پتانسیل الکتریکی

تمرین سری هشتم (۵) الکترومغناطیس

۱. کدام یک از میدان‌های زیر الکترواستاتیک (پایستار) است برای آن میدان پتانسیل الکتریکی را محاسبه کنید:

$$\vec{E} = K[(xy)\hat{a}_x + (2yz)\hat{a}_y + 3zx\hat{a}_z] \qquad \vec{E} = K[y^2\hat{a}_x + (2xy+z^2)\hat{a}_y + 2yz\hat{a}_z]$$

حل: میدان‌های الکترواستاتیک (پایستار) دارای کرل برابر صفر می‌باشند ⇐

الف) غیر پایستار

$$\nabla \times \vec{E} = K\begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & 2yz & 3zx \end{vmatrix} = K[-2y\hat{a}_x - 3z\hat{a}_y - x\hat{a}_z$$

ب)

$$\nabla \times \vec{E} = K\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & 2xy+z^2 & 2yz \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$ پایستار است

$$E = -\nabla V \Rightarrow E = -\frac{\partial V}{\partial x}\hat{a}_x + -\frac{\partial V}{\partial y}\hat{a}_y + -\frac{\partial V}{\partial z}\hat{a}_z$$

$$\partial V/\partial x = -Ky^2 \Rightarrow V = -y^2x + f(y,z) \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \quad \partial V/\partial y = -K(2xy+z^2) \qquad (2)$$

$$\partial V/\partial z = -K(2yz) \qquad (3)$$

$$(1) \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial y} = -2Kyx + \frac{\partial f}{\partial x} \Rightarrow -K(2xy+z^2) = -2Kyx + \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = -Kz^2$$

$$\Rightarrow V = (-y^2x - z^2y) \times K + g(z)$$

از طرفی

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -2Kzy + \frac{\partial g(z)}{\partial z} \Rightarrow -2Kyz + \frac{\partial g(z)}{\partial z} = -K\,2yz$$

$$\Rightarrow g(z) = K'$$

$$\Rightarrow V = -K(y^2x + z^2y) + K'$$

۲. در فضای آزاد پتانسیل $V = V_0 \sin\alpha x \sin\beta y\, e^{-\gamma z}$ داده شده است $(\gamma = \alpha - j\beta)$.
میدان الکتریکی و چگالی بار الکتریکی موجود در این فضا را بیابید.

حل:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V = -\frac{\partial V}{\partial x}\hat{a}_x - \frac{\partial V}{\partial y}\hat{a}_y - \frac{\partial V}{\partial z}\hat{a}_z$$

$$= -\alpha V_0 \cos\alpha x \sin\beta y\, e^{-\gamma z}\hat{a}_x - \beta V_0 \sin\alpha x \cos\beta y\, e^{-\gamma z}\hat{a}_y + \gamma V_0 \sin\alpha x \sin\alpha y\, e^{-\gamma z}\hat{a}_z$$

$$\rho = \varepsilon \nabla\cdot\vec{E}$$

$$= \varepsilon\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right)$$

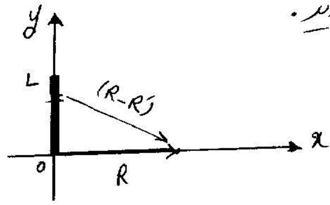
$$= -\varepsilon_0 V_0 e^{-\gamma z}\left(-\alpha^2 \sin\alpha x \sin\beta y - \beta^2 \sin\alpha x \sin\beta y + \gamma^2 \sin\alpha x \sin\beta y\right)$$

$$= -\varepsilon_0 V_0 e^{-\gamma z}\left\{(-\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2)(\sin\alpha x \sin\beta y)\right\}$$

$$= -\varepsilon_0 V_0 e^{-\gamma z}(-2j\alpha\beta)\sin\alpha x \sin\beta y = 2\varepsilon_0 V_0 j\alpha\beta e^{-\gamma z}\sin\alpha x \sin\beta y$$

$$\Rightarrow \rho = 0$$

۳. روی محور y در طول $0 \le y \le L$ بار الکتریکی خطی به چگالی $\rho_\ell = \rho_0 \frac{y}{a}$ قرار دارد. پتانسیل حاصل از این بار در یک نقطه روی محور x ها را بدست آورید.



حل:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho_\ell}{|\vec{R} - \vec{R}'|} d\ell$$

$$R = x\hat{a}_x \quad , \quad R' = y'\hat{a}_y$$

$$\Rightarrow V = \frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0 a} \int \frac{y' dy'}{(x^2 + y'^2)^{1/2}} = \frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0 a} (x^2 + y'^2)^{1/2} \Big|_0^{\ell}$$

$$= \frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0 a} \left\{ \sqrt{x^2 + \ell^2} - |x| \right\}$$

۴. پتانسیل نقاط $A(2,0,0)$ و $B(\frac{1}{2},0,0)$ به ترتیب $V_A = 15^v$ و $V_B = 30^v$ می باشد.
مطلوبست پتانسیل نقطه $C(1,0,0)$ در حالات زیر:

الف) میدان ناشی از بار Q در مبداء

ب) میدان ناشی از بار خطی با توزیع یکنواخت ρ_ℓ روی محور z.

