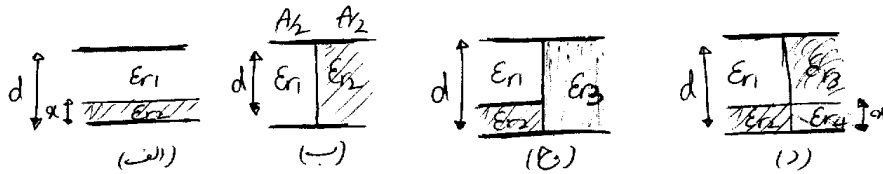


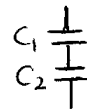
این سری است و همگن است

خازن

۱. مطلوب است که به صورت یک از خازن های از نوع صفحات موازی که در شکل زیر نشان داده شده است



$$C_1 = \frac{\epsilon_1 A}{d-x} = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d-x}$$



(الف)

$$C_2 = \frac{\epsilon_2 A}{x} = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{x}$$

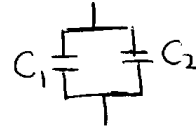
چون خازن C_1 و C_2 با هم سری هستند

$$C_T = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \Rightarrow C_T = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r \epsilon_r A}{\epsilon_r x + \epsilon_r (d-x)}$$

(ب)

$$C_1 = \epsilon_1 \frac{A/2}{d} = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{2d}$$

چون خازن ها موازی اند



$$C_2 = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{2d}, \quad C_T = C_1 + C_2 \Rightarrow C = \epsilon_0 (\epsilon_r + \epsilon_r) \frac{A}{2d}$$

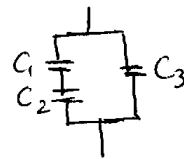
$$C_1 = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{2(d-x)}$$

$$C_2 = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{2x}$$

$$C_3 = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{2d}$$

$$\Rightarrow C_T = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} + C_3$$

$$\Rightarrow C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r \epsilon_r A}{2(\epsilon_r x + \epsilon_r (d-x))} + \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{2d}$$



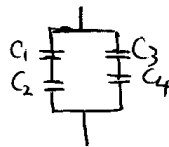
(پ)

$$C'_1 = C_1 \parallel C_2 \rightarrow \text{سری} \Rightarrow C'_1 = \frac{\epsilon_r \epsilon_r \epsilon_r A}{2(\epsilon_r x + \epsilon_r (d-x))}$$

$$C'_2 = C_3 \parallel C_4 \rightarrow \text{سری} \Rightarrow C'_2 = \frac{\epsilon_r \epsilon_r \epsilon_r A}{2(\epsilon_r x + \epsilon_r (d-x))}$$

$$\Rightarrow C_T = C'_1 + C'_2$$

۱



(د)

۲. ظرفیت خازن را بدست آورید در صورتی که فاصله صفحات d و مساحت صفحات A باشد و فیلد
تغیر پذیر الکتریکی عایق بین صفحات یک خازن به طور خطی از ϵ_1 تا ϵ_2 از یک صفحه تا صفحه دیگر تغییر می‌کند.
(ب) چگالی بار سطحی را بر حسب دسپلین در عایق خازن را بدست آورید.



۸۴

$$\epsilon(z) = Az + B$$

$$\epsilon(z=0) = \epsilon_1 \Rightarrow B = \epsilon_1 \quad , \quad \epsilon(z=d) = \epsilon_2 \Rightarrow A = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{d}$$

$$\Rightarrow \epsilon(z) = \left(\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{d}\right)z + \epsilon_1$$

$$\vec{D} = \epsilon_s \hat{a}_z \quad \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon} = \frac{\epsilon_s}{\epsilon} \hat{a}_z$$

$$V_0 = \int_0^d \vec{E} \cdot d\vec{l} = \epsilon_s \int_0^d \frac{1}{\left(\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{d}\right)z + \epsilon_1} dz = \frac{\epsilon_s d}{\epsilon_2 - \epsilon_1} \ln\left(\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{d} z + \epsilon_1\right) \Big|_0^d$$

$$= \frac{\epsilon_s d}{\epsilon_2 - \epsilon_1} \ln \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \Rightarrow V_0 = \frac{Qd}{A(\epsilon_2 - \epsilon_1)} \ln \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$$

$$\Rightarrow C = \frac{Q}{V} \Rightarrow C = \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_1) A}{\ln\left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\right) d}$$

