تست‌های سال ۹۲

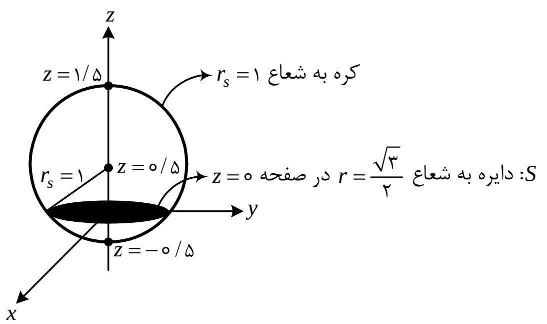
■

۱- صفحه $z=۰$ شامل بار سطحی غیریکنواخت $\rho_S = ay^۲ \ \frac{\text{C}}{\text{m}^۲}$ می‌باشد. کل باری که در کره‌ای به شعاع یک متر و به مرکز $(۰,۰,۰/۵)$ واقع شده، کدام است؟

۱) $Q=\frac{۹\pi a}{۶۴}$ ۲) $Q=\frac{۹\pi a}{۳۲}$ ۳) $Q=\frac{۳\pi a}{۶۴}$ ۴) $Q=\frac{۳\pi a}{۳۲}$

حل: گزینه (۱) صحیح است.

مطابق شکل مقابل، کره به شعاع $r_s = ۱\ m$ سطح دایروی S به شعاع $r_c = r = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ را از صفحه $z=۰$ جدا می‌کند. بنابراین بار کل درون کره برابر بار روی سطح دایره S می‌باشد که به صورت زیر، از انتگرال‌گیری چگالی بار سطحی روی S، بدست می‌آید:



$$\rho_S = ay^۲ = ar^۲\sin^۲\varphi \ \ , \ \ dS = dS_z = rdrd\varphi$$

$$Q=\int_S \rho_S dS = \int_{\varphi=۰}^{۲\pi}\int_{r=۰}^{\sqrt{۳}/۲} ar^۳\sin^۲\varphi dr d\varphi = \frac{a}{۲}\int_۰^{۲\pi}(۱-\cos ۲\varphi)d\varphi\int_۰^{\sqrt{۳}/۲} r^۳ dr$$

$$=\frac{a}{۲}\left[\varphi-\frac{۱}{۲}\sin ۲\varphi\right]_۰^{۲\pi}\left[\frac{r^۴}{۴}\right]_۰^{\sqrt{۳}/۲}=\frac{a}{۲}(۲\pi)\frac{۹}{۶۴}=\frac{۹\pi a}{۶۴}$$

دقت کنید که چون ناحیه انتگرال‌گیری یک دایره در صفحه xy است، انتگرال را در دستگاه مختصات استوانه‌ای حل کردیم. می‌توان مسأله را در دستگاه مختصات دکارتی نیز حل نمود ولی با حلی طولانی‌تر.

■

۲- بارهای نقطه‌ای مثبت Q_i در نقاط $(۰,۰,z_i)$ قرار گرفته‌اند. با فرض $Q_i = \frac{۱}{۳^i}$ C، $z_i = ۳^i$ m و $i = ۰,۱,۲,\cdots$، مقدار پتانسیل در مبدأ مختصات کدام است؟ فرض کنید پتانسیل در بینهایت برابر صفر باشد.

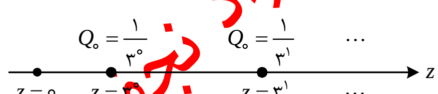
۱) $V=\frac{۳}{۳۲\pi\varepsilon_۰}$ ۲) $V=\frac{۳}{۱۶\pi\varepsilon_۰}$ ۳) $V=\frac{۹}{۳۲\pi\varepsilon_۰}$ ۴) $V=\frac{۹}{۱۶\pi\varepsilon_۰}$

حل: گزینه (۳) صحیح است.

با یک توزیع بار نقطه‌ای مطابق شکل زیر مواجیهم، پس:

$$q_i = Q_i = \frac{۱}{۳^i} \ \ , \ \ R_i = z_i = ۳^i$$

$$V=\sum_{i=۰}^{\infty}\frac{q_i}{۴\pi\varepsilon_۰ R_i}=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\sum_{i=۰}^{\infty}\frac{۱/۳^i}{۳^i}=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\sum_{i=۰}^{\infty}\frac{۱}{۹^i}=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\underbrace{\left(۱+\frac{۱}{۹}+\frac{۱}{۹^۲}+\cdots\right)}_{S}$$

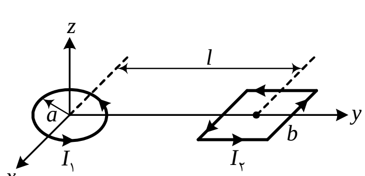


اما مجموع S یک سری هندسی با جمله اول $a=۱$ و قدرنسبت $q=\frac{۱}{۹}<۱$ است، پس:

$$S=\frac{a}{۱-q}=\frac{۱}{۱-\frac{۱}{۹}}=\frac{۹}{۸} \ \Rightarrow \ V=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\times\frac{۹}{۸}=\frac{۹}{۳۲\pi\varepsilon_۰}$$

■

۳- در شکل زیر، در یک حلقه دایروی کوچک به شعاع a جریان $I_۱$ جاری است و حلقه مربعی کوچک به ضلع b با جریان $I_۲$ در فاصله l از آن قرار دارد، به طوری که $a,b \ll l$ هستند و می‌توان میدانهای حلقه‌ها را روی یکدیگر ثابت فرض نمود. گشتاور مغناطیسی وارد بر حلقه مربعی، کدام است؟



۱) $-\frac{\mu_۰\pi a^۲b^۲I_۱I_۲}{۲l}\hat{a}_x$ ۲) $-\frac{\mu_۰\pi a^۲b^۲I_۱I_۲}{۴l^۳}\hat{a}_x$ ۳) $-\frac{\mu_۰\pi a^۲b^۲I_۱I_۲}{۲l^۲}\hat{a}_x$ ۴) $-\frac{\mu_۰a^۲b^۲I_۱I_۲}{۴l^۳}\hat{a}_x$

حل: گزینه (۴) صحیح است.