حل: الف)

$$V_{AB} = V_A - V_B = -\int_B^A \vec{E} \cdot \vec{d\ell} = -\int_{1/2}^{2} \frac{Q}{4\pi\varepsilon R^2} dR$$

$$\Rightarrow V_{AB} = -15 = \frac{-Q \times 1.5}{4\pi\varepsilon_0} \Rightarrow Q = 40\pi\varepsilon_0$$

$$\Rightarrow V_{AC} = V_A - V_C = -\int_1^2 \frac{40\pi\varepsilon_0}{4\pi\varepsilon R^2} dR \Rightarrow V_{AC} = -5 \Rightarrow V_C = V_A + 5 = 20 \text{ ولت}$$

ب)

$$V_{AB} = V_A - V_B = -\int_{1/2}^{2} \frac{\rho_\ell}{2\pi\varepsilon_0 r} dr = \frac{-1.39}{2\pi\varepsilon_0} \rho_\ell$$

$$\Rightarrow -15 = \frac{-1.39}{2\pi\varepsilon} \rho_\ell \Rightarrow \rho_\ell = 21.58\, \varepsilon\pi$$

$$\Rightarrow V_{AC} = V_A - V_C = -\int_1^2 \frac{21.58\,\varepsilon\pi}{2\pi\varepsilon_0 r} dr \Rightarrow V_{AC} = -7.48$$

$$\Rightarrow V_C = V_A + 7.48 = 22.48 \text{ ولت}$$

۵. ۳ توزیع بار مقابل را در نظر بگیرید.

$$\rho_1 = \rho_s \delta(z)$$
$$\rho_2 = \rho_\ell \delta(x)\delta(z-2d)$$
$$\rho_3 = +q\,\delta(x)\delta(y)\delta(z-d)$$

اختلاف پتانسیل را برای نقاط $(d,0,d)$ و $(0,d,d)$ بدست آورید.

حل: واضح است که توزیع ρ_1 صفحه $z=0$ با چگالی بار سطحی ρ_s بوده و اختلاف پتانسیل ناشی از آن برای ۲ نقطه به فاصله r_1 و r_2 از صفحه برابر است با:

$$\Delta V = \frac{\rho_s}{2\varepsilon}(r_1 - r_2)$$

و توزیع ρ_2 خط $z=2d$ در صفحه $x=0$ با چگالی بار خطی ρ_ℓ می باشد که اختلاف پتانسیل ناشی از آن برای ۲ نقطه به فاصله r_1 و r_2 (در مختصات استوانه ای) از خط برابر است با:

$$\Delta V_2 = \frac{-\rho_\ell}{2\pi\varepsilon_0}\left(\ln\frac{r_1}{r_2}\right)$$

همچنین توزیع ρ_3 بار نقطه ای واقع در $(0,0,d)$ با مقدار $+q$ است که اختلاف پتانسیل ناشی از آن برای ۲ نقطه به فاصله r_1 و r_2 (در مختصات کروی) از منبع نقطه ای برابر است با:

$$\Delta V_3 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

$$\Rightarrow \Delta V_1 = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}(d-d) = 0$$

$$\Delta V_2 = \frac{-\rho_L}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{d}{\sqrt{2}d}\right) = \frac{\rho_\ell \ln\sqrt{2}}{2\pi\varepsilon_0} \quad و \quad \Delta V_3 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3 = \frac{\rho_\ell \ln\sqrt{2}}{2\pi\varepsilon_0}$$

۶. پتانسیل ناشی از کره‌ای به شعاع R را که دارای چگالی بار الکتریکی سطحی ρ_s می‌باشد در داخل و خارج کره محاسبه کنید (بدون استفاده از قانون گوس)

حل:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int \frac{\rho_s\, ds}{|\vec{R}-\vec{R}'|}$$

$$\vec{R} = z\,\hat{a}_z \quad , \quad R' = R\,\hat{a}_R \quad , \quad ds = R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\rho_s R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi}{(R^2+z^2-2Rz\cos\theta)}$$

و

$$V = \frac{2\pi R^2 \rho_0}{4\pi\varepsilon}\int_0^{\pi} \frac{\sin\theta\, d\theta}{(R^2+z^2-2Rz\cos\theta')^{1/2}}$$

$$= \frac{R^2\rho}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{Rz}(R^2+z^2-2Rz\cos\theta)\right)\Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{R^2\rho_0}{2\varepsilon_0} \times \frac{1}{Rz}\left(\sqrt{(R+z)^2} - \sqrt{(R-z)^2}\right)$$

