در خارج $r=0.2$ برابر صفر گردد باید داشته باشیم:

$$\frac{0.004}{r} + \frac{\rho_\ell}{2\pi\varepsilon_0 r} = 0$$

$$\Rightarrow \rho_\ell = -0.008\,\varepsilon_0 \pi$$