(۱)

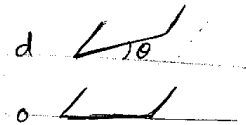
$$\vec{P} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \vec{E} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{P} = \left(\epsilon_s - \frac{\epsilon_0 \epsilon_s}{\left(\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{d}\right)z + \epsilon_1}\right) \hat{a}_z \Rightarrow \rho_{nb} = -\nabla \cdot \vec{P} \Rightarrow \rho_{nb} = \frac{\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{d} \epsilon_0 \epsilon_s}{\left(\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{d} z + \epsilon_1\right)^2}$$

$$\rho_{sb} = \rho \cdot \hat{a}_n$$

$$\rho_{sb}|_{z=0} = \rho \cdot (-\hat{a}_z)|_{z=0} = -\left(\frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{\epsilon_1}\right) \rho_s \quad , \quad \rho_{sb}|_{z=d} = \hat{a}_z|_{z=d} = \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_0)}{\epsilon_1} \rho_s$$

۳. ظرفیت خازن متغیر را بیابید و بررسی کنید که کوچک باشد (مساحت مربع $A=a^2$).



حل: برای ۲ صفحه موازی داریم:

$$C = \epsilon \frac{A}{d}$$

فرض کنیم در خازن فوق‌الذکر ثابت خازن تشکیل شده که مساحت مربع $a(a \cos \theta)$ است را در نظر بگیریم موازی شده‌اند. بنابراین ظرفیت خازن جزئی $a(a \cos \theta)$ از رابطه زیر بدست می‌آید

$$dC = \epsilon \frac{dA}{y} = \epsilon \frac{a dx}{y}$$

$$y = d + x \tan \theta$$

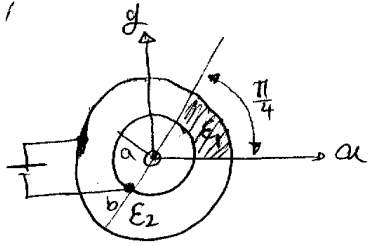
$$C = \int_0^a \frac{\epsilon a dx}{d + x \tan \theta}$$

$$C = \epsilon a \int_0^a \frac{dx}{d + x \tan \theta} = \epsilon a \frac{1}{\tan \theta} \ln |x \tan \theta + d| \Big|_0^a$$

$$C = \frac{\epsilon \cdot a}{\tan \theta} \ln \left(\frac{a \tan \theta + d}{d} \right)$$

پس $\theta \rightarrow 0$ خازن تبدیل به یک خازن مسطحی در دو صفحه موازی در رابطه فوق خواهم داشت:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} C = \frac{\epsilon \cdot a^2}{d} = \frac{\epsilon A}{d}$$



۴. ظرفیت خازن کروی شکل زیر را بدست آورید.

تذکره: پتانسیل V_0 را در سرچشمه خازن و ϕ را زاویه بین ناحیه به ناحیه در فضای بین آجوشن بار آنگاه قرار نذاریم.

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0$$

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} (R^2 D_R) = 0 \Rightarrow D_R = \frac{K}{R^2}$$

شرایط مرزی را اعمال کنیم.

$$E_{1t} = E_{2t} \Rightarrow E_{1R} = E_{2R} = \frac{E_0}{R^2}$$

$$V_0 = + \int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{l} = E_0 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

$$E_0 = \frac{V_0}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$$

$$D_{1R} = \epsilon_1 E_{1R} \Rightarrow D_{1R} = \frac{\epsilon_1 V_0}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$$

$$D_{2R} = \epsilon_2 E_{2R} \Rightarrow D_{2R} = \frac{\epsilon_2 V_0}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$$

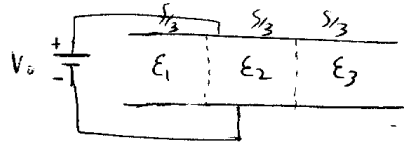
$$P_s(R=a) = (D_1 - D_2) \cdot \hat{a}_{nr}$$

$$\Rightarrow P_s(R=a) = \begin{cases} \frac{\epsilon_1 V_0}{(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}) a^2} & 0 < \phi < \pi/4 \\ \frac{\epsilon_2 V_0}{(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}) a^2} & \pi/4 < \phi < \pi/2 \end{cases}$$

