

تمرین سری یازدهم الکترومغناطیس

"شرایط همزیستی"

۱. مطابق شکل ناحیه ۱ در فضای تهی با ϵ_0 و ناحیه ۲ در دی الکتریک $(\epsilon_r = 2.4)$ با $\epsilon > 0$

مشخص شده است. اگر برآورد D_1 به صورت زیر باشد:

$$D_1 = 3\hat{a}_x - 4\hat{a}_y + 6\hat{a}_z$$

E_2 و زاویه θ_1 و θ_2 را بیابید.

حل: مؤلفه های x بر فصل مشترک ۲ ناحیه عبورند؛ D_1 و E_2 همواره باشند

$$D_1 = 3\hat{a}_x - 4\hat{a}_y + 6\hat{a}_z$$

$$E_1 = \frac{3}{\epsilon_0}\hat{a}_x - \frac{4}{\epsilon_0}\hat{a}_y + \frac{6}{\epsilon_0}\hat{a}_z$$

$$D_2 = 3\hat{a}_x - D_{y2}\hat{a}_y + D_{z2}\hat{a}_z$$

$$E_2 = E_{x2}\hat{a}_x - \frac{4}{\epsilon}\hat{a}_y + \frac{6}{\epsilon}\hat{a}_z$$

$$\Rightarrow 3\hat{a}_x + D_{y2}\hat{a}_y + D_{z2}\hat{a}_z = \epsilon_0\epsilon_r E_{x2}\hat{a}_x - 4\epsilon_r\hat{a}_y + 6\epsilon_r\hat{a}_z$$

در نتیجه،

$$E_{x2} = \frac{3}{\epsilon_0\epsilon_r} = \frac{1.25}{\epsilon_0}$$

$$D_{y2} = -4\epsilon_r = -9.6$$

$$D_{z2} = 6\epsilon_r = 14.4$$

$$D_1 \cdot \hat{a}_x = |D_1| \cos(90^\circ - \theta_1) \quad \leftarrow \text{برای تعیین زاویه}$$

$$3 = \sqrt{61} \sin \theta_1 \Rightarrow \theta_1 = 22.6^\circ$$

۲. در فضای آزاد پتانسیل $V = V_0 \sin \alpha x \sin \beta y e^{-\delta z}$ داده شده است ($\gamma = \alpha - \beta$)
 اگر یک هادی با ابعاد $0 < y < \frac{\pi}{\beta}$ و $0 < z < \infty$ در این فضای خالی قرار دهیم. چقدر بار الکتریکی در سطح
 این هادی جمع می‌گردد؟

حل: $E = -\nabla V \Rightarrow \rho_s = D_n = \epsilon E_n \Big|_{x=0^+} = -\epsilon \alpha V_0 \sin(\beta y) e^{-\delta z}$

زیرا $\rho_s = -(\vec{D}_1 - \vec{D}_2) \cdot \hat{D}_{n12}$
 بار یک هادی عمود بر سطح است.

$\Rightarrow Q = \iint \rho_s ds$
 $= -\alpha V_0 \int_0^{\frac{\pi}{\beta}} \int_0^{\infty} \epsilon \sin(\beta y) e^{-\delta z} dy dz = -\frac{2\alpha V_0 \epsilon}{\beta \delta}$

۳. در نقطه‌ای در سطح هادی که در آن $\rho_s > 0$ است میدان \vec{D} از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\vec{D} = 4\hat{a}_x - 5\hat{a}_y + 2\hat{a}_z$$

مطلوبت می‌باشد:

الف) ρ_s ب. بردار عمود بر سطح هادی

الف) $E_n = \frac{\rho_s}{\epsilon_0}$

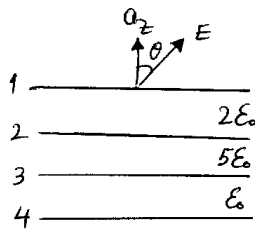
$\Rightarrow \rho_s = D_n$ ، $D_n = |\vec{D}| = \sqrt{4^2 + 5^2 + 2^2}$

$\Rightarrow D_n = \sqrt{45}$ ، $\rho_s = \sqrt{45} = 6.7 (C/m^2)$

ب) $\hat{D}_n = \frac{\vec{D}}{|\vec{D}|} = \frac{1}{\sqrt{45}} (4\hat{a}_x - 5\hat{a}_y + 2\hat{a}_z)$

زیرا بردار عمود بر سطح هادی است.