حلقه دایروی یک دوقطبی مغناطیسی است که گشتاور آن برابر است با:

$$m_1 = I_1 S_1 = \pi a^2 I_1$$

حلقه مربعی نیز یک دوقطبی مغناطیسی است که گشتاور آن برابر است با:

$$\boldsymbol{m}_2 = I_2 \boldsymbol{S}_2 = I_2 S_2 \hat{a}_n = b^2 I_2 \hat{a}_z$$

چون فاصله بین دو حلقه خیلی از ابعاد آنها بزرگتر است ($a,b \ll l$)، می‌توان از رابطه میدان دوقطبی مغناطیسی در فواصل خیلی دور استفاده نمود. یعنی میدان مغناطیسی دوقطبی اول در مرکز دوقطبی دوم برابر است با:

$$\boldsymbol{B}_1 = \frac{\mu_0 m_1}{4\pi r^3}(2\cos\theta \hat{a}_r + \sin\theta \hat{a}_\theta)\Big|_{r=l\ ,\ \theta=\pi/2} = \frac{\mu_0 \pi a^2 I_1}{4\pi l^3}(-\hat{a}_z) = -\frac{\mu_0 a^2 I_1}{4 l^3}\hat{a}_z$$

چون ابعاد دوقطبی دوم خیلی کوچک است ($b \ll l$)، می‌توان میدان مغناطیسی در سطح آن را برابر با میدان در مرکز آن تصور نمود. بنابراین گشتاور نیروی وارد بر آن که ناشی از میدان دوقطبی اول است، برابر خواهد شد با:

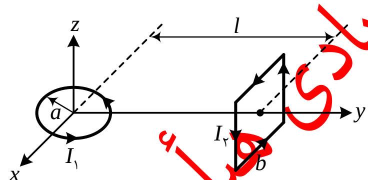
$$\boldsymbol{T}_{21} = \boldsymbol{B}_1 \times \boldsymbol{m}_2 = \boldsymbol{0}$$

بنابراین هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیستند. اما با توجه به اینکه در هر چهار گزینه جهت گشتاور نیرو $-\hat{a}_x$ داده شده، متوجه می‌شویم که شکل مسأله اشتباه رسم شده و در واقع باید مطابق شکل زیر، حلقه مربعی در صفحه $y = l$ باشد نه در صفحه $z = 0$. در این صورت:

$$\boldsymbol{m}_2 = I_2 \boldsymbol{S}_2 = I_2 S_2 \hat{a}_n = b^2 I_2 \hat{a}_y$$

$$\boldsymbol{T}_{21} = \boldsymbol{B}_1 \times \boldsymbol{m}_2 = b^2 I_2 \hat{a}_y \times \left(-\frac{\mu_0 a^2 I_1}{4 l^3}\hat{a}_z\right) = -\frac{\mu_0 a^2 b^2 I_1 I_2}{4 l^3}\hat{a}_x$$

بنابراین گزینه (۴) صحیح است.



رد گزینه: در صورتی که فرض کنیم حلقه مربعی مطابق شکل بالا در صفحه $y = l$ قرار دارد، چون میدان مغناطیسی دوقطبی اول با $\frac{1}{r^3} = \frac{1}{l^3}$ نسبت مستقیم دارد، با توجه به رابطه $\boldsymbol{T}_{21} = \boldsymbol{B}_1 \times \boldsymbol{m}_2$، $\boldsymbol{T}_{21}$ نیز با $\frac{1}{l^3}$ نسبت مستقیم دارد، بنابراین گزینه‌های (۱) و (۳) مردودند. از طرف دیگر چون میدان $\boldsymbol{B}_1$ با ضریب $\frac{\mu_0 m_1}{4\pi r^3} = \frac{\mu_0 \pi a^2 I_1}{4\pi l^3} = \frac{\mu_0 a^2 I_1}{4 l^3}$ و گشتاور دوقطبی $\boldsymbol{m}_2$ با ضریب $m_2 = S_2 I_2 = b^2 I_2$ مشخص می‌گردد، $\boldsymbol{T}_{21} = \boldsymbol{B}_1 \times \boldsymbol{m}_2$ نیز با ضریب $\frac{\mu_0 a^2 I_1}{4 l^3} \times b^2 I_2 = \frac{\mu_0 a^2 b^2 I_1 I_2}{4 l^3}$ مشخص می‌گردد که در آن عدد π وجود ندارد. بنابراین از بین دو گزینه (۲) و (۴)، گزینه (۴) صحیح می‌باشد.

■

۴- بین دو پوسته کروی رسانا ($a < r < b$) از ماده‌ای با رسانایی $\sigma(r) = \frac{\sigma_0}{r^2}$ پر شده است، که در آن r شعاع دستگاه کروی و a، b و σ_0 مقادیر ثابتی هستند. اگر سطح $r = a$ در پتانسیل صفر و سطح $r = b$ در پتانسیل V_0 باشد، چگالی جریان در این ناحیه کدام است؟

۱) $\boldsymbol{J} = \frac{-\sigma_0 V_0}{r(b-a)}\hat{a}_r$ ۲) $\boldsymbol{J} = \frac{-\sigma_0 V_0}{r^2(b-a)}\hat{a}_r$ ۳) $\boldsymbol{J} = \frac{-\sigma_0 V_0}{r^2 \ln\frac{b}{a}}\hat{a}_r$ ۴) $\boldsymbol{J} = \frac{-\sigma_0 V_0}{r \ln\frac{b}{a}}\hat{a}_r$

حل: گزینه (۲) صحیح است.

مقاومت بین دو سطح کروی $r = a$ و $r = b$، به صورت زیر از روش رشد عنصر به دست می‌آید:

$$S = 4\pi r^2 \quad , \quad dL = dr \quad , \quad \sigma = \sigma(r) = \frac{\sigma_0}{r^2}$$

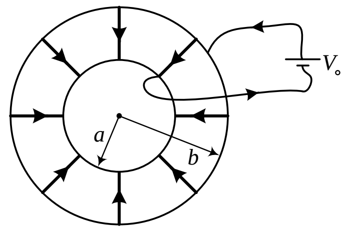
$$dR = \frac{dL}{\sigma S} = \frac{dr}{\frac{\sigma_0}{r^2} \times 4\pi r^2} = \frac{dr}{4\pi\sigma_0} \Rightarrow R = \int_{r=a}^{b} dR = \int_a^b \frac{dr}{4\pi\sigma_0} = \frac{b-a}{4\pi\sigma_0}$$

بنابراین جریان بین دو سطح کروی $r = a$ و $r = b$ که مطابق شکل زیر در جهت منفی شعاعی کروی ($-\hat{a}_r$) می‌باشد، برابر است با:

$$I = \frac{V_0}{R} = \frac{4\pi\sigma_0 V_0}{b-a}$$

و در نتیجه چگالی جریان برابر است با:

$$\boldsymbol{J}=J\hat{a}_J=\frac{I}{S}(-\hat{a}_r)=-\frac{۴\pi\sigma_\circ V_\circ/(b-a)}{۴\pi r^۲}\hat{a}_r=-\frac{\sigma_\circ V_\circ}{(b-a)r^۲}\hat{a}_r$$



