تمرین سری اول – موعد تحویل: شنبه ۱۳۸۷/۷/۲۰

۱. با استفاده از یک هشتم حجم کره‌ای به شعاع R قضیه دیورژانس را برای تابع زیر امتحان کنید:

$$\boldsymbol{v} = r^2 \cos\theta\, \hat{r} + r^2 \cos\varphi\, \hat{\theta} - r^2 \cos\theta \sin\varphi\, \hat{\varphi}$$

۲. اتحادهای زیر را اثبات کنید:

الف) $\int_V (\nabla \times V) d\tau = -\oint_S V \times da$

ب) $\int \varphi \nabla^2 (\psi) dV + \int \nabla(\varphi).\nabla(\psi) dV = \oint \varphi(\nabla\psi).\overrightarrow{dA}$

پ) $\int (\varphi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \varphi) dV = \oint (\varphi \nabla \psi - \psi \nabla \varphi).\overrightarrow{dA}$

ت) $\oint_l T\, d\mathbf{l} = -\int_S \nabla T \times d\boldsymbol{a}$

۳. عبارت‌های زیر را حساب کنید:

الف) $\nabla \times (\vec{r} \times \vec{\omega}) = ?$ ($\vec{\omega}$ برداری ثابت است)

ب) $\nabla \times (f(r)\hat{r}) = ?$

پ) $\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial \mathbf{n}} = ?$ ($\hat{n} = \frac{1}{2}\hat{x} + \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{y}$ و $f(x,y,z) = 3x^2 + yz^3$)

ت) $\nabla \times \hat{e} = ?$ $\hat{e} = \hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi}$

۴. انتگرال $\mathbf{A} = \int d\boldsymbol{a}$ روی سطح S را مساحت برداری S می‌نامند.

الف) مساحت برداری نیمکره‌ای به شعاع R را بیابید.

ب) نشان دهید **A** برای هر سطح بسته‌ای صفر است.

پ) نشان دهید **A** برای همه‌ی سطوح هم‌مرز یکسان است.

۵. انتگرال میدان برداری زیر را روی نیم دایره‌ای به مرکز (0,1,0) و شعاع 1 در نیم صفحه‌ی x^+ محاسبه کنید .

$$\mathbf{A} = \rho^2 z \hat{\rho} + \sin\rho \cos\rho\, \hat{\varphi} + \rho^2 \cos^2\varphi\, \hat{z}$$

۶. انتگرال میدان برداری زیر را روی مسیری که از برخورد سطوح $y = x^2$ و $z = 1$ حاصل می‌شود، از نقطه‌ی (0,0,1) تا نقطه‌ی (2,4,1) محاسبه کنید .

$$\mathbf{F} = 10x\hat{x} - 5x^2 y\hat{y} + 3yz^2\hat{z}$$

۷. دو نقطه‌ی $A:(\rho,\varphi,z) = (3,0,4)$ و $B:(\rho,\varphi,z) = (6,\frac{2\pi}{3},5)$ در دستگاه مختصات استوانه‌ای داده شده‌اند. مطلوب است:

الف) فاصله‌ی بین دو نقطه.

ب) رابطه‌ی بردار $\overrightarrow{AB}$ در دستگاه مختصات کارتزین.

۸. زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{A}=\frac{1}{r}\hat{r}$ و $\vec{B}=\frac{1}{\rho}\hat{\rho}$ را در نقطه‌ی $(x,y,z)=(1,1,1)$ بدست آورید.

۹. حاصل عبارت $\iint_S \left(\cos(\theta)\hat{\rho}+\sin(\theta)\hat{\varphi}\right)\cdot\overrightarrow{dS}$ را بیابید. سطح S نیمکره‌ای به شعاع ۲ و مرکز مبدأ مختصات است که در بالای صفحه‌ی xy قرار دارد.

۱۰. برای توابع زیر، $\vec{E}=-\vec{\nabla}\Phi$ را محاسبه کنید:

الف) $\Phi=\Phi_0 e^{-2(x+z)}\cos(\pi y/2)$

ب) $\Phi=\Phi_0\left(\frac{\cos(\varphi)}{z}\right)^2\ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)$

ج) $\Phi=\Phi_0\frac{\cos(\theta)\sin^2(\varphi)}{r}$

۱۱. میدان برداری $\vec{A}=\frac{\cos^2(\varphi)}{r^3}\hat{r}$ را در کل فضا نظر بگیرید.

الف) قضیه‌ی دیورژانس را در ناحیه‌ی بین دو پوسته‌ی کروی $r=1$ و $r=2$ تحقیق کنید.

ب) قضیه‌ی دیورژانس را برای کره‌ای به شعاع $r=3$ تحقیق کنید. آیا قضیه‌ی دیورژانس برقرار است؟ چرا؟

*۱۲. میدان برداری $\vec{A}=x^2y\hat{x}+2xy\hat{y}$ را در نظر بگیرید. صحت قضیه‌ی استوکس را روی سطح OMNO در شکل زیر بررسی کنید. شعاع کمان OM=ON=2 است.