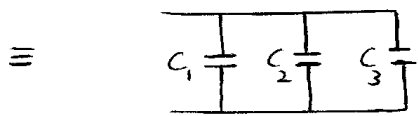
$$Q = \int_{s_1} P_{s1} ds_1 + \int_{s_2} P_{s2} ds_2 = \frac{\epsilon_1 V_0}{(\frac{1}{a} - \frac{1}{b})} \frac{\pi}{2} + \frac{\epsilon_2 V_0}{(\frac{1}{a} - \frac{1}{b})} \frac{\pi}{2}, \quad C = \frac{Q}{V_0}$$

۴

۵. در شکل زیر مطلوبیت؟ (الف) $C = ?$ (ب) $P_{S_1}, P_{S_2}, P_{S_3}$ (نمای سطحی و در سطح V_0)
(۱، ۲، ۳)



حل: الف) این شکل معادل شکل زیر است.



$$C_1 = \epsilon_1 \frac{s/3}{d} \quad C_2 = \epsilon_2 \frac{s/3}{d}$$

$$C_3 = \epsilon_3 \frac{s/3}{d}$$

$$\Rightarrow C_{Total} = C_1 + C_2 + C_3 = (\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3) \frac{s}{3d}$$

$$\int_+^- \vec{E} \cdot d\vec{l} = V_0$$

$$\int_0^d E(-\hat{a}_z) \cdot d\vec{z} \hat{a}_z = V_0 = Ed \Rightarrow \vec{E} = \frac{V_0}{d} (-\hat{a}_z)$$

$$\Rightarrow \vec{E}_1 = \vec{E}_2 = \vec{E}_3 = \frac{V_0}{d} (-\hat{a}_z)$$

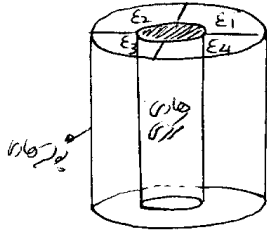
$$\Rightarrow \vec{D}_1 = \epsilon_1 E_1 = \frac{\epsilon_1 V_0}{d} (-\hat{a}_z), \quad \vec{D}_2 = \frac{\epsilon_2 V_0}{d} (-\hat{a}_z), \quad \vec{D}_3 = \frac{\epsilon_3 V_0}{d} (-\hat{a}_z)$$

$$\Rightarrow P_{S_1} = \vec{D} \cdot \hat{a}_n = \frac{\epsilon_1 V_0}{d}, \quad P_{S_2} = \frac{\epsilon_2 V_0}{d}, \quad P_{S_3} = \frac{\epsilon_3 V_0}{d}$$

در سطح V_0
در سطح 0

$$\vec{P} = \vec{D}_3 - \epsilon_0 \vec{E}_3 = \left(\frac{\epsilon_3 V_0}{d} - \frac{\epsilon_0 V_0}{d} \right) (-\hat{a}_z) = \frac{(\epsilon_3 - \epsilon_0) V_0}{d} (-\hat{a}_z)$$

٦. ظرفیت خازن الکتریکی دو سیم موازی؟



حل: ظرفیت خازن الکتریکی دو سیم موازی به φ با ϵ برابر است:

$$C_0 \varphi = \frac{C}{2\pi \epsilon} = \frac{L}{\ln \frac{b}{a}}$$

$$C_1 = C_0 \varphi \epsilon_1 \times \frac{\pi}{2} = \frac{\epsilon_1 L \pi}{2 \ln \frac{b}{a}}$$

$$C_2 = C_0 \varphi \epsilon_2 \frac{\pi}{2} = \frac{\epsilon_2 L \pi}{2 \ln \frac{b}{a}}$$

$$C_3 = C_0 \varphi \epsilon_3 \frac{\pi}{2} = \frac{\epsilon_3 L \pi}{2 \ln \frac{b}{a}}$$

$$C_4 = C_0 \varphi \epsilon_4 \frac{\pi}{2} = \frac{\epsilon_4 L \pi}{2 \ln \frac{b}{a}}$$

$$\Rightarrow C_{Total} = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = \frac{(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4) L \pi}{2 \ln \frac{b}{a}}$$