رد گزینه: با توجه به رابطه $\sigma(r)=\frac{\sigma_\circ}{r^۲}$، واحد $\sigma_\circ$، برابر $\square\text{m}$ $\frac{\square}{\text{m}}\times\text{m}^۲=\square\text{m}$ است. بنابراین واحد گزینه‌های (۱) تا (۴) به ترتیب برابر است با:

$$\frac{\square\text{m}\times\text{V}}{\text{m}^۲}=\frac{\frac{\text{A}}{\text{V}}\times\text{V}}{\text{m}}=\frac{\text{A}}{\text{m}}$$

$$\frac{\square\text{m}\times\text{V}}{\text{m}^۳}=\frac{\frac{\text{A}}{\text{V}}\times\text{V}}{\text{m}^۲}=\frac{\text{A}}{\text{m}^۲}$$

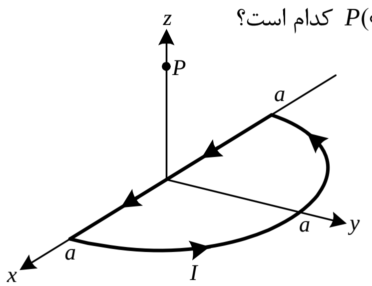
$$\frac{\square\text{m}\times\text{V}}{\text{m}^۲}=\frac{\text{A}}{\text{m}}$$

$$\frac{\square\text{m}\times\text{V}}{\text{m}}=\frac{\text{A}}{\text{V}}\times\text{V}=\text{A}$$

یعنی فقط گزینه (۲) دارای واحد چگالی جریان است. بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

■

۵- حلقه جریان شامل یک نیم‌دایره به مرکز مبدأ مختصات و شعاع a و یک پاره‌خط به طول $۲a$، هر دو روی صفحه xy، مطابق شکل زیر، داده شده است. اگر بدانیم $\int\frac{d\alpha}{\cos\alpha}=\ln\left(\frac{۱+\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)$ است، پتانسیل مغناطیسی برداری در نقطه $P(\circ,\circ,a)$ کدام است؟



۱) $\frac{\mu_\circ I}{۴\pi}\left(\ln\frac{۲+\sqrt{۲}}{۲-\sqrt{۲}}+\sqrt{۲}\right)\hat{a}_x$

۲) $\frac{\mu_\circ I}{۴\pi}\left(۲\ln\frac{۲+\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}+\sqrt{۲}\right)\hat{a}_x$

۳) $\frac{\mu_\circ I}{۴\pi}\left(\ln\frac{۲+\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}-\sqrt{۲}\right)\hat{a}_x$

۴) $\frac{\mu_\circ I}{۴\pi}\left(\ln\frac{۲+\sqrt{۲}}{۲-\sqrt{۲}}-\sqrt{۲}\right)\hat{a}_x$

حل: گزینه (۴) صحیح است.

توزیع جریان را به دو بخش تجزیه می‌کنیم؛ نیم‌دایره به شعاع a ($C'_۱$) و پاره‌خط به طول $۲a$ ($C'_۲$). پتانسیل ناشی از نیم‌دایره به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\boldsymbol{dL'}=\boldsymbol{dL}_{\varphi'}=ad\varphi'\hat{a}_{\varphi'}\quad,\quad R=\sqrt{a^۲+a^۲}=\sqrt{۲}a$$

$$\boldsymbol{A}_۱=\int_{C'_۱}\frac{\mu_\circ I\boldsymbol{dL'}}{۴\pi R}=\int_{\varphi'=\circ}^{\pi}\frac{\mu_\circ Ia\hat{a}_{\varphi'}d\varphi'}{۴\pi\sqrt{۲}a}=\frac{\mu_\circ I}{۴\pi\sqrt{۲}}\int_\circ^\pi\hat{a}_{\varphi'}d\varphi'$$

$$=\frac{\mu_\circ I}{۴\pi\sqrt{۲}}\int_\circ^\pi(-\sin\varphi'\hat{a}_x+\cos\varphi'\hat{a}_y)d\varphi'=\frac{\mu_\circ I}{۴\pi\sqrt{۲}}\left[\cos\varphi'\hat{a}_x+\sin\varphi'\hat{a}_y\right]_\circ^\pi=-\frac{\mu_\circ I}{۴\pi}\sqrt{۲}\hat{a}_x$$

پتانسیل ناشی از پاره‌خط نیز به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\boldsymbol{dL'}=\boldsymbol{dL}_{x'}=dx'\hat{a}_x\quad,\quad R=\sqrt{a^۲+x'^۲}$$

$$\boldsymbol{A}_۲=\int_{C'_۲}\frac{\mu_\circ I\boldsymbol{dL'}}{۴\pi R}=\int_{x'=-a}^{a}\frac{\mu_\circ I\hat{a}_xdx'}{۴\pi\sqrt{a^۲+x'^۲}}=\frac{\mu_\circ I}{۴\pi}\hat{a}_x\int_{-a}^{a}\frac{dx'}{\sqrt{a^۲+x'^۲}}$$

$$=\frac{\mu_\circ I}{۴\pi}\hat{a}_x\left[\ln\left(x'+\sqrt{a^۲+x'^۲}\right)\right]_{-a}^{a}=\frac{\mu_\circ I}{۴\pi}\ln\frac{۱+\sqrt{۲}}{۱-\sqrt{۲}}\hat{a}_x=\frac{\mu_\circ I}{۴\pi}\ln\frac{\sqrt{۲}+۲}{\sqrt{۲}-۲}\hat{a}_x$$

بنابراین پتانسیل در نقطه P برابر است با:

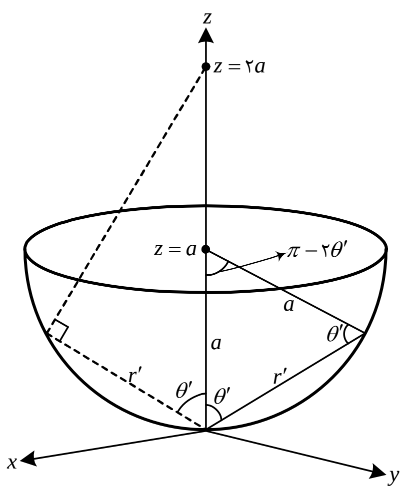
$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_۱+\boldsymbol{A}_۲=\frac{\mu_\circ I}{۴\pi}\left(\ln\frac{\sqrt{۲}+۲}{\sqrt{۲}-۲}-\sqrt{۲}\right)\hat{a}_x$$

■

۶- مطابق شکل زیر، حفره‌ای به شکل مخروط با زاویه بازشدگی $\frac{\pi}{۴}$ از نیم‌کره‌ای با چگالی حجمی یکنواخت $\rho_۰$ از بار الکتریکی، به شعاع a و مرکز منطبق بر $z=a$ خارج شده است. میدان الکتریکی در مبدأ مختصات برابر کدام گزینه است؟

۱) $-\frac{\rho_۰ a\sqrt{۲}}{۸\varepsilon_۰}\hat{a}_z$ ۲) $-\frac{\rho_۰ a}{۱۲\varepsilon_۰}\hat{a}_z$ ۳) $-\frac{\rho_۰ a\sqrt{۲}}{۱۲\varepsilon_۰}\hat{a}_z$ ۴) $-\frac{\rho_۰ a}{۸\varepsilon_۰}\hat{a}_z$

حل: گزینه (۳) صحیح است.