۴. در یک دی الکتریک سطح قرار گرفته اند. اگر $\vec{E} = 10\hat{a}_x - 20\hat{a}_y + 30\hat{a}_z$ باشد زاویه بین \vec{E} و \hat{a}_z را در مناطق (۱)، (۲)، (۳) و (۴) بدست آورید، سپس ثابت کنید که اگر n دی الکتریک در هم قرار داشته باشند زاویه میلان ورودی با میدان خروجی با هم برابر است.



حل:

$$\theta_1 = \angle(\vec{E}, \hat{a}_z) = \tan^{-1} \frac{30}{(10^2 + 20^2)^{1/2}}$$

$$\theta_1 = 36.7^\circ$$

$$\rightarrow \tan \theta_2 = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \tan \theta_1$$

$$\theta_2 = \tan^{-1} \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \tan 36.7^\circ \right)$$

$$\theta_2 = 56.15^\circ$$

$$\begin{aligned} \text{ج) } \tan \theta_3 &= \frac{\epsilon_3}{\epsilon_2} \tan \theta_2 \\ &\Rightarrow \theta_3 = 74.98^\circ \end{aligned}$$

$$\text{د) } \tan \theta_4 = \frac{\epsilon_4}{\epsilon_3} \tan \theta_3$$

$$\theta_4 = 36.7$$

اگر n دی الکتریک داشته باشیم.

$$\tan \theta_1 = \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \right) \tan \theta_2$$

$$\tan \theta_2 = \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_3} \right) \tan \theta_3$$

⋮

$$\tan \theta_{n-1} = \left(\frac{\epsilon_{n-1}}{\epsilon_n} \right) \tan \theta_n$$

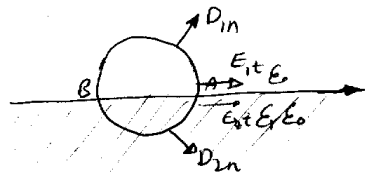
$$\Rightarrow \tan \theta_1 = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_n} \tan \theta_n$$

$$\tan \theta_1 = \frac{\epsilon_0}{\epsilon_0} \tan \theta_n$$

$$\Rightarrow \theta_{in} = \theta_{out}$$

اگر ورودی E در هوا، خروجی آن نیز در هوا باشد.

۵. یک کره هادی به شعاع a تا نیمه در مایع عایق با فریب نفوذپذیری نسبی ϵ_r قرار گرفته و فضای اطراف نیمه فوقانی هوا باشد بار Q را روی سطح کره هادی قرار می دهیم مطلوب است چگالی توزیع بار در :



الف) مرکز مشترک کره هادی و مایع ؛
ب) در مرکز مشترک کره و هوا ؛

می دانیم در سطح هادی داریم :

$$D_{n1} = \rho_{s1} \quad \text{و} \quad D_{n2} = \rho_{s2}$$

$$E_{t1} = E_{t2} \Rightarrow \frac{D_{t1}}{\epsilon_1} = \frac{D_{t2}}{\epsilon_2} \quad (1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{از طرف موازی با هم میدان در} \\ \text{رصد مشترک در مایع با هم برابرند} \end{array} \right.$$

از طرف دیگر با توجه به شکل در فصل مشترک ۳ محیط (نقاط A و B) مؤلفه های برابر مؤلفه های عمودی است

$$D_{t1} = D_{n1} \quad \text{و} \quad D_{t2} = D_{n2}$$

$$\Rightarrow \frac{\rho_{s1}}{\epsilon_1} = \frac{\rho_{s2}}{\epsilon_2} \Rightarrow \frac{\rho_{s2}}{\rho_{s1}} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$$

$$\Rightarrow \frac{\rho_{s2}}{\rho_{s1}} = \frac{\epsilon_r \epsilon_0}{\epsilon_0} \Rightarrow \frac{\rho_{s2}}{\rho_{s1}} = \epsilon_r = \epsilon_r \quad (2)$$

با توجه به اینکه کل بار برابر Q است

$$Q = 2\pi a^2 \rho_{s1} + 2\pi a^2 \rho_{s2} \quad (3)$$

$$\Rightarrow \rho_{s1} = \frac{Q}{4\pi a^2} \left(\frac{1}{1 + \epsilon_r} \right) \quad \text{از (۲) و (۳)}$$

$$\rho_{s2} = \frac{Q}{4\pi a^2} \left(\frac{\epsilon_r}{1 + \epsilon_r} \right) \quad \text{از (۲) و (۳)}$$

۶. معادله سطح فصل مشترک هوا و یک دی الکتریک با فریب $\epsilon_r = 3$ برابر

$$3x + 2y + z = 12 \quad (\text{دایره‌ای الکتریک})$$

می باشد اگر بدانیم E_1 برابر است با ؟
 $E_1 = 20\hat{a}_x + 50\hat{a}_z \text{ V/m}$ و دی الکتریک سمت

چپ صفحه (یعنی طرف میعاد) قرار گرفته باشد آنگاه E_2 را می یابیم.