برای خارج کره $\sqrt{(R-z)^2} = z - R$ و داخل کره $\sqrt{(R-z)^2} = R - z$

$$\Rightarrow V = \frac{R\rho_s}{2\varepsilon z}\left[(R+z)-(z-R)\right] \Rightarrow \text{برای خارج کره } V = \frac{R^2\rho_s}{\varepsilon_0 z}$$

$$\text{و} \Rightarrow V = \frac{R\rho_s}{2\varepsilon z}\left[(R+z)-(R-z)\right] \Rightarrow \text{برای داخل کره } V = \frac{R\rho_s}{\varepsilon_0}$$

۷. دسته سطوح هم پتانسیلی توسط $y^2 = xy + c$ بیان می‌شود و $E_z = 0$ است. در صورتیکه در نقطه $P(2,5,0)$ مقدار $E_x = 20\ V/m$ باشد شدت میدان الکتریکی را بدست آورید.

حل:

$$V = f(x,y,z) = y^2 - xy - c$$

$$, \quad \vec{E} = -K\vec{\nabla}V = y\,\hat{a}_x + (x-2y)\,\hat{a}_y$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -K(y\,a_x + (x-2y)\,\hat{a}_y)$$

$\Rightarrow$ در نقطه $(2,5,0)$ ، E_x را حساب می‌کنیم.

$$\Rightarrow -K5 = 20 \Rightarrow K = -4$$

$$\Rightarrow \vec{E} = 4y\,\hat{a}_x + 4(x-2y)\,\hat{a}_y$$

۸. مربعی به ضلع a دارای بار سطحی به چگالی ρ_s می‌باشد. پتانسیل را در مرکز مربع بدست آورید.

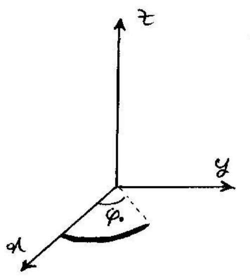
حل:

مربع را به 8 مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین که طول هر ضلع آن $b=\frac{a}{2}$ است تقسیم می‌کنیم. و پتانسیل یک مثلث را حساب کرده و در 8 ضرب می‌کنیم.

$$V_1 = \int_0^b\int_0^b \frac{\rho_s\, dx\, dy}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+y^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{b}{\cos\varphi}} \frac{\rho_s R\, dR\, d\varphi}{4\pi\varepsilon R} = \frac{\rho_s b}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\varphi}{\cos\varphi}$$

$$= \frac{\rho_s b}{4\pi\varepsilon_0} \ln \frac{1+\tan\frac{\pi}{8}}{1-\tan\frac{\pi}{8}} \Rightarrow V_{total} = 8V_1 = \frac{\rho_s a}{\pi\varepsilon_0} \ln\frac{1+\tan\frac{\pi}{8}}{1-\tan\frac{\pi}{8}}$$

۹. برای توزیع بار الکتریکی زیر پتانسیل را در نقاط روی محور z بدست آورید.



حل:

$$V(R) = \int_{c'} \frac{\rho_\ell(R')\, dl'}{4\pi\varepsilon |R-R'|}$$

$$\begin{cases} R = z\hat a_z \\ R' = r\hat a_r \end{cases} \qquad \begin{aligned} &\rho_\ell(R') = \rho_{\ell 0} \\ &\vec R - \vec R' = -r\hat a_r + z\hat a_z \\ &|\vec R-\vec R'| = \sqrt{r^2+z^2}, \quad dl' = r\,d\varphi \end{aligned}$$ المان طول

$$\Rightarrow V(R) = \int_0^{\varphi_0} \frac{\rho_\ell\, r\, d\varphi}{4\pi\varepsilon\sqrt{r^2+z^2}} = \frac{\rho_{\ell 0} r}{4\pi\varepsilon\sqrt{r^2+z^2}}\int_0^{\varphi_0} d\varphi = \frac{\rho_\ell r\varphi_0}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+z^2}}$$

۱۰. بررسی کنید کدام یک از میدان‌های زیر شرایط یک میدان الکتریکی ساکن را دارا می‌باشد.

الف) $\vec A = \frac{1}{r}\hat a_\varphi$ (مختصات استوانه‌ای) ب) $\vec B = (3+\frac{2}{r^3})\cos\theta\,\hat a_r - (3-\frac{1}{r^3})\sin\theta\,\hat a_\theta$

حل: برای اینکه یک میدان برداری بتواند یک میدان الکتریکی باشد باید کرل آن برابر صفر باشد (در حالت ساکن)

$$\nabla\times\vec A = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)\right]a_z = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{1}{r}\right)\right]a_z = 0 \Rightarrow \nabla\times A = 0$$ الف ⟸

ب) $\nabla\times B = 0$ ⟸ به همان روش با برای مختصات کروی عمل می‌کنیم.

⟸ هر دو میدان می‌توانند بردارهایی از میدان الکتریکی باشند.