مطابق شکل مقابل، شعاع دستگاه مختصات کروی روی سطح نیم‌کره از قضیه کسینوسها به صورت زیر به دست می‌آید:

$$r'=\sqrt{a^۲+a^۲-۲a^۲\cos(\pi-۲\theta')}=\sqrt{۲a^۲(۱+\cos ۲\theta')}=\sqrt{۲a^۲(۲\cos^۲\theta')}=۲a\cos\theta'$$

بنابراین شدت میدان الکتریکی در مبدأ مختصات به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{o}\\ \boldsymbol{r}'=r'\hat{a}_{r'}\end{array}\right\}\Rightarrow\ \boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'=-r'\hat{a}_{r'}\ ,\ |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|=r'$$

$$dV'=r'^۲\sin\theta' dr' d\theta' d\varphi'$$

$$\boldsymbol{E}=\int_{V'}\frac{\rho_V(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')dV'}{۴\pi\varepsilon_۰|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^۳}=\int_{\varphi'=۰}^{۲\pi}\int_{\theta'=\pi/۴}^{\pi/۲}\int_{r'=۰}^{۲a\cos\theta'}\frac{\rho_۰(-r'\hat{a}_{r'})(r'^۲\sin\theta' dr' d\theta' d\varphi')}{۴\pi\varepsilon_۰ r'^۳}$$

$$=\frac{\rho_۰}{۴\pi\varepsilon_۰}\int_۰^{۲\pi}\int_{\pi/۴}^{\pi/۲}\int_۰^{۲a\cos\theta'}-(\sin\theta'\cos\varphi'\hat{a}_x+\sin\theta'\sin\varphi'\hat{a}_y+\cos\theta'\hat{a}_z)\sin\theta' dr' d\theta' d\varphi'$$

مؤلفه‌های $\hat{a}_x$ و $\hat{a}_y$ به علت تقارن نسبت به φ' حذف می‌شوند، پس:

$$\boldsymbol{E}=\frac{\rho_۰}{۴\pi\varepsilon_۰}\hat{a}_z\int_۰^{۲\pi}d\varphi'\int_{\pi/۴}^{\pi/۲}-\cos\theta'\sin\theta'\left(\int_۰^{۲a\cos\theta'}dr'\right)d\theta'=\frac{\rho_۰}{۴\pi\varepsilon_۰}\hat{a}_z(۲\pi)\int_{\pi/۴}^{\pi/۲}-۲a\sin\theta'\cos^۲\theta' d\theta'$$

$$=\frac{\rho_۰ a}{\varepsilon_۰}\hat{a}_z\left[\frac{\cos^۳\theta'}{۳}\right]_{\pi/۴}^{\pi/۲}=-\frac{\sqrt{۲}\rho_۰ a}{۱۲\varepsilon_۰}\hat{a}_z$$

البته می‌توان میدان را از جمع آثار بدست آورد؛ بدین صورت که ابتدا میدان ناشی از نیم‌کره کامل بار با چگالی یکنواخت $+\rho_۰$ و سپس میدان ناشی از مخروط بار با چگالی یکنواخت $-\rho_۰$ را به دست آورده و نتایج را با هم جمع نمود.

دقت کنید که r' را می‌توان از $\cos\theta'$ در مثلث قائم‌الزاویه شکل که اضلاع آن با خط‌چین مشخص شده‌اند و وتر آن برابر $۲a$ می‌باشند، نیز به دست آورد:

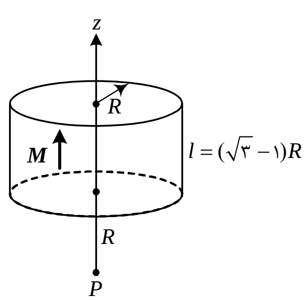
$$\cos\theta'=\frac{r'}{۲a}\ \Rightarrow\ r'=۲a\cos\theta'$$

یا حتی می‌توان آن را از معادله سطح نیم‌کره به دست آورد:

$$x'^۲+y'^۲+(z'-a)^۲=a^۲\ \Rightarrow\ \underbrace{x'^۲+y'^۲+z'^۲}_{r'^۲}-۲az'=۰\ \xrightarrow{z'=r'\cos\theta'}\ r'(r'-۲a\cos\theta')=۰\ \Rightarrow\ r'=۲a\cos\theta'$$

■

۷- یک استوانه به شعاع R و طول $l=(\sqrt{۳}-۱)R$ از جنس ماده مغناطیسی با بردار مغناطیس‌شوندگی یکنواخت $\boldsymbol{M}=M_۰\hat{a}_z$ مطابق شکل زیر وجود دارد. اندازه $\boldsymbol{B}$ در نقطه P روی محور استوانه به اندازه R پایین‌تر از آن، چقدر است؟



۱) $B_z=\frac{\mu_۰ M_۰}{۲}(\sqrt{۳}+۱)$

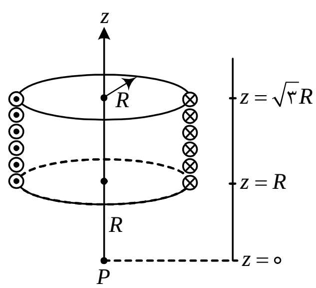
۲) $B_z=\frac{\mu_۰ M_۰}{۴}(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})$

۳) $B_z=\frac{\mu_۰ M_۰}{۲}(\sqrt{۳}-۱)$

۴) $B_z=\frac{\mu_۰ M_۰}{۴}(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})$

حل: گزینه (۲) صحیح است.