حل:

$$\hat{a}_n = \frac{3\hat{a}_x + 2\hat{a}_y + \hat{a}_z}{\sqrt{14}}$$

تصور E_1 بر روی \hat{a}_n مؤلفه عمودی E_1 در فصل مشترک ۲ می یابیم.

$$\Rightarrow E_1 \cdot \hat{a}_n = \frac{11}{\sqrt{14}} \Rightarrow E_{n1} = \frac{11}{\sqrt{14}} \hat{a}_n = 2.36\hat{a}_x + 1.57\hat{a}_y + 0.79\hat{a}_z$$

$$E_{t1} = E_1 - E_{n1} = -9.36\hat{a}_x - 1.57\hat{a}_y + 4.21\hat{a}_z$$

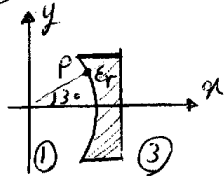
$$E_{t1} = E_{t2}$$

$$\Rightarrow D_{n1} = \epsilon_0 \epsilon_r E_{n1} = \epsilon_0 (7.08\hat{a}_x + 4.71\hat{a}_y + 2.37\hat{a}_z) = D_{n2}$$

$$\Rightarrow E_{n2} = \frac{D_{n2}}{\epsilon_0} = 7.08\hat{a}_x + 4.71\hat{a}_y + 2.37\hat{a}_z$$

$$\Rightarrow E_2 = E_{n2} + E_{t2} = 6.72\hat{a}_x + 3.14\hat{a}_y + 6.58\hat{a}_z \text{ V/m}$$

7. در شکل زیر یک دی الکتریک به شکل نمره در معرض میدان $E = 4\sqrt{3}\hat{a}_R + 3\hat{a}_\phi$ در نقطه P قرار دارد. ضریب دی الکتریک نسبی دی الکتریک ϵ_r چقدر باشد تا میدان در محیط مسطری موازی محور y قرار گیرد؟



حل: به کمک مولفه‌های E و ϵ_r محوری D در نقطه P، در مرز مشترک محیط 1 و دی الکتریک به صورت زیر است

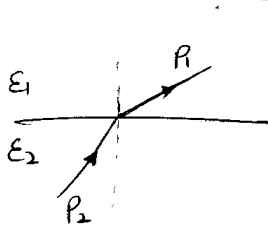
$$\underline{\text{مولفه محوری}} \quad \epsilon_r E_{R1} = \epsilon_r E_r E_{R2} \Rightarrow E_{R2} = \frac{1}{\epsilon_r} E_{R1} = \frac{4\sqrt{3}}{\epsilon_r}$$

از طرف $E_{\phi 2} = E_{\phi 1} \Rightarrow E_{\phi 2} = 3$ مولفه مماس

$$\Rightarrow E_2 = \frac{4\sqrt{3}}{\epsilon_r} \hat{a}_R + 3\hat{a}_\phi = \frac{4\sqrt{3}}{\epsilon_r} (\hat{a}_x \cos 30^\circ + \hat{a}_y \sin 30^\circ) + 3(-\hat{a}_x \sin 30^\circ + \hat{a}_y \cos 30^\circ)$$

$$\Rightarrow E_2 = \left(\frac{4}{\epsilon_r} - \frac{3}{2}\right) \hat{a}_x + \left(\frac{2\sqrt{3}}{\epsilon_r} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) \hat{a}_y$$

8. در سطح مشترک بدون بار 2 عایق با فرایب دی الکتریک نسبی ϵ_r و ϵ_2 نسبت مولفه‌های محوری بردارهای



دوطرفی $\frac{\vec{P}_{n2}}{P_{n1}}$ را بدست آورید.

$$D_{n2} = D_{n1} \Rightarrow \epsilon_2 \frac{P_{n2}}{\epsilon_2(\epsilon_r - 1)} = \epsilon_1 \frac{P_{n1}}{\epsilon_1(\epsilon_r - 1)}$$

$$\frac{\epsilon_r P_{n2}}{\epsilon_r - 1} = \frac{\epsilon_r P_{n1}}{\epsilon_r - 1} \rightarrow \frac{P_{n2}}{P_{n1}} = \frac{\epsilon_r(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r(\epsilon_r - 1)}$$