بردار مغناطیس‌شوندگی را با جریانهای مقید حجمی و سطحی جایگزین می‌کنیم:



$$J_{mV} = \nabla \times M_0 = o$$

$$J_{mS} = M \times \hat{a}_n = \begin{cases} M_0 \hat{a}_z \times (+\hat{a}_z) = o & z = R + (\sqrt{3}-1)R = \sqrt{3}R \\ M_0 \hat{a}_z \times (-\hat{a}_z) = o & z = R \\ M_0 \hat{a}_z \times (+\hat{a}_r) = M_0 \hat{a}_\varphi & r = R \end{cases}$$

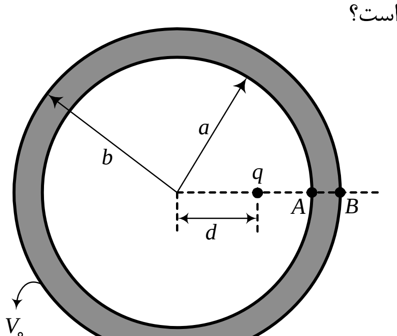
بنابراین توزیع جریان، یک جریان سطحی با چگالی $J_S = M_0 \hat{a}_\varphi$ روی استوانه $r=R$ مطابق شکل مقابل است. بنابراین میدان ناشی از آن را می‌توان به روش کاهش مرتبه از میدان حلقه دایروی جریان روی محورش، به صورت زیر به دست آورد. با تجزیه توزیع جریان به حلقه‌های دیفرانسیلی به شعاع R و ضخامت dz، داریم:

$$dB = dB_z = \left. \frac{\mu_0 I R'^2}{2(R'^2+h^2)^{\frac{3}{2}}} \right|_{R'=R\,,\, h=z\,,\, I \to dI = J_S dz = M_0 dz} = \frac{\mu_0 M_0 R^2}{2(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dz$$

$$B = B_z = \int_{z=R}^{\sqrt{3}R} dB_z = \frac{\mu_0 M_0 R^2}{2} \int_R^{\sqrt{3}R} \frac{dz}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 M_0 R^2}{2} \left[\frac{z}{R^2\sqrt{R^2+z^2}} \right]_R^{\sqrt{3}R} = \frac{\mu_0 M_0}{2} \left(\frac{\sqrt{3}R}{2R} - \frac{R}{\sqrt{2}R} \right) = \frac{\mu_0 M_0}{4} (\sqrt{3} - \sqrt{2})$$

■

۸- یک پوسته رسانای کروی به شعاع داخلی a و خارجی b، مطابق شکل، در پتانسیل V_0 نگه داشته شده است. بار نقطه‌ای q در فاصله d از مرکز پوسته کروی واقع است ($d<a$). چگالی بار سطحی در نقاط A و B به ترتیب کدام است؟



۱) $-\frac{q(a+d)}{4\pi a(a-d)^2}$ و $\frac{\varepsilon_0 V_0}{b}$

۲) $-\frac{q}{4\pi a(a-d)}$ و $\frac{2\varepsilon_0 V_0}{a+b}$

۳) $-\frac{q(b+d)}{4\pi b(b-d)^2}$ و $\frac{\varepsilon_0 V_0}{a+b}$

۴) $-\frac{q}{4\pi b(b-d)}$ و $\frac{2\varepsilon_0 V_0}{a+b}$

حل: گزینه (۱) صحیح است.

اگر یک سطح بسته گوسی در ناحیه هادی ($a<r<b$) چنان در نظر بگیریم که سطح $r=a$ را شامل شود، چون باید میدان در این ناحیه هادی صفر شود، طبق قانون گوس، بار $Q_{FS_a} = -q$ روی $r=a$ القاء می‌گردد، البته با توزیع غیریکنواخت (نقاطی از سطح $r=a$ که به بار q نزدیکترند، دارای چگالی بیشتر و بالعکس نقاطی که از بار q دورترند، دارای چگالی کمتر می‌باشند). روی سطح $r=b$ بار Q_{FS_b} با توزیع یکنواخت القاء می‌گردد که برابر است با:

$$Q_{FS_b} = CV_0 = 4\pi\varepsilon_0 b V_0$$

پس چگالی بار یکنواخت در تمام نقاط سطح $r=b$ از جمله در نقطه B برابر است با:

$$\rho_{FS}(r=b) = \rho_{FS_B} = \frac{Q_{FS_b}}{S_b} = \frac{4\pi\varepsilon_0 b V_0}{4\pi b^2} = \frac{\varepsilon_0 V_0}{b}$$

بنابراین اکنون می‌دانیم که گزینه صحیح، گزینه (۱) می‌باشد. ولی برای حل کامل مسأله چگالی بار را در نقطه A نیز می‌یابیم در نقطه A:

$$\rho_{FS_A} = \varepsilon_0 E_A \cdot \hat{a}_{n_A} = \varepsilon_0 E_A \cdot (-\hat{a}_r)$$

پس باید E_A یعنی میدان درون پوسته کروی ($r<a$) را دقیقاً در نقطه A بیابیم. برای این که از روش تصویر استفاده می‌کنیم با حالت ۲-ب (تصویر بار درون کره هادی با پتانسیل V_0) مواجهیم، پس مطابق شکل زیر، بارهای تصویر و محل آنها به صورت زیر خواهند بود:

$q' = -\frac{a}{d}q$ در $d' = \frac{a^2}{d}$

$Q'' = 4\pi\varepsilon_0 a V_0$ روی سطح $r=a$ با توزیع یکنواخت

پس میدان در نقطه A برابر است با:

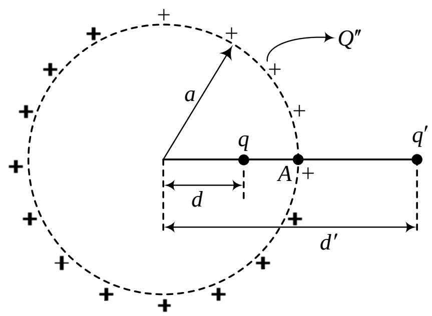
$$E_A = E_q + E_{q'} + E_{Q''} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (a-d)^2}(+\hat{a}_x) + \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 (d'-a)^2}(-\hat{a}_x) + o = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{(a-d)^2} + \frac{a/d}{(a^2/d-a)^2} \right)\hat{a}_x$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1+d/a}{(a-d)^2}\hat{a}_x = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a} \frac{a+d}{(a-d)^2}\hat{a}_x$$

پس:

$$\rho_{FS_A}=\varepsilon_{\circ}\left(\frac{q}{۴\pi\varepsilon_{\circ}a}\frac{a+d}{(a-d)^{۲}}\hat{a}_x\right)\cdot(-\hat{a}_x)=-\frac{q(a+d)}{۴\pi a(a-d)^{۲}}$$

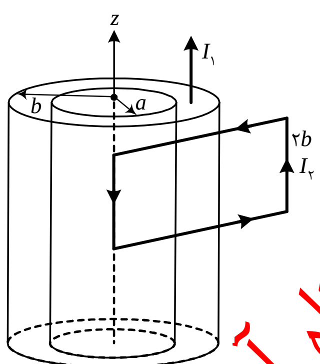
که مطابق انتظار در گزینه (۱) قرار دارد.



رد گزینه: چون نقطه B روی سطح خارجی پوسته کروی هادی قرار دارد، چگالی بار در این نقطه فقط به شعاع خارجی پوسته (b) و ولتاژ $V_{\circ}$ بستگی دارد و مستقل از شعاع داخلی پوسته (a) و d است. فقط گزینه (۱) است که این ویژگی را دارد. بنابراین گزینه (۱) صحیح است و گزینه‌های (۲) تا (۳) مردودند. گزینه‌های (۳) و (۴) را به طریق دیگری نیز می‌توان رد کرد. اگر بار q در مرکز پوسته کروی قرار گیرد، یعنی $d=\circ$ شود، بار $Q_{FS_a}=-q$ در تمام نقاط سطح $r=a$ از جمله در نقطه A، به طور یکنواخت با چگالی $\rho_{FS}(r=a)=\rho_{FS_A}=\frac{Q_{FS_a}}{S_a}=-\frac{q}{۴\pi a^{۲}}$ توزیع می‌گردد. فقط گزینه‌های (۱) و (۲) با قرار دادن $d=\circ$، $\rho_{FS_A}=-\frac{q}{۴\pi a^{۲}}$ را نتیجه می‌دهند و بنابراین گزینه‌های (۲) و (۳) مردودند. مجدداً گزینه‌های (۳) و (۴) را به طریق دیگری نیز می‌توان رد کرد. ضخامت پوسته کروی هادی و در نتیجه b در چگالی ρ_{FS_A} تأثیری ندارد. بنابراین گزینه‌های (۳) و (۴) مردودند. خلاصه می‌توان گفت که این تست در کل بسیار غیر هوشمندانه طرح شده است.

■

۹- در ناحیه استوانه‌ای بینهایت طویل $a<r<b$ و $\circ\le\varphi<۲\pi$، جریان $I_۱$ با توزیع یکنواخت در جهت موازی محور z مطابق شکل جاری است. در حلقه مربعی به ضلع $۲b$ جریان $I_۲$ جاری است و یک ضلع مربع روی محور استوانه قرار دارد. نیروی وارد بر این قاب مربعی کدام است؟



۱) $\frac{I_۱I_۲}{۴\pi b}$

۲) $\frac{I_۱I_۲}{۲\pi b}$

۳) $\frac{I_۱I_۲}{\pi b}$

۴) $\frac{I_۱I_۲}{۲\pi}$

حل: گزینه (۴) صحیح است.

جریان $I_۱$ درون پوسته استوانه‌ای یک توزیع جریان متقارن استوانه‌ای نوع (۱) با چگالی جریان $\boldsymbol{J}_V=\frac{I_۱}{\pi(b^{۲}-a^{۲})}\hat{a}_r$ می‌باشد. پس میدان $\boldsymbol{B}_۱$ به سادگی از قانون مداری آمپر به دست می‌آید:

$$\boldsymbol{B}_۱=\frac{\mu_{\circ}I_{in}}{۲\pi r}\hat{a}_{\varphi}=\begin{cases}\frac{\mu_{\circ}\times\circ}{۲\pi r}\hat{a}_{\varphi}=\boldsymbol{o} & r<a\\ \frac{\mu_{\circ}\frac{I_۱}{\pi(b^{۲}-a^{۲})}\times\pi(r^{۲}-a^{۲})}{۲\pi r}\hat{a}_{\varphi} & a<r<b\\ \frac{\mu_{\circ}I_۱}{۲\pi r}\hat{a}_{\varphi} & r>b\end{cases}$$

چون میدان در ناحیه $r<a$ صفر است، نیروی وارد بر ضلع قائم سمت چپ که روی محور z قرار دارد، صفر است:

$$\boldsymbol{F}_{Left}=I_۲\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{B}_۱=I_۲\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{o}=\boldsymbol{o}$$

مجموع نیروی وارد بر دو ضلع افقی قاب نیز صفر است، چرا که میدان آنها با هم برابر است (دقت کنید که میدان مستقل از z است.) در حالی که جهت جریان آنها قرینه یکدیگر است و بنابراین نیروی وارد بر آنها قرینه یکدیگر بوده و در نتیجه مجموع آنها صفر است:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{F}_{Lower} &= \int_{r=0}^{2b} I_2 (dr\hat{a}_r)\times \boldsymbol{B}_1 = -\int_0^{2b} I_2 \boldsymbol{B}_1 \times \hat{a}_r dr \\ \boldsymbol{F}_{Upper} &= \int_{r=2b}^{0} I_2 (dr\hat{a}_r)\times \boldsymbol{B}_1 = +\int_0^{2b} I_2 \boldsymbol{B}_1 \times \hat{a}_r dr \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{F}_{Lower} + \boldsymbol{F}_{Upper} = \boldsymbol{o}$$

پس می‌ماند ضلع قائم سمت راست و در نتیجه نیروی وارد بر قاب مربعی جریان برابر نیروی وارد بر ضلع قائم سمت راست است:

$$\boldsymbol{F}_{21} = \boldsymbol{F}_{Lower} + \boldsymbol{F}_{Upper} + \boldsymbol{F}_{Left} + \boldsymbol{F}_{Right} = \boldsymbol{o}+\boldsymbol{o}+\boldsymbol{o}+\boldsymbol{F}_{Right} = \boldsymbol{F}_{Right} = I_2(2b\hat{a}_z)\times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}\hat{a}_\varphi \Big|_{r=2b} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\hat{a}_r$$

بنابراین گزینه (۴) صحیح است، البته ضریب μ_0 جا افتاده است.

■

۱۰- در مختصات کروی، چگالی جریان الکتریکی به صورت زیر در یک محیط هادی مفروض است:

$$\boldsymbol{J} = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\hat{a}_r - \frac{1}{r^2}\hat{a}_\varphi \quad \frac{\text{A}}{\text{m}^2}$$

کل جریانی که در جهت $\hat{a}_z$ از یک دیسک دایره‌ای به شعاع R به مرکز محور z و مستقر در $z=h$، می‌گذرد، کدام است؟ فرض کنید $h \gg R$ باشد.

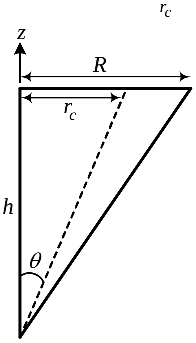
۱) $I = \frac{4\pi R}{h}$　　۲) $I = \frac{2\pi R}{h}$　　۳) $I = \frac{2\pi R^2}{h^2}$　　۴) $I = \frac{4\pi R^2}{h^2}$

حل: گزینه (۲) صحیح است.

$$I = \int_S \boldsymbol{J}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r_c=0}^{R}\left(\frac{1}{r_s^2\sin\theta}\hat{a}_{r_s} - \frac{1}{r^2}\hat{a}_\varphi\right)\cdot(r_c dr_c d\varphi \hat{a}_z) = \int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{r_c}{r_s^2 \sin\theta}\underbrace{\hat{a}_{r_s}\cdot\hat{a}_z}_{\cos\theta} dr_c d\varphi = 2\pi\int_0^R \frac{r_c\cos\theta}{r_s \times \underbrace{r_s\sin\theta}_{r_c}} dr_c$$

$$= 2\pi\int_0^R \frac{r_c\cos\theta}{r_s\times \underbrace{r_s\sin\theta}_{r_c}}dr_c = 2\pi\int_0^R \frac{\cos\theta}{r_s}dr_c$$

اما با توجه به شکل زیر چون $h \gg R$ است، می‌توان نوشت:



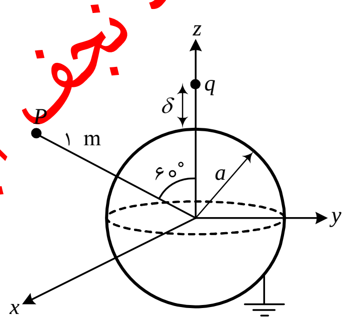
$$\frac{\cos\theta}{r_s} = \frac{h/\sqrt{r_c^2+h^2}}{\sqrt{r_c^2+h^2}} = \frac{h}{r_c^2+h^2} \cong \frac{h}{h^2} = \frac{1}{h}$$

پس:

$$I = 2\pi\int_0^R \frac{dr_c}{h} = \frac{2\pi}{h}\int_0^R dr_c = \frac{2\pi R}{h}$$

■

۱۱- مطابق شکل، بار نقطه‌ای q در فاصله ناچیز δ بالای یک کره هادی زمین شده به شعاع a، قرار دارد. با فرض اینکه $\delta \ll a$ و $a \ll 1\ \text{m}$ باشد. میدان الکتریکی در نقطه P با مختصات $\varphi=0$، $\theta=60^\circ$ و $r=1\ \text{m}$ کدام است؟



۱) $\frac{q\delta}{16\pi\varepsilon_0}[(2\sqrt{3}+1)\hat{a}_x + (\sqrt{3}-1)\hat{a}_z]$

۲) $\frac{q\delta}{8\pi\varepsilon_0}[3\sqrt{3}\hat{a}_x + (2-\sqrt{3})\hat{a}_z]$

۳) $\frac{q\delta}{16\pi\varepsilon_0}[3\sqrt{3}\hat{a}_x + (2-\sqrt{3})\hat{a}_z]$

۴) $\frac{q\delta}{8\pi\varepsilon_0}[3\sqrt{3}\hat{a}_x - \hat{a}_z]$

حل: گزینه (۴) صحیح است.

با یک مسأله تصویر در مقابل کره هادی در حالت ۱-الف (تصویر بار بیرون کره هادی زمین شده) مواجهیم. بنابراین مطابق شکل (الف)، بار تصویر و محل آن عبارتند از:

$$q' = -\frac{a}{d}q = -\frac{a}{a+\delta}q \cong -q \quad , \quad d' = \frac{a^2}{d} = \frac{a^2}{a+\delta} = \frac{a}{1+\delta/a} = a(1+\delta/a)^{-1} \cong a(1-\delta/a) = a-\delta$$

بنابراین با یک دوقطبی الکتریکی با گشتاور $\boldsymbol{p} = p\hat{a}_z = qD\hat{a}_z = 2q\delta\hat{a}_z$ مواجهیم که چون $a \ll 1\ \text{m}$ است، می‌توان فرض کرد که مطابق شکل (ب) این دوقطبی در مبدأ مختصا واقع است. بنابراین میدان الکتریکی در نقطه P به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\boldsymbol{E} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(2\cos\theta\hat{a}_r + \sin\theta\hat{a}_\theta)\Big|_{p=2q\delta\ ,\ r=1\,\text{m}\ ,\ \theta=\pi/3\ ,\ \varphi=0} = \frac{q\delta}{2\pi\varepsilon_0}(\hat{a}_r + \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{a}_\theta)\Big|_{\theta=\pi/3\ ,\ \varphi=0}$$

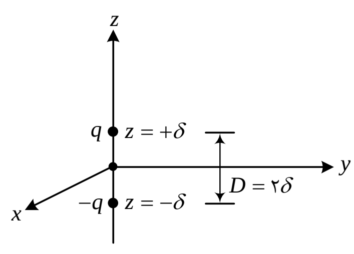
اما:

$$\hat{a}_r\Big|_{\theta=\pi/3\ ,\ \varphi=0} = \sin\theta\cos\varphi\hat{a}_x + \sin\theta\sin\varphi\hat{a}_y + \cos\theta\hat{a}_z\Big|_{\theta=\pi/3\ ,\ \varphi=0} = \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{a}_x + \frac{1}{2}\hat{a}_z$$

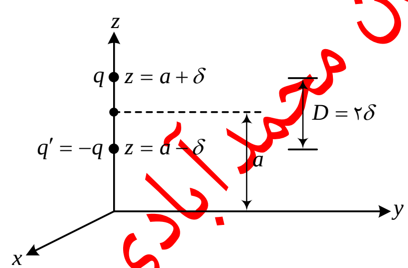
$$\hat{a}_\theta\Big|_{\theta=\pi/3\ ,\ \varphi=0} = \cos\theta\cos\varphi\hat{a}_x + \cos\theta\sin\varphi\hat{a}_y - \sin\theta\hat{a}_z\Big|_{\theta=\pi/3\ ,\ \varphi=0} = \frac{1}{2}\hat{a}_x - \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{a}_z$$

پس:

$$\boldsymbol{E} = \frac{q\delta}{2\pi\varepsilon_0}[\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{a}_x + \frac{1}{2}\hat{a}_z + \frac{\sqrt{3}}{2}(\frac{1}{2}\hat{a}_x - \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{a}_z)] = \frac{q\delta}{8\pi\varepsilon_0}[3\sqrt{3}\hat{a}_x - \hat{a}_z]$$



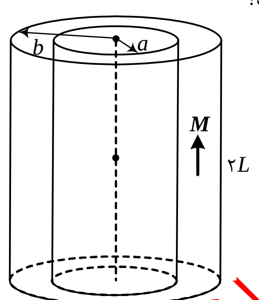
(ب)



(الف)

■

۱۲- یک پوسته استوانه‌ای از ماده مغناطیسی با طول $2L$ و شعاعهای داخلی و خارجی a و b دارای بردار مغناطیس‌شوندگی غیریکنواخت $\boldsymbol{M} = M_0 \sin^2\varphi\hat{a}_z$ داده شده است. شدت میدان مغناطیسی $\boldsymbol{H}$ در نقطه P واقع در مرکز جسم کدام است؟



۱) $\frac{M_0 L}{8}(\frac{1}{\sqrt{b^2+L^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2+L^2}})\hat{a}_z$

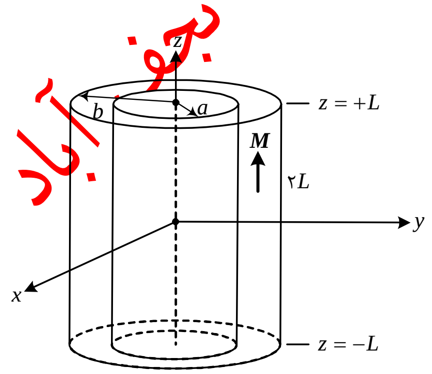
۲) $M_0 L(\frac{1}{\sqrt{b^2+L^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2+L^2}})\hat{a}_z$

۳) $\frac{M_0 L}{2}(\frac{1}{\sqrt{b^2+L^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2+L^2}})\hat{a}_z$

۴) $\frac{M_0 L}{4}(\frac{1}{\sqrt{b^2+L^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2+L^2}})\hat{a}_z$

حل: گزینه (۳) صحیح است.

مطابق شکل زیر، مرکز استوانه را منطبق بر مبدأ مختصات در نظر می‌گیریم و بردار مغناطیس‌شوندگی را با جریانهای مقید جایگزین می‌کنیم:



$$\boldsymbol{J}_{mV} = \nabla\times\boldsymbol{M} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \hat{a}_r & r\hat{a}_\varphi & \hat{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & M_0\sin^2\varphi \end{vmatrix} = \boldsymbol{o}$$

$$\boldsymbol{J}_{mS} = \boldsymbol{M}\times\hat{a}_n = \begin{cases} M_0\sin^2\varphi\hat{a}_z\times(+\hat{a}_z) = \boldsymbol{o} & z=+L \\ M_0\sin^2\varphi\hat{a}_z\times(-\hat{a}_z) = \boldsymbol{o} & z=-L \\ M_0\sin^2\varphi\hat{a}_z\times(-\hat{a}_r) = -M_0\sin^2\varphi\hat{a}_\varphi & r=a \\ M_0\sin^2\varphi\hat{a}_z\times(+\hat{a}_r) = +M_0\sin^2\varphi\hat{a}_\varphi & r=b \end{cases}$$

بنابراین توزیع جریان شامل دو جریان سطحی، یکی روی استوانه $r=a$ با چگالی $\boldsymbol{J}_{S_a}=-M_\circ \sin^{2}\varphi\,\hat{a}_\varphi$ و دیگری روی استوانه $r=b$ با چگالی $\boldsymbol{J}_{S_b}=+M_\circ \sin^{2}\varphi\,\hat{a}_\varphi$ می‌باشد. میدان ناشی از توزیع جریان اول در مرکز استوانه (مبدأ مختصات) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{o}\\ \boldsymbol{r}'=a\hat{a}_{r'}+z'\hat{a}_z\end{array}\right\} \Rightarrow \ \boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'=-a\hat{a}_{r'}-z'\hat{a}_z \quad , \quad |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^{3}=(a^{2}+z'^{2})^{\frac{3}{2}}$$

$$\boldsymbol{J}_S\,dS'=-M_\circ \sin^{2}\varphi'\,\hat{a}_{\varphi'}\,a\,d\varphi'\,dz'$$

$$\boldsymbol{B}_a=\int_{S'}\frac{\mu_\circ \boldsymbol{J}_S\,dS'\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^{3}}=\int_{z'=-L}^{+L}\int_{\varphi'=\circ}^{2\pi}-\frac{\mu_\circ M_\circ \sin^{2}\varphi'\,\hat{a}_{\varphi'}\times(-a\hat{a}_{r'}-z'\hat{a}_z)\,a\,d\varphi'\,dz'}{4\pi(a^{2}+z'^{2})^{\frac{3}{2}}}$$

$$=-\frac{\mu_\circ M_\circ a}{4\pi}\int_{-L}^{L}\int_{\circ}^{2\pi}\left(\frac{a\sin^{2}\varphi'}{(a^{2}+z'^{2})^{\frac{3}{2}}}\hat{a}_z-\frac{z'}{(a^{2}+z'^{2})^{\frac{3}{2}}}\hat{a}_{r'}\right)d\varphi'\,dz'$$

$$=-\frac{\mu_\circ M_\circ a^{2}}{4\pi}\hat{a}_z\int_{\circ}^{L}\frac{dz'}{(a^{2}+z'^{2})^{\frac{3}{2}}}\int_{\circ}^{2\pi}(1-\cos 2\varphi')\,d\varphi'+\boldsymbol{o}=-\frac{\mu_\circ M_\circ a^{2}}{4\pi}\hat{a}_z\left[\frac{z'}{a^{2}\sqrt{a^{2}+z'^{2}}}\right]_{\circ}^{L}(2\pi)=-\frac{\mu_\circ M_\circ L}{2}\frac{1}{\sqrt{a^{2}+L^{2}}}\hat{a}_z$$

چون ناحیه $r<a$ خلأ می‌باشد:

$$\boldsymbol{H}_a=\frac{\boldsymbol{B}_a}{\mu_\circ}=-\frac{M_\circ L}{2}\frac{1}{\sqrt{a^{2}+L^{2}}}\hat{a}_z$$

میدان ناشی از توزیع جریان دوم در مرکز استوانه ($\boldsymbol{H}_b$) به سادگی با تبدیلهای $a\to b$ و $+\hat{a}_z\to-\hat{a}_z$ از $\boldsymbol{H}_a$ به دست می‌آید، پس:

$$\boldsymbol{H}_b=+\frac{M_\circ L}{2}\frac{1}{\sqrt{b^{2}+L^{2}}}\hat{a}_z$$

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}_a+\boldsymbol{H}_b=\frac{M_\circ L}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{b^{2}+L^{2}}}-\frac{1}{\sqrt{a^{2}+L^{2}}}\right)\hat{a